УДК 378

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ПОВТОРНЫХ ИСПЫТАНИЙ СРЕДСТВАМИ MATHCAD В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ ВУЗА

Куликова О.В.

ФБГОУ ВПО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург, Россия (620034, г. Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66)

Представлено дидактическое сопровождение для проведения вычислительного эксперимента в рамках дисциплины «Математика», способствующее формированию понятия вероятности события у студентов, получающих высшее техническое и экономическое образование. Сопровождение включает описание методических приемов отбора учебного материала, конструирования имитационной модели независимых повторных испытаний, составления программы вычислений в системе MathCAD, анализа и интерпретации результатов экспериментальной учебной деятельности. Программа, имитирующая подбрасывание монеты в системе MathCAD, позволяет не только моделировать известные натурные опыты Ж. Бюффона и К. Пирсона, но и проводить самостоятельные учебные исследования. Применение в педагогической практике данных материалов направлено на активизацию мыслительной деятельности студентов при изучении вероятностных закономерностей.

Ключевые слова: формирование понятия вероятности события, статистическое определение вероятности события, классическое определение вероятности события, имитационное моделирование в учебном процессе, учебный вычислительный эксперимент.

IMITATING MODELLING OF THE INDEPENDENT REPEATED EXPERIMENTS BY MATHCAD IN THE UNIVERSITY EDUCATION

Kulikova O.V.

Ural State Railway University, Ekaterinburg (620034, Ekaterinburg, Kolmogorova st. 66)

Didactic maintenance for computing experiment on class "Algebra and calculation" is presented. This maintenance allows forming the concept of probability to the students receiving high technical and economic education. It includes the description of methodical receptions of the educational material selection; imitating model design of independent re-tests; drawing up the calculations by the MathCAD program; analysis and interpretation of the experimental educational activity results. The imitating program of coin tossing by the MathCAD program allows providing both the well-known Byuffon’s and Pearson's experiments and independent educational researches. Pedagogical application of this paper is directed on the student cogitative activity during studying of probabilistic regularities.

Key words: probability, statistic, imitating modeling, educational computing experiment.

Введение

Вузовский курс математики, преподаваемый студентам технических и экономических специальностей и направлений подготовки, предусматривает изучение теории вероятностей. Понимание вероятностных явлений и процессов всегда вызывает определенные трудности у студентов, так как их познание связано с постижением гносеологического смысла случайного и необходимого. Изучение теоретического материала начинается с формирования математического понятия вероятности события, определяемого несколькими способами. Согласно классическому определению, вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа случаев m, благоприятствующих ему, к общему числу случаев n ($P(A) = m/n$) [1; 2; 4]. Отношение числа испытаний m, в которых событие A происходит, к общему числу испытаний n называется относительной частотой $w(A)$ этого события или статистической вероятностью

($w(A) = m/n$) [1; 2; 4]. Если испытания будут независимыми, повторными и проводимыми в одинаковых условиях, то вероятность наступления события, выступающего результатом их осуществления, сохраняет свое значение p, а относительная частота m/n изменяется и отличается от p. Утверждения о соотношении величин m/n и p устанавливаются из следствия интегральной теоремы Муавра–Лапласа и теоремой, сформулированной Я. Бернулли (1654–1705). Освоение студентами содержания понятия вероятности события во многом определяет успешность изучения последующих тем «Случайные величины» и «Закон больших чисел», поэтому представляется целесообразным уделить должное внимание решению такой методической проблемы, как иллюстрация соотношения величин m/n и p.

Опытная проверка приближения относительной частотой m/n к вероятности p осуществлялась на начальных этапах развития теории вероятностей средствами натурного эксперимента. В учебной литературе приводятся сведения о том, что естествоиспытатель Ж. Бюффон (1707–1788) и математик К. Пирсон (1857–1936) многократно подбрасывали монету и фиксировали результаты выпадения одной, заранее выбранной стороны [2; 4]. Представляется логичным при изложении учебного материала о независимых повторных испытаниях использовать наглядную иллюстрацию стремления относительной частоты события m/n к ее вероятности p, так как многие студенты проявляют, прежде всего, интерес к практическому использованию знаний вероятностных закономерностей.

Любая денежная монета, как известно, имеет две стороны, на одной из которых отмечен ее номинал, а на другой – государственная символика. Вероятность выпадения какой-либо одной стороны монеты равна 1/2, так как она симметрична относительно своих сторон. Результаты экспериментов Ж. Бюффона и К. Пирсона [2; 4] представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты натурного эксперимента

Экспериментатор	n	m	n/m
Ж. Бюффон	4040	2048	0,507
К. Пирсон	12000	6019	0,5016
	24000	12012	0,5005

Повторить исторически известные натурные эксперименты Ж. Бюффона и К. Пирсона в учебном процессе достаточно затруднительно, так как их постановка требует больших временных затрат, но при современном развитии вычислительной техники становится возможным их имитационное моделирование [6; 7].

Построение дидактического сопровождения применения вычислительного эксперимента, адекватно отображающего независимые повторные испытания, при формировании у студентов понятия вероятности события, выступает целью данного исследования.

Результаты и обсуждение

Отбор учебно-теоретического материала. При постановке независимых повторных испытаний интерес представляет тот факт, что некоторое событие A в отдельно взятом опыте может наступить или не наступить, но в результате серии опытов оно непременно появляется определенное количество раз. Современная формулировка теоремы Я. Бернулли утверждает, что если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с постоянной вероятностью p $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что относительная частота m/n появления события A удовлетворяет неравенству $|m/n - p| < \varepsilon$ и становится сколь угодно близкой к единице при достаточно большом количестве испытаний [5]. Я. Бернулли доказал эту теорему средствами «чистой математики». Известный математик последние двадцать лет своей жизни посвятил исследованию проблем теории вероятностей, но его труд «Искусство предположений», который включал отмеченную выше теорему, вышел в незавершенном виде только в 1713 г. уже после смерти автора [5].

Теорема Я. Бернулли в настоящее время входит в группу теорем, которая получила название закона больших чисел. Знакомство с этой группой теорем отделено во времени от изучения независимых повторных испытаний, поэтому у студентов не формируется целостного представления об условиях приближения относительной частотой появления события к его относительной мере возможного наступления $(m/n \to p)$ на этапе формирования понятия вероятности события.

В следствии из интегральной теоремы Муавра–Лапласа [1; 2; 4], которым завершается изучение независимых повторных испытаний в рамках дисциплины «Математика», рассматривается утверждение о том, что если при каждом из n независимых испытаний вероятность появления некоторого случайного события A равна p $(0 < p < 1)$, а m – число испытаний, в которых A фактически наступает, то для определения вероятности осуществления неравенства $|m/n - p| < \varepsilon$ при заданном числе $\varepsilon > 0$ используется приближенное равенство

$$P(|m/n - p| \le \varepsilon) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \qquad (1)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, вычисляемая по формуле

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \qquad (2)$$

Формула (1) раскрывает соотношение относительной частоты m/n события A с его вероятностью p, отображая дуалистическое единство статистического и классического определений понятия вероятности события. Функция Лапласа $\Phi(x)$ задается таблично для аргумента $x \in [0; 5]$. Если $x < 0$, то значение $\Phi(x)$ находится по формуле $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, так как функция Лапласа обладает свойством нечетности. Если $x > 5$, то $\Phi(x)$ принимается равной 1/2, следовательно, $2\Phi(x)$ становится равной единице. Если $2\Phi(x) \approx 1$, то это означает достоверность того, что относительная частота m/n отличается от вероятности p на величину ε, значение которой связано с количеством испытаний n.

Конструирование имитационной модели. Имитацией подбрасывания монеты может выступать работа генератора случайных чисел. Если генерируются равномерно распределенные случайные числа, значения которых принадлежат интервалу [0; 1], то интервалы [0; 0,5) и [0,5; 1] могут моделировать две стороны монеты. Подсчет чисел, которые попадают в интервал [0,5; 1], удобно осуществлять с помощью операции суммирования, предварительно округляя каждое значение до целого (каждое число преобразуется в единицу). При округлении значений до целого преобразуются в ноль числа, которые принадлежат интервалу [0; 0,5). Отбор непрерывных случайных величин, имеющих значения от 0 до 1, с помощью округления до целого однозначно устанавливает количество данных, попадающих только в один интервал.

Составление программы вычислений. Система компьютерной математики MathCAD [3], которая активно используется студентами при изучении вузовского курса математики, позволяет осуществить имитационное моделирование независимых повторных испытаний, проводимых Ж. Бюффоном и К. Пирсоном. Рассмотрим эксперимент, моделирующий выпадение орла при подбрасывании монеты. Выпадению номинала монеты в этом случае будет соответствовать случайное число, принадлежащее интервалу [0; 0,5). Выпадению орла – случайное число, принадлежащее интервалу [0,5; 1]. Отклонение значений относительной частоты m/n выпадения орла от вероятности $p = 0,5$ для заданного количества испытаний n удобно наблюдать на графике, отображающем соответствующие величины. Сопоставление теоремы Бернулли и формулы (1) приводит к построению выражения $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}\right) \to 1$, которое означает, что выполнение неравенства $|m/n - p| \le \varepsilon$ можно рассматривать как практически достоверное событие $P(|m/n - p| \le \varepsilon) \to 1$, если известно ε.

Значение ε при заданном значении функции $2\Phi(x)$ рассчитывается по формуле

$$\varepsilon = x\sqrt{\frac{pq}{n}} \qquad (3)$$

Выбор значения $2\Phi(x)$, близкого к единице, позволяет исследовать достоверность покрытия относительной частоты m/n выпадения орла интервалом [0,5 – ε; 0,5 + ε]. В библиотеку статистических функций системы MathCAD [3] входит функция *dnorm* (x, a, σ), использование которой позволяет составить функцию $P(x) = 2\Phi(x)$, имеющую следующий вид:

$$P(x) := \int_0^x 2\ dnorm(x, 0, 1)\ dx\,, \tag{4}$$

где функция *dnorm*(*x*, 0, 1) соответствует функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Целенаправленный выбор значений функции *P*(*x*) (вероятности покрытия значения *m*/*n* интервалом [0,5 – ε; 0,5 + ε]) для расчета ε удобно осуществлять, имея графическое представление функциональной зависимости. Построить график функции *P*(*x*) в системе MathCAD [3] можно с помощью оператора двумерного графика (рис. 1).

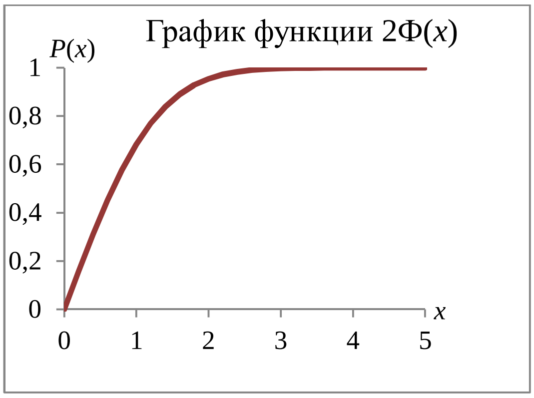

Рис. 1. График функции *P*(*x*)

Программа для имитационного моделирования опытов Ж. Бюффона и К. Пирсона по подбрасыванию монеты представлена в таблице 2, а значения вычисляемых величин отражены на рис. 2.

Таблица 2

Программа «Иллюстрация значений относительной частоты независимых повторных испытаний (имитация бросания монеты)»

Начальные данные	Расчетные формулы	Результат вычислений
Количество испытаний $n :=$ Вероятность выпадения орла в одном испытании $p :=$ Значение аргумента функции 2Ф(*x*) $x :=$	$i := 1 \,.....n$ $q_i := rnd(1)$ $z(i) := q_i$ $g(i) := round(z(i), 0)$ $m(n) := \sum_{i=1}^{n} g(i)$ $w(n) := m(n)/n$ $\varepsilon(n) := x\sqrt{p(1-p)/n}$ $l1(n) := p - \varepsilon(n),\ \ l2(n) := p + \varepsilon(n)$	$n := 4040$ $p := 0{,}5$ $x := 3$ $P(3) = 0{,}9973$ $m(n) = 2041$ $w(n) = 0{,}5052$ $\varepsilon(n) = 0{,}0236$ $l1(n) = 0{,}4764$ $l2(n) = 0{,}5052$

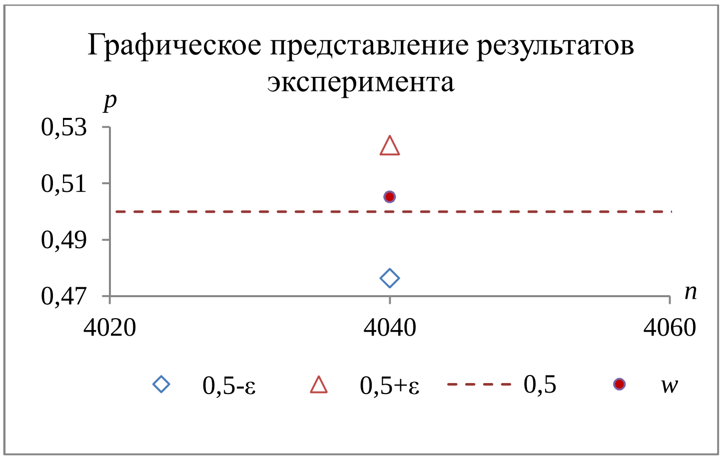

Рис. 2. Имитационное моделирование опыта Ж. Бюффона

Работа программы для проведения вычислительного эксперимента запускается введением следующих начальных данных: 1) количество испытаний n; 2) вероятность выпадения орла p; 4) значение аргумента x. Функция *rnd* (1) создает одномерный массив чисел, равномерно распределенных в интервале от 0 до 1. Переменная i определяет объем массива (количество генерируемых чисел). Функция *round* (x, 0) округляет значение полученных чисел точностью до целого, то есть преобразует их в дискретную величину, имеющую значение или 0 или 1. Оператор $\sum$ выполняет суммирование единиц. Функции пользователя $\varepsilon(n)$, $l1(n)$ и $l2(n)$ находят соответственно значение ε и значения нижней и верхней границ интервала $[p - \varepsilon; p + \varepsilon]$.

Анализ и интерпретация полученных результатов. Функция $2\Phi(x)$ монотонно возрастает на интервале от 0 до 3 и существенно не изменяется на интервале от 3 до 5. Выберем для проведения учебного имитационного эксперимента значение $2\Phi(3)$, равное 0,9973. В этом случае ε, рассчитанное по формуле (3), для опыта Ж. Бюффона примет значение 0,024, а для опытов К. Пирсона – 0,014 и 0,010 соответственно. Вывод на демонстрационный экран рабочего пространства системы MathCAD в учебной аудитории, оснащенной мультимедиаоборудованием, позволяет при использовании данной программы наблюдать на графике значения границ интервала $[p - \varepsilon; p + \varepsilon]$ (обозначены ромбом и треугольником), значение относительной частоты $w(A)$ выпадения орла (обозначено кружком), вероятности p выпадения орла (пунктирная линия).

Следует отметить, что количество выпадений орла в имитационном эксперименте, равное 2041 (рис. 2), не совпадает с результатом, полученным Ж. Бюффоном (табл. 1). Относительные частоты выпадения орла 0,507 и 0,505 (соответственно рассчитанные по данным натурного и имитационного эксперимента) при заданном условии $P(|m/n - 0{,}5| < 0{,}024) = 0{,}9973$ покрываются интервалом [0,476; 0,524]. Если переменной n присвоить значения

12000 или 24000, то можно успешно провести имитационное моделирование опытов К. Пирсона. Учитывая, что вероятностные закономерности в единичных испытаниях проявляются по-разному и только их многократное повторение позволяет «увидеть» их некоторую устойчивость, представляется целесообразным провести имитационное моделирование опытов Ж. Бюффона и К. Пирсона несколько раз и зафиксировать полученные данные. Собранный эмпирический материал позволяет организовать со студентами обсуждение вероятностных закономерностей и предложить им провести подобные исследования при других значениях функции $2\Phi(x)$ или при других значениях n. Завершить изучение независимых повторных испытаний можно в процессе беседы об изменениях длины задаваемого интервала и отклонений m/n от $p = 0{,}5$ для различных значений n при условии $2\Phi(3) = 0{,}9973$ (рис. 3).

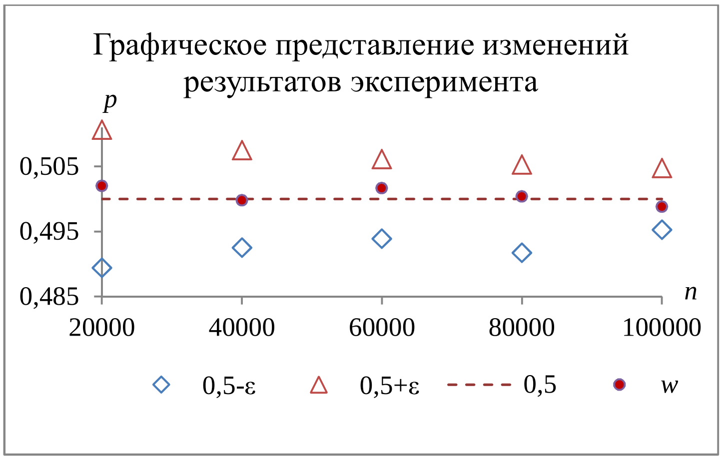

Рис. 3. Изменение длины интервала [0,5 – ε; 0,5 + ε]

Увеличение количества имитаций подбрасываний монеты до 100000 приводит к существенному уменьшению интервала [0,5 – ε; 0,5 + ε] (рис. 3), что означает более значимое уменьшение отклонения m/n от 1/2 по сравнению с величиной отклонений, когда $n << 100000$. Отмеченная тенденция хорошо иллюстрирует утверждение теоремы Я. Бернулли.

Заключение

Последовательное выполнение таких действий, как отбор учебно-теоретического материала, конструирование имитационной модели, составление программы вычислений, анализ и интерпретация полученных результатов, позволяют успешно достигнуть поставленной цели. Представленное дидактическое сопровождение методически адаптировано для его использования студентами при изучении теории вероятностей в вузовском курсе математики. Визуализация функциональных зависимостей и значений исследуемых величин средствами системы компьютерной математики MathCAD выступает одним из вариантов решения отмеченной выше методической проблемы иллюстрации соотношения величин m/n и p. Включение предлагаемых материалов в учебный процесс направлено на создание благоприятных условий для восприятия и осознания вероятностных закономерностей.

Список литературы

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов. – 9-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с. ISBN 5-06-004211-6.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей : учеб. - 8-е изд., испр. и доп. – М. : Едиториал УРСС, 2005. – 448 с. ISBN 5-354-01091-8.
3. Дьяконов В. Mathcad 2001 : специальный справочник. – СПб. : Питер, 2002. – 832 с. ISBN 5-318-00362-1.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с. ISBN 5-238-00573-3.
5. Никифоровский В.А. Великие математики. Бернулли. - М. : Наука, 1984. – 180 с.
6. Павловский Ю.Н. Имитационное моделирование : учеб. пособ. для студ. высш. учеб. заведений / Ю.Н. Павловский, Н.В. Белотелов, Ю.И. Бродский. – М. : Изд. центр «Академия», 2008. – 236 с. ISBN 978-5-7695-3967-1.
7. Строгалев В.П., Толкачева И.Ю. Имитационное моделирование : учеб. пособ. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 280 с. ISBN 978-5-7038-3021-5.

Рецензенты:

Туранов Х.Т., д.т.н., профессор Уральского государственного университета путей сообщения (УрГУПС), г. Екатеринбург.

Казанцева Н.В., д.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института физики металлов УрО РАН, г. Екатеринбург.