УДК 372.851: 159.953.5

СПОСОБЫ СИСТЕМНОГО ПОСТРОЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Веселяева Т. Ю.

ФГОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Москва

В статье для системного построения содержания обучения алгебре предлагается использовать идеи П. Я. Гальперина. Выявляется одна из причин типичных ошибок школьников – отсутствие в учебниках упражнений на отработку развернутого действия на первых этапах процесса усвоения. С помощью сочетания двух методов, предложенных Н. Ф. Талызиной: «теоретико-экспериментального моделирования» и «анализа сложившихся видов деятельности», т. е. видов деятельности профессионального математика (используются такие понятия абстрактной алгебры, как бинарная операция, нейтральный и симметричный элемент) продемонстрировано выделение основных единиц учебного материала при изучении темы: «Линейные уравнения». Предлагается способ изучения темы: «Свойства логарифмов» без традиционных искусственных приемов, при котором появляется возможность строить ориентировочную основу действия с большей долей самостоятельности учащихся.

Ключевые слова: системно-деятельностный подход, Гальперин, построение содержания обучения математике.

WAYS OF SYSTEMATIC CONSTRUCTION OF ALGEBRA SUBJECT MATTER IN THE MIDDLE SCHOOL

Veselyaeva T. Y.

Moscow State University n.a. M. V. Lomonosov, Moscow, Russia

The usage of P. Ya. Gal'perin ideas for systematic construction of algebra training content is proposed in the article. One of the reasons for students' common mistakes is revealed and that is the lack of exercises for expanded action drilling on the early stages of the assimilation process in textbooks. With the combination of the two methods proposed by N. F. Talyzina such as "theoretical and experimental modeling" and "analysis of existing activities," i.e., math activities (types of a mathematician activities) (using such concepts of abstract algebra as binary operation, and neutral and symmetrical element) the allocation of the basic educational material units for studying *Linear Equations* topic has been demonstrated. A new method of studying *Properties of Logarithms* topic is being suggested: without the traditional artificial approaches, when it is possible to build an indicative basis for the action with a greater degree of independence of students.

Key words: system-activity approach, Galperin, the construction of the content of teaching mathematics.

Введение

Используем для построения содержания обучения алгебре в средней школе идеи одного из авторов системно-деятельностного подхода к обучению – П. Я. Гальперина и его последователя – Н. Ф. Талызиной.

Известно, что П. Я. Гальпериным выделены три типа ориентировочной основы действия, соответствующие трем типам учения. Наиболее продуктивным из них был признан третий тип [8, с. 99], при котором учащимся предлагают построить с максимальной долей самостоятельности обобщенные и полные ориентировочные основы действий. Именно этот тип учения считал близким теории развивающего обучения В. В. Давыдов: «Согласно П. Я. Гальперину, для III типа учения характерна ориентировка учащихся на основные единицы, конституирующие ту или иную область знания, на законы их сочетания, а главное – на общие методы определения того и другого. Такая ориентировка дает детям понимание того, чем обоснованы выделение и состав условий соответствующих действий… Таким образом, III тип ориентировки и учения связан с переходом ребенка к опосредованному, теоретическому мышлению…» [3, с. 263].

Но еще Петр Яковлевич осознавал масштабы трудностей при организации обучения по третьему типу: «III тип ориентировки и учения требует гораздо более глубокой переработки учебных предметов. Выделение основных единиц материала, метода их анализа и общих правил их сочетания требует совсем иного размещения и освещения материала, чем то, что принято в современной методике. Такая переработка учебного материала составляет главную трудность в реализации III типа.

Однако два соображения позволяют не откладывать его применение до полного завершения такой перестройки: во-первых, изложение предмета по III типу ориентировки более всего приближается к собственно научному, современному его пониманию; во-вторых, даже частичное осуществление III типа воспитывает такое верное «чувство предмета» и такое положительное отношение к нему, что в очень большой мере облегчает его дальнейшее усвоение, даже если последующие разделы учебного предмета не подвергаются переработке по III типу» [2, с. 32-33].

Для переработки учебного материала Н. Ф. Талызина предлагает два метода: метод теоретико-экспериментального моделирования [9, с. 12] и анализ сложившихся видов деятельности [9, с. 13]. Первый метод направлен на выявление объективного состава действия на основе затруднений обучающихся. Он состоит в том, что, достраивая теоретическую модель после каждой экспериментальной проверки, автор обучающей программы возвращается к экспериментированию до тех пор, пока его не удовлетворит построенная модель. Метод, получивший название «анализ сложившихся видов деятельности», состоит в том, что выявляется истинное содержание деятельности людей, которые преуспевают в решении задач данного класса.

Применяя первый метод, проанализируем ошибочное решение линейного уравнения семиклассником, которого однозначно можно было отнести к категории одаренных (он был призером олимпиад):

$$-6x + 3 = 0$$

$$-6x = -3$$

$$x = -3:6$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

При проверке, подставляя найденный корень в данное уравнение, ученик понял, что решил уравнение неправильно, но тщетно пытался найти свою ошибку, поскольку его ориентировочная основа действия была неверна: на вопрос, почему на третьем шаге решения потерян знак числа шесть, он уверенно отвечал, что число меняет знак, как только оказывается по другую сторону равенства.

В учебнике, по которому учился решать линейные уравнения этот ученик, развернутое действие переноса слагаемого из одной части уравнения в другую продемонстрировано только один раз [7, с. 230]. И в этом учебнике совсем не содержится упражнений, направленных на отработку этого действия в развернутом виде.

Упражнения на отработку развернутого действия вообще крайне редко встречаются в учебниках математики. Учителя, как правило, предлагают учащимся выполнять действия сразу в свернутом виде, пользуясь теоретическим выводом. И ориентировочная основа действия, полученная в готовом виде, часто искажается даже самыми лучшими учениками.

На этапе экспериментальной проверки выяснилось, что развернутый алгоритм решения линейного уравнения, даже не очень подробный и сопровожденный конкретным примером, был для семиклассников очень трудным:

$ax + b = 0\ (a \neq 0)$	$-4x + 3 = 0$
1. Прибавив к обеим частям уравнения число, противоположное b:	1.Прибавив к обеим частям уравнения число, противоположное 3:
$ax + b + (-b) = 0 + (-b),$	$-4x + 3 + (-3) = 0 + (-3),$
после преобразований получим:	после преобразований получим:
$ax = -b.$	$-4x = -3.$
2.Разделим обе части равенства на a:	2.Разделим обе части равенства на -4:
$x = -\frac{b}{a}.$	$x = \frac{3}{4}.$
3.Проверка: $a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0.$	3.Проверка: $-4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + 3 = -3 + 3 = 0$

Очевидно, что полный алгоритм со ссылками на законы действий над числами им тем более бесполезен. К тому же, последовательность шагов алгоритма решения линейного уравнения не всегда однозначна. Например, можно сначала разделить обе части уравнения на коэффициент при неизвестном и только затем переносить известное слагаемое вправо. В некоторых случаях удобнее слагаемые, содержащие неизвестные, оставить в правой части равенства. Такие действия кажутся школьникам неправильными, поскольку их учили, что слагаемые с неизвестными нужно переносить именно в левую часть равенства, они каждый раз делали именно так, и это им кажется существенным.

Таким образом, методом «теоретико-экспериментального моделирования» объективный состав деятельности выявить не удалось. Применим второй метод – «анализ сложившихся видов деятельности»: рассмотрим процесс решения линейного уравнения с точки зрения математика.

Поскольку разность $a - b$ всегда можно заменить суммой: $a + (-b)$, а частное $\frac{a}{b}$ – произведением: $a \cdot \frac{1}{b}$, при решении линейных уравнений используется всего лишь два действия:

- ✓прибавление к обеим частям равенства некоторого слагаемого;
- ✓умножение обеих частей равенства на некоторый множитель.

Возможность сведения четырех арифметических действий к двум в алгебре вообще очень важна, поскольку все законы действий над числами сформулированы только для главных операций: сложения и умножения.

Возвращаясь к линейным уравнениям, рассмотрим их простейшие виды, для решения которых используется только одно из названных действий:

$x + a = b$	$x \cdot a = b$
$x = b + (-a)$	$x = b \cdot \dfrac{1}{a}$

И с точки зрения математика мы имеем дело не с двумя видами простейших уравнений, а лишь с одним:

$$x * a = b,$$

где символом $*$ обозначена бинарная операция группы (сложение в аддитивной группе действительных чисел или умножение в мультипликативной группе действительных чисел без нуля). Для решения уравнения воспользуемся существованием для каждого элемента a группы симметричного элемента a', то есть такого, что $a * a' = e$ [5, с. 94]. По определению бинарной операции [5, с.75],

$$(x * a) * a' = b * a'.$$

В силу ассоциативности операции получим

$$x * (a * a') = b * a'.$$

По определению симметричного элемента [5, с.78],

$$x * e = b * a'.$$

И, наконец, по определению нейтрального элемента [5, с.77],

$$x = b * a'$$

Возвращаясь к аддитивной и мультипликативной записи конечного результата, имеем:

$x = b + (-a)$	$x = b \cdot \dfrac{1}{a}$

Обозначения и терминология симметричного для a элемента a' в аддитивной и мультипликативной записи бинарной операции различны: противоположный и, соответственно, обратный элемент, но равенства, их определяющие, сходны:

$a+(-a)=0$	$a*a'=e$	$a\cdot\frac{1}{a}=1$

Узловым моментом сходства является параллель между нейтральными элементами в аддитивной и мультипликативной записи:

$a+0=a$	$a*e=a$	$a\cdot 1=a$

Эти понятия: *нуля и единицы, числа, противоположного и обратного данному* «рассеяны» по разным страницам школьных учебников. И явные для математика «параллели» оказываются скрытыми для школьников. Ясно, что преждевременно знакомить их с такими понятиями высшей алгебры, как бинарная операция, группа. Но понимание принципиальной схожести нуля и единицы, числа противоположного данному и обратного данному числа, доступно подросткам. Значит, эти понятия нужно вводить одновременно. Тогда при решении линейного уравнения школьник сможет сам определиться, какое из двух действий выбрать, исходя из цели: от чего он намерен «освободить» неизвестное в уравнении – от слагаемого или множителя. И на первых этапах процесса усвоения упражнения должны быть направлены на отработку развернутого действия: «прибавим к обеим частям равенства число, противоположное известному слагаемому», «умножим обе части равенства на число, обратное известному сомножителю». Пройдя этапы процесса усвоения (по Гальперину) эти действия преобразуются в умственные (интериоризируются) – сворачиваются, причем непроизвольно.

Возвращаясь к аддитивной и мультипликативной записи решений простейших линейных уравнений:

$x+a=b$	$x\cdot a=b$
$x=b-a$	$x=b/a$

выделим еще один существенный момент: операция вычитания (деления) является обратной [6, с.18] к операции сложения (умножения).

Обратимость является неотъемлемым свойством операции в концепции интеллекта Ж. Пиаже (см., например, [4]). С точки зрения этой теории, обучение оперированию подобными абстрактными объектами при изучении математики *оптимально* именно в подростковом возрасте, – на «стадии формальных операций». Эксперимент В. В. Давыдова, доказавший способность детей усваивать теоретические знания, гораздо раньше только усиливает сделанный вывод: возможность оперирования обобщенными математическими объектами должна быть предоставлена школьникам *не позже*, чем в подростковом возрасте.

Понятие обратной операции начинает «работать» наиболее системно для неассоциативной операции возведения в степень. Уравнения $x^a=b$ и $a^x=b$ имеют различные решения. Корень первого уравнения при натуральном показателе n степени называют арифметическим корнем -ой степени из числа b, корень второго – логарифмом числа b по основанию a (при известных ограничениях на a и b). Поскольку свойства корней следуют из свойств степени, в которых фиксирован показатель (например, свойство $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ следует из свойства степени $(ab)^n = a^n b^n$), то можно ожидать, что из свойств степеней, в которых фиксировано основание, будут следовать свойства логарифмов.

В традиционных курсах алгебры школьникам сначала предлагают готовые формулировки свойств логарифмов, и лишь потом знакомят с их доказательствами. Эти доказательства школьники не в состоянии восстановить в случае необходимости. Особую трудность для воспроизведения представляет вывод формулы перехода к другому основанию логарифма, поскольку он содержит искусственный прием (см., например, учебник [1, с. 225]). Конечно, свойства логарифмов доказываются с помощью определения логарифма, но как догадаться до формулировок свойств?

Само словесное определение логарифма с неизвестно откуда взятыми ограничениями также трудно для восприятия и применения. Понятие логарифма естественным образом возникает из проблемы решения конкретного уравнения, например, $2^x = 3$. Используя график показательной функции, школьники приходят к выводу, что данное уравнение имеет корень, причем единственный (рис. 1). Только тогда им сообщается, что это число в математике принято обозначать через $log_2 3$. Обобщение графического способа решения простейшего показательного уравнения, приводит к выводу: уравнение $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$ имеет решение только при $b > 0$. После этого учащиеся естественным образом приходят к такой формулировке определения: логарифмом числа b $(b > 0)$ по основанию a $(a > 0, a \neq 1)$ назовем корень уравнения $a^x = b$ и будем обозначать его через $log_a b$. Из определения логарифма как корня уравнения естественным образом следует основное логарифмическое тождество: $a^{log_a b} = b$. Это равенство как раз нуждается в словесной формулировке, выражающей его основное предназначение: всякое положительное число может быть представлено в виде степени с наперед заданным основанием, большим нуля и отличным от единицы:

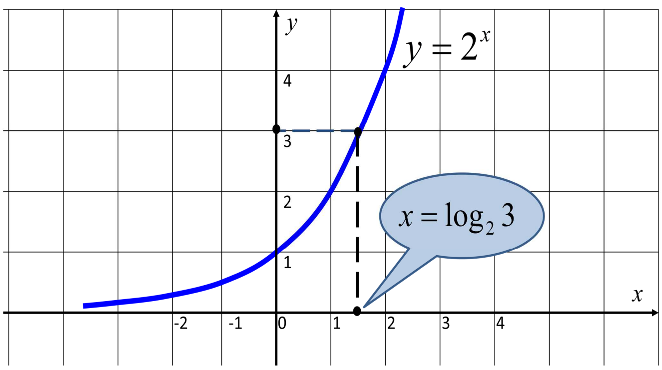

Рис. 1. Графическое решение уравнения $2^x = 3$

$$b = a^{log_a b} \ (b > 0, a > 0, a \neq 1).$$

Для «переоткрытия» свойств логарифмов предложим школьникам исходить из основного логарифмического тождества и свойств степеней с фиксированным основанием. Что, например, следует из свойства степени: $a^x a^y = a^{x+y}$? Это равенство верно для любых действительных чисел x и y. Подберем такие числа, чтобы можно было воспользоваться основным логарифмическим тождеством. Пусть $x = log_a b$, $y = log_a$c, где b и c – произвольные положительные числа:

$$a^{log_a b} a^{log_a c} = a^{log_a b + log_a c}.$$

Воспользуемся основным логарифмическим тождеством для преобразования левой части этого равенства: $bc = a^{log_a b + log_a c}$. Представив число bc в виде степени с основанием a, получим: $a^{log_a bc} = a^{log_a b + log_a c}$. В силу монотонности показательной функции:

$$log_a bc = log_a b + log_a c.$$

Запишем свойство степени $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, для показателей $log_a b$ и $log_b c$:

$$\left(a^{log_a b}\right)^{log_b c} = a^{log_a b \cdot log_b c}.$$

Воспользуемся основным логарифмическим тождеством для преобразования левой части этого равенства: $c = a^{log_a b \cdot log_b c}$. Представив число c в виде степени с основанием a: $a^{log_a c} = a^{log_a b \cdot log_b c}$, получим: $log_a c = log_a b \cdot log_b c$. Это равенство связывает логарифмы по разным основаниям, а значит, может быть использовано для перехода от одного основания к другому. Для этого и перепишем его в виде:

$$log_b c = \frac{log_a c}{log_a b}.$$

Как подвести школьников к формулировке свойства: $plog_a b = log_a b^p$? Для натурального числа $p \geq 2$ оно следует из свойства логарифмов, которое было доказано первым. Значит, для любого действительного числа p его формулировка может возникнуть в виде гипотезы. То, что это гипотеза верна, легко проверить по определению: убедиться, что число $plog_a b$ корнем уравнения $a^x = b^p$. Используя свойство возведения степени в степень и основное логарифмическое тождество, получим:

$$a^{plog_a b} = \left(a^{log_a b}\right)^p = b^p.$$

Свойство: $log_a b - log_a c = log_a \frac{b}{c}$ может быть получено как из свойства степени $a^x : a^y = a^{x-y}$, так и выведено исходя из двух уже доказанных свойств логарифмов:

$$log_a b - log_a c = log_a b + \left(-log_a c\right) = log_a b + log_a c^{-1} = log_a bc^{-1} = log_a \frac{b}{c}.$$

При таком подходе свойства логарифмов могут быть выведены школьниками с гораздо большей долей самостоятельности, чем в традиционном изложении.

Таким образом, при стремлении к ориентировкам III типа (по П. Я. Гальперину), мы приходим к принципиально иному построению содержания обучения математике. При создании соответствующих учебных материалов хороший результат обеспечивает сочетание двух методов, предложенных Н. Ф. Талызиной [9]: «теоретико-экспериментальное моделирование» и «анализ сложившихся видов деятельности» (т.е. видов деятельности профессионального математика).

Список литературы

1. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10–11 кл. сред. шк./ А. Н. Колмогоров и др. – М.: Просвещение, 1990. – 320 с.
2. Гальперин П. Я. Основные результаты исследований по проблеме «Формирование умственных действий и понятий»: Автореф. дис… д-ра психол. наук. – М., 1965. – 50 с.
3. Давыдов В. В. Теория развивающего обучения. – М.: ИНТОР, 1996. – 544 с.
4. Жан Пиаже: теория, эксперименты, дискуссии: Сб. статей / Сост. и общ. ред. Л. Ф. Обуховой и Г. В. Бурменской. – М.: Гардарики, 2001. – 624 с.
5. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, 1979. – 562 с.
6. Курош А. Г. Теория групп: Учебник. – 4-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005. – 648 с.
7. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Н. Я. Виленкин и др. – М.: Мнемозина, 2009. – 288 с.
8. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1975. – 342 с.
9. Талызина Н. Ф. Методика составления обучающих программ. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1980. – 47 с.

Рецензенты:

Розов Н. Х., доктор физико-математических наук, декан факультета педагогического образования ФГОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», г. Москва.

Смирнов С. Д., доктор психологических наук, профессор кафедры психологии образования и педагогики ФГОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», г. Москва.