УДК 519.6

ОБ ИГРОВОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОТБОРА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР

Гордеева И.В.[1], Севодин М.А.[1]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь, Россия (614990, Пермский край, г. Пермь - ГСП, Комсомольский проспект, д. 29)*

В статье рассмотрены игровые подходы к определению распределения сельскохозяйственных культур на участках земли. По сравнению с известной моделью Моглуэра, которая имеет ряд существенных недостатков, метод, предложенный в работе, позволяет более точно учитывать изменение цен на рынке. Приведен пример определения оптимального распределения трех сельскохозяйственных культур (пшеница, кукуруза, овес) по статистическим данным США для отдельного фермера и остального рынка. Для решения данной задачи в работе отдельно для рассматриваемого случая установлены некоторые известные факты теории игр. В результате решения был получен лучший результат, чем при применении модели Моглуэра. По мнению авторов, предложенная платежная функция является более выгодной, т.е. позволяет получить более высокую цену игры, а также лучше отражает реальные рыночные отношения с экономической точки зрения.

Ключевые слова: игра, сельскохозяйственная культура, функция выигрыша, оптимальная чистая стратегия.

THE GAME APPROACH TO SOLVING THE PROBLEM FOR AGRICULTURAL CROP SELECTION

Gordeeva I.V.[1], Sevodin M.A.[1]

[1]*Federal State Budgeted Education Institution for Higher Professional Education Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia (RF, Perm, Komsomolsky Av. 29, 614990)*

In this paper the game approaches will be considered for the determination of acreage allocation among crops. Compared with the known model by Moglewer, which has a number of disadvantages, the method suggested in this paper, can more accurately account for the change in prices in the market. An example of determining the optimal allocation of the three agricultural crops (wheat, corn and oats) on the statistics of United States for the individual farmer and the market. To solve this problem, we separately set for the case some well-known facts of the theory of games. The solution was to get a better result than the application of the model by Moglewer. According to the authors, the proposed payoff function is more profitable, that is, allows you to get a higher value of the game, as well as better to reflect the real market relations from the economic point of view.

Key words: game, agricultural crop, payoff function, optimal pure strategy.

Введение. Решение задачи отбора сельскохозяйственных культур с помощью игровой модели было предложено в работах [1; 2; 6]. В статье [6] взаимодействие индивидуального фермера и гипотетической комбинации сил, определяющих рыночные цены, описано с помощью игры между двумя лицами с нулевой суммой. Рассмотренный там пример показал хорошую корреляцию фактического распределения культур на земле и игрового теоретического оптимального распределения. В то же время модель из [6] имеет ряд недостатков. Некоторые из них указаны непосредственно в работе [6], некоторые имеют более скрытый характер. К последним необходимо отнести характер предполагаемой в [6] платежной функции. Дело в том, что эта платежная функция основана на кривых эластичности спроса, в которых зависимость между объемом продукции и ценой является не совсем естественной. Неестественность, с нашей точки зрения, проявляется в скачкообразном поведении цены на продукцию при изменении объемов продукции, когда объемы имеют критический характер. Прежде всего, это относится к малым объемам. Но в условиях рынка цена на товары устанавливается спонтанно и свободно в результате совершения сделок множеством лиц с той и другой стороны (продавец - покупатель) и имеет равновесный устойчивый характер, несмотря на изменчивые условия формирования рыночной цены. Здесь можно сделать предположение, что при перенасыщении, или, наоборот, недонасыщении (дефиците) рынка товарами продавцы занимают выжидательную позицию и не спешат изменять цену товаров, так как и снижения, и повышения цены на товары могут привести к снижению выгоды, к невозможности покрыть издержки и даже, в крайнем случае, к банкротству. В конечном итоге продавцам придется привести цены в соответствие с насыщенностью рынка, но в первое время наступления такой ситуации продавцы не меняют цены. Здесь сказываются надежды на кратковременность сложившейся ситуации, повышение уровня доходов покупателей, ускорение реализации товаров. Продавцы в такой момент могут некоторое время заниматься поиском достоверной информации о длительности такого состояния рынка, использовать имеющиеся резервы или, наоборот, резервировать часть товаров, чтобы оживить спрос. Лишь только при отсутствии положительных сдвигов на рынке продавцы начинают обвальное снижение цен, стремясь вернуть себе часть средств и избежать банкротства.

Приведенные соображения говорят о необходимости изменения платежной функции из [6], что и является целью настоящей работы. Основные трудности, которые придется преодолеть на этом пути - это потеря выпуклости платежной функции. В связи с этим в работе отдельно для рассматриваемого случая установлены некоторые известные факты теории игр, необходимые для решения поставленной задачи.

Постановка задачи. Воспользуемся положениями из [6]. Будем считать, что на рынке цена произведенного однотипного продукта является функцией от его количества, т.е.

$$p_i = f_i(g_i), \quad (1)$$

где через p_i обозначим цену единицы веса зерна типа i, а через g_i - общее количество зерна i - го типа на рынке.

Будем также полагать, что хозяйства достаточно малы. Вследствие этого, не слишком огрубляя модель, можно принять, что

$$g_i = \overline{Y}_i \xi_i T, \quad (2)$$

где $\overline{Y}_i$ - средняя урожайность зерна i-го типа, T - общая площадь полей всех производителей, а ξ_i - доля этой площади, на которой посеяно зерно i-го типа.

Пусть арендатор земли площади L может посеять m типов зерна. Обозначив через Y_i - урожайность зерна типа i, а через η_i - долю площади, засеянную этим зерном, выразим цену полученного арендатором продукта формулой

$$H = \sum_{i=1}^{m} Y_i \eta_i L p_i \ . \quad (3)$$

Тогда, подставляя формулы (1) и (2) в выражение (3), получим

$$H = \sum_{i=1}^{m} Y_i L \eta_i \, f_i \left(\overline{Y}_i \xi_i T \right). \quad (4)$$

Обозначив через игрока I - рынок, а через игрока II отдельно арендатора, мы приходим к антагонистической игре, в которой стратегиями игрока I будут векторы $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m), \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1$; стратегиями игрока II - векторы $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m), \eta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \eta_i = 1$; функция выигрыша задается формулой (4).

Очевидно, что чем больше произведено зерна, тем меньше его рыночная цена. Будем считать, что каждая из функций f_i имеет вид $f_i = \beta_i e^{-(\alpha_i g_i)^2}$; коэффициенты α_i и β_i найдем статистическим методом, используя регрессионные модели. Заметим, что по сравнению с [6] здесь зависимость цены от доли засеваемой площади выбрана так, что при малых долях цена равна ненулевому конечному числу, что больше соответствует реальности (в [6] при стремлении площади к нулю цена неограниченно возрастает).

После подстановки выражения для f_i в формулу (4), получим

$$H = \sum_{i=1}^{m} Y_i L \eta_i \beta_i e^{-(\alpha_i \overline{Y}_i \xi_i T)^2} \ . \quad (5)$$

В этом случае функция выигрыша (5) является линейной по стратегии игрока II и не является выпуклой относительно стратегии игрока I. Следовательно, использовать результаты, полученные для выпуклых игр [3-5], нельзя. В следующем пункте работы получим некоторые факты, необходимые для построения решения в нашем случае.

Решение задачи. Рассмотрим непрерывные антагонистические игры [1-4], т.е. системы вида

$$\Gamma = \langle X, Y, H \rangle,$$

где X, Y множества стратегий игроков I и II, а $H : X \times Y \to R$ - непрерывная функция выигрыша игрока I (проигрыша игрока II), вычисляемая по (5). Как обычно, смешанными стратегиями игроков в Γ считаются вероятностные распределения на множествах их чистых стратегий X и Y, которые являются стохастически независимыми. Множество всех смешанных стратегий игроков мы обозначим через D_X, D_Y соответственно.

Пусть F и G смешанные стратегии соответственно игроков I и II в игре Γ. Выигрыш $H(F,G)$ представляет собой выражение

$$H(F,G)=\int_X\int_Y H(x,y)\,dF(x)\,dG(y),$$

причем интегралы в этих равенствах понимаются в смысле Стилтьеса.

Для оптимальных смешанных стратегий F^*, $F^*\in D_X$, и G^*, $G^*\in D_Y$, с любыми смешанными стратегиями F и G соответственно игроков I и II должны выполняться неравенства

$$H\left(F,G^*\right)\le H\left(F^*,G^*\right)\le H\left(F^*,G\right). \quad (6)$$

Известно [1; 3; 4], что решение приведенной игры существует при достаточно общих предположениях относительно множеств X, Y и функций H. Будем строить решение по схеме поиска оптимальных стратегий для выпуклой платежной функции [4], [5]. Принципиальным моментом на этом пути является наличие чистой стратегии x^* первого игрока (для второго игрока это очевидно), что мы сейчас и установим.

Заметим, что если определенная на множестве M достаточно гладкая функция $z=\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ достигает своего наибольшего значения в точке $\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$ из внутренности M, то очевидно существует максимальный n-мерный куб $K=\{(x_1,x_2,...,x_n)\in M, a_1\le x_1\le b_1, a_2\le x_2\le b_2,...,a_n\le x_n\le b_n\}$, лежащий в M с центром в точке $\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$, такой, что функция $z=\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ является вогнутой в K. Этот n-мерный куб будем называть кубом вогнутости функции φ. Итак, куб вогнутости K всегда для названной функции не пуст. В вырожденном случае считаем $K=\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$. В случае, если точка $\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$ находится на границе множества M, то куб K с названными выше свойствами и вершиной в токе оптимальности также будем называть кубом вогнутости функции φ. Имеет место следующая теорема.

Теорема. В игре $\Gamma=\langle X,Y,H\rangle$ с платежной функцией из (5) игрок I имеет чистую оптимальную стратегию.

Доказательство. Рассмотрим игру Γ с функцией выигрыша $H(x,y)$, где $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ и $x\in X$, $y\in Y$.

Пусть υ_Γ - цена игры Γ, F^* - одна из оптимальных стратегий игрока I, а G^* - игрока II.

Обозначим через

$$x^{*} = \left(x_1^{*}, x_2^{*}, \dots, x_n^{*}\right) = \int_Y x dF^{*}(x).$$

Очевидно, что начало координат является максимальной для функции H точкой. Пусть K - куб вогнутости с вершиной в этой точке, находящийся в неотрицательном ортанте. Покажем, что $x^{*} \in K$. Для этого достаточно установить, что

$$F^{*}(x) = 0,\; x \in X \setminus K. \quad (7)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_Y H(x, y) dG^{*}(y),\; x \in X.$$

Эта функция является непрерывной на X и в силу характера платежной функции принимает свое наибольшее значение только в каких-то точках множества K. Поэтому вне K для достаточно малого положительного ε можно считать выполненным неравенство $\varphi(y) \le \lambda - \varepsilon$, где $\lambda = \sup_{x \in X} \varphi(x)$.

Отсюда следует, что

$$\int_X \varphi(x) dF^{*}(x) \le \int_{X \setminus K} (\lambda - \varepsilon) dF^{*}(x) + \int_K \lambda dF^{*}(x) = \lambda - \varepsilon \int_{X \setminus K} dF^{*}(x) = \lambda - \varepsilon\left(1 - \Phi(\varepsilon)\right),$$

где $\Phi(\varepsilon) = \int_K dF^{*}(x)$.

Как известно [1], $\upsilon_{\Gamma} = \lambda$, и, следовательно, $\lambda \le \lambda - \varepsilon\left(1 - \Phi(\varepsilon)\right)$.

Поскольку здесь $\varepsilon > 0$, то выражение $1 - \Phi(\varepsilon)$ не может быть положительным. С другой стороны, в силу вероятностного смысла оно не может быть отрицательным. Таким образом, имеет место равенство $\Phi(\varepsilon) = 1$, которое из-за произвольности ε доказывает справедливость (7). Итак, $x^{*} \in K$ и, более того,

$$x^{*} = \int_K x dF^{*}(x). \quad (8)$$

Отсюда следует, что

$$H\left(x^{*}, y\right) = H\left(\int_K x dF^{*}(x), y\right) \ge \int_K H(x, y) dF^{*}(x) = H\left(x, G^{*}(y)\right) \ge H\left(F^{*}, G^{*}\right) = \upsilon_{\Gamma}$$

для любого $y \in Y$.

Следовательно [1], x^{*} является оптимальной стратегией игрока I. Теорема доказана.

Итак, каждый из игроков имеет оптимальные чистые стратегии.

Пример. Решим эту задачу для случая $m = 3$. Найдем оптимальные стратегии игрока I (рынка) и игрока II (арендатора), используя данные по производству кукурузы, пшеницы и овса в США на площади $T = 182\,635\,000$ акров за 1958 год [6], которые приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Статистические данные о сельскохозяйственных культурах

Вид зерна	Кукуруза	Пшеница	Овес
Показатели	1	2	3
$Y_i = \overline{Y}_i$ $(бушели / акр)$	51,7	27,3	44,7
α_i	$2{,}54 \cdot 10^{-10}$	$2{,}53 \cdot 10^{-10}$	$3{,}82 \cdot 10^{-10}$
β_i	2,74	2,15	0,90

После подстановки величин $T, Y_i, \overline{Y}_i, \alpha_i, \beta_i$ в формулу (5) получим

$$H = 141{,}69 L \eta_1 e^{-5{,}75\xi_1^2} + 58{,}70 L \eta_2 e^{-1{,}59\xi_2^2} + 40{,}23 L \eta_3 e^{-9{,}72\xi_3^2}. \quad (9)$$

Тогда

$$\upsilon = \max_x \min_y [141{,}69 L \eta_1 e^{-5{,}75\xi_1^2} + 58{,}70 L \eta_2 e^{-1{,}59\xi_2^2} + 40{,}23 L \eta_3 e^{-9{,}72\xi_3^2}].$$

Отсюда численным методом, используя программную среду Delphi 7.0, находим вектор $x^* = (0{,}47; 0{,}49; 0{,}04)$ и цену игры $\upsilon = 39{,}61$ долларов на акр.

Для вычисления оптимальных стратегий II игрока найдем частные производные функции

$$H = \sum_{i=1}^{3} Y_i L \eta_i \beta_i e^{-(\alpha_i \overline{Y}_i \xi_i T)^2}$$

по аргументам $\xi_i \ (i = 1, 2, 3)$, принимая во внимание, что $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ и $Y_i = \overline{Y}_i$, а затем приравняем их к нулю. В результате придем к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \xi_1}\Big|_{(x,y)} = -2Y_1 L \beta_1 \left(\alpha_1 \overline{Y}_1 T\right)^2 \eta_1 \xi_1 e^{-\left(\alpha_1 \overline{Y}_1 T \xi_1\right)^2} + 2Y_3 L \beta_3 \left(\alpha_3 \overline{Y}_3 T\right)^2 \eta_3 (1 - \xi_1 - \xi_2) e^{-\left(\alpha_3 \overline{Y}_3 T (1 - \xi_1 - \xi_2)\right)^2} = 0, \\ \dfrac{\partial H}{\partial \xi_2}\Big|_{(x,y)} = -2Y_2 L \beta_2 \left(\alpha_2 \overline{Y}_2 T\right)^2 \eta_2 \xi_2 e^{-\left(\alpha_2 \overline{Y}_2 T \xi_2\right)^2} + 2Y_3 L \beta_3 \left(\alpha_3 \overline{Y}_3 T\right)^2 \eta_3 (1 - \xi_1 - \xi_2) e^{-\left(\alpha_3 \overline{Y}_3 T (1 - \xi_1 - \xi_2)\right)^2} = 0, \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1. \end{cases}$$

решением которой будет вектор $y^* = (0{,}19; 0{,}69; 0{,}12)$.

Решим теперь задачу в предположении, что каждая из функций (1) имеет вид: $f_i = \alpha_i g_i^{-\varepsilon_i}$ (именно в таком виде обычно берутся функции f_i [6]). Функция выигрыша

$$H = \sum_{i=1}^{m} Y_i L \xi_i \alpha_i \left(\overline{Y}_i T \eta_i\right)^{-\varepsilon_i} \quad (10)$$

является линейной по стратегии игрока I и выпуклой относительно стратегии игрока II.

Решив задачу для наших данных, получим цену игры $\upsilon = 20{,}33$ долларов на акр.

Выводы. Использование функции выигрыша в виде (5) в известной задаче о рациональной схеме посевов различных сельскохозяйственных культур приводит к лучшим результатам, чем применение выпуклой функции выигрыша. С экономической точки зрения такая функция лучше отражает реальные рыночные отношения и, самое главное, является более выгодной, т.е. позволяет получить более высокую цену игры.

Список литературы

1. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. - М. : Наука, 1985. - 272 с.

2. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр / Г. Н. Дюбин, В.Г. Суздаль. - М. : Наука, 1981. - 336 с.

3. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. - М. : Мир, 1963. - 839 с.

4. Мак-Кинси Д. Введение в теорию игр. - М. : Физматгиз, 1960. – 420 с.

5. Bohnenblust H.F., Karlin S., Shapley L.S. Games with Continuous, Convex Pay-off, Contributions to the Theory of Games, ed. H.W. Kuhn, A.W. Tucker // Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, N. J. - 1950. - № 24. - P. 181-192.

6. Moglewer S. A Game theory model for agricultural crop selection // Econometrica. - 1962. - Vol. 30., № 2. - P. 253-266.

Рецензенты:

Долгова Елена Владимировна, доктор экономических наук, профессор кафедры «Информационные технологии и автоматизированные системы» Пермского национального исследовательского университета, г. Пермь.

Елохова Ирина Владимировна, доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой «Управление финансами» Пермского национального исследовательского университета, г. Пермь.