УДК 372.851

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ

Нахман А. Д.

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Советская, 106, e-mail:alextmb@mail.ru

Излагаются технологические приемы решения вероятностных задач на основе использования логических операций над высказываниями и свойств этих операций. В контексте реализации внутрипредметных связей речь идет об алгебре высказываний и алгебре событий как двух различных интерпретациях булевых алгебр. Одним из предлагаемых приемов является интерпретация операций над событиями средствами таблиц истинности, которая основана на взаимно-однозначном соответствии между сложением (умножением) событий и дизъюнкцией (конъюнкцией) соответствующих высказываний. Предлагаются, далее, приемы нахождения вероятностей «составных событий», позволяющие: 1) классифицировать задачи на основе определенных признаков; 2) алгоритмизировать их решение; 3) расширить перечень формул для действия в рамках определенных вероятностных схем. В качестве отдельной вероятностной схемы выделяется схема альтернатив («или и *A* и *B*, или не *A* и *C*») и предлагается соответствующее равенство, включающее в себя как формулу полной вероятности для двух гипотез, так и формулу вычисления вероятности наступления только одного из двух независимых событий *A* и *B*. Результаты работы могут быть использованы педагогами на этапе обобщающего повторения курса математики, который в наибольшей степени отвечает цели расширения, обобщения, систематизации и углубления знаний, установления тех связей и отношений между элементами знаний, что не были раскрыты ранее. В значительной степени этому способствуют предложенные образцы решений некоторых задач из открытого банка контрольно-измерительных материалов единого государственного экзамена по математике.

Ключевые слова: технологические приемы, логические операции, вероятность «составного» события, схема альтернатив.

TECHNOLOGICAL PROCESSING METHODS OF SOLVING PROBABILITY PROBLEMS

Nakhman A. D.

Tambov State Technical University, Tambov, Sovetskaya, 106, e-mail:alextmb@mail.ru

The technological processing methods of solving probability problems through the use of logical operations on propositions and properties of these operations are stated. In the context about implementing inter-subject relations we are talking about propositional algebra and algebra of events as the two different interpretations of Boolean algebra.One of the proposed methods consists of interpretation operations of events by means of truth tables, which is based on a one-to-one correspondence between the addition (multiplication) of events and disjunction (conjunction) of the corresponding propositions. Methods of finding of probability of "compound events" are proposed further: 1) The classification of problems based on specific symptoms; 2) The algorithmization of their decision; 3) The expansion of the list of formulas for the action within certain probable schemes. As a separate probabilistic scheme the diagram of alternatives ("or both *A* and *B* or not *A* and *C*") is allocated and the corresponding equation including as a total probability formula for two hypotheses and the formula for calculation of probability of occurrence of only one of the two independent events *A* and *B* is proposed. The results of the work can be used by teachers on the stage of generalizing repetition of the mathematics course that best suits the purpose of expanding, generalizing, organizing and advancing of knowledge, the establishment of the connections and relationships between the elements of knowledge that have not been previously disclosed. Offered samples of solutions of some problems from open bank of control - measuring materials of Unified State Exam in the mathematics contribute this to a great extent.

Key words: technological processing methods, logical operations, probability of "compound events", diagram of alternatives.

Введение. Стохастическая содержательно-методическая линия, сравнительно недавно введенная в школьный курс математики, занимает в нем особо важное место, так как, с одной стороны, является неотъемлемой составляющей «реальной» математики, а с другой – обладает уникальным потенциалом для реализации объективно существующих внутрипредметных связей [3, гл.1, п.9, с. 53-56]. В свою очередь, реализация таких связей способствует формированию у учащихся целостного представления о математике как науке, «переносу» знаний и умений из одного раздела изучаемой дисциплины в другой, порождает возможности использования математических методов и алгоритмов в новых условиях [5].

С этой точки зрения, наиболее плодотворным здесь является этап обобщающего повторения и, в частности, подготовки к ЕГЭ, который в наибольшей степени отвечает цели расширения, обобщения, систематизации и углубления знаний, установления тех связей и отношений между элементами знаний, которые не были раскрыты ранее.

Целью настоящей работы является изложение технологических приемов решения вероятностных задач на основе использования логических операций над высказываниями и свойств этих операций, а идейная основа приемов заложена в общности свойств функции истинности и вероятности (определенных на соответствующих булевых алгебрах). Предлагаемые приемы мы относим к технологическим, поскольку они обладают такими признаками технологий обучения, как целенаправленность, планируемость и проектируемость, научная обоснованность, воспроизводимость и гарантированность результата; они (приемы) позволяют, в частности,

1) классифицировать задачи на основе определенных признаков;

2) алгоритмизировать их решение;

3) предложить формулы для действия в рамках определенных вероятностных схем.

1. Действия над событиями и логические операции. Стохастический материал интегрирует в себе три следующих блока содержания (раздела курса математики): «Элементы комбинаторики», «Элементы теории вероятностей», «Введение в математическую статистику». Следовательно, уже сам по себе этот материал предполагает наличие внутрипредметных связей. Центральным и образующим основные связи в содержании стохастического материала является понятие вероятности. Речь идет о количественном выражении степени объективной возможности наступления того или иного случайного события. Вероятность как функция, определяемая на алгебре событий, в учебных задачах представлена тремя следующими моделями: классическая вероятность, относительная частота события (статистическая вероятность) и геометрическая вероятность. Общей для этих моделей является постановка задачи о нахождении вероятности «составного» события, в том случае, когда известны (или могут быть найдены) вероятности взаимодействующих событий – «компонентов».

Обсуждаемые внутрипредметные связи и предлагаемые нами технологические приемы базируются на следующих теоретических положениях [1], относящихся к алгебрам Буля.

1.1. Алгебра событий, алгебра высказываний и алгебра всех подмножеств данного множества являются примерами булевых алгебр с одной унарной и двумя бинарными операциями (представленными ниже в таблице соответствия п. 2) .

1.2. Выделенные в булевых алгебрах элементы **0** и **1** могут быть интерпретированы в алгебре событий как, соответственно, события достоверное E и невозможное $\varnothing$, а в алгебре высказываний – как тождественная истина E и тождественная ложь $\varnothing$.

1.3. Бинарные операции над элементами в каждой из указанных алгебр подчинены ряду свойств (аксиом), среди которых присутствуют свойства коммутативности, ассоциативности, а также дистрибутивности каждой из бинарных операций по отношению к другой.

1.4. На булевой алгебре может быть определено отображение в промежуток [0,1], которое, в частности, на множестве всех высказываний есть функция истинности

$$\lambda = \lambda(A) = \begin{cases} 1, \text{ } если \ \ высказывание \ \ A истинно, \\ 0, \ \ если \ высказывание \ \ A \ ложно, \end{cases}$$

а на множестве событий есть вероятность P.

1.5. Операции умножения событий $A \cdot B$ и конъюнкция высказываний $A \wedge B$ имеют один и тот же словесный аналог «*и A, и B*» (наступление *и* события *A и* события *B* – истинность *и* высказывания *A и* высказывания *B*).

1.6. Операция сложения событий $A+B$ и дизъюнкция высказываний $A \vee B$ имеют один и тот же словесный аналог «*хотя бы одно из A и B*» («*или A, или B, или и A, и B*» – истинность *или* высказывания *A или* высказывания *B или* их обоих).

Мы считаем полезным выделить случай сложения несовместных событий и в этом случае использовать термин «альтернативная сумма» и применять обозначение $A \Delta B$ (совпадающее с обозначением альтернативной дизьюнкции в алгебре высказываний). Альтернативная сумма и альтернативная дизъюнкция событий и высказываний, соответственно, обладают одним и тем же словесным аналогом «*или A, или B*».

1.7. «*Не A*» служит одновременно словесным аналогом как операции перехода к событию $\bar{A}$, противоположному *A*, так и операции отрицания высказывания *A*.

2. Технологические приемы. В следующей технологической таблице представлены связи между тремя интерпретациями булевых алгебр (см. п. 1.1), а также между функцией истинности высказывания *A* (состоящего в том, что событие *A* наступает) и вероятностью события *A*.

Таблица соответствия операций в булевых алгебрах

	Операция над событиями	***Логический аналог***	***Теоретико-множественный аналог***	***Функция истинности высказывания***	***Вероятность события***
1	Переход к противоположному событию $\overline{A}$	Отрицание $\overline{A}$ высказывания A	Дополнение ко множеству A	$\lambda(\bar{A}) = 1 - \lambda(A)$	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2	Произведение событий $A \cdot B$	$A \wedge B$	Пересечение множеств A и B	$\lambda(A \wedge B) =$ $= \lambda(A) \cdot \lambda(B)$	$P(A \cdot B) =$ $= P(A) \cdot P_A(B)$, где $P_A(B)$ есть условная вероятность события B
3	Сумма событий $A+B$	$A \vee B$	Объединение множеств A и B	$\lambda(A \vee B) =$ $= \lambda(A) + \lambda(B) -$ $- \lambda(AB)$	$P(A+B) =$ $= P(A) + P(B) -$ $- P(AB)$; в частности, $P(A \Delta B) =$ $= P(A) + P(B)$

Термином «технологическая таблица» мы подчеркиваем, что представленная в ней информация может быть напрямую использована для реализации следующих технологических приемов:

1) интерпретации действий над событиями диаграммами Вьена;

2) формализации доказательств свойств этих действий с помощью таблиц истинности, построенных для соответствующих «составных» высказываний (см. пп. 1.1–1.7);

3) выбора формулы для вычисления вероятности «составного» события в случае, когда известны вероятности событий-«компонентов».

Следующий пример демонстрирует, как может быть применен второй из указанных приемов (см. также [2]).

Доказать, что событие, противоположное наступлению хотя бы одного из данных событий, равносильно ненаступлению обоих данных событий.

В формализованном виде имеем так называемый закон де Моргана

$$\overline{A_1 + A_2} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}, \qquad (2.1)$$

и теперь достаточно установить соотношение $\lambda(\overline{A_1 \vee A_2}) = \lambda(\overline{A_1} \wedge \overline{A_2})$, в справедливости которого убеждаемся, сравнив пятый и седьмой столбцы следующей таблицы истинности ($i, j = 0{,}1$).

Таблица истинности

$\lambda(A_1)$	$\lambda(A_2)$	$\lambda(\overline{A_1})$	$\lambda(\overline{A_2})$	$\lambda(\overline{A_1} \wedge \overline{A_2})$	$\lambda(A_1 \vee A_2)$	$\lambda(\overline{A_1 \vee A_2})$
i	j	$1-i$	$1-j$	$(1-i)(1-j)$	$i+j-ij$	$1-i-j+ij$

Из сотношения (2.1), в свою очередь, вытекает следующая формула для вычисления вероятности наступления хотя бы одного из данных совместных событий:

$$P(A_1 + A_2) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}). \qquad (2.2)$$

3. Схема альтернатив. Решение многих задач основано на следующей альтернативе, к которой часто сводятся составные события: «или и A и B, или не A и C», которую мы выделяем как отдельную вероятностную схему и называем схемой альтернатив. События, укладывающиеся в эту схему, могут быть представлены в виде $D = A \cdot B \Delta \bar{A} \cdot C$. Следовательно,

$$P(D) = p \cdot p_1 + q \cdot p_2, \qquad (3.1)$$

где $p = p(A)$, $q = 1 - p$; при этом вероятности p_1 и p_2 событий B и C, соответственно, могут быть как «безусловными», так и условными: $p_1 = p_A(B)$, $p_2 = p_{\bar{A}}(C)$. Формула альтернатив (3.1) включает в себя формулу полной вероятности для двух гипотез

$$P(D) = P(A) \cdot P_A(D) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(D) \qquad (3.2)$$

и формулу вычисления вероятности наступления только одного из двух независимых событий A и B

$$P(A \cdot \bar{B} \Delta \bar{A} \cdot B) = p \cdot q^* + q \cdot p^*, \text{ где } p^* = p(B),\ q^* = 1 - p^*. \qquad (3.3)$$

4. Алгоритм. В качестве одного из технологических приемов теперь может быть предложен следующий пошаговый алгоритм (технологическая карта) решения задач на нахождение вероятности составного события.

Шаг 1. Ввести в рассмотрение (и обозначить) событие, вероятность которого требуется определить.

Шаг 2. Выразить это события через более простые с помощью словесных аналогов соответствующих логических операций (см. п. 1, 1.5–1.7).

Шаг 3. Ввести в рассмотрение (и обозначить) события-компоненты, которые «задействованы» в операциях на шаге 2.

Шаг 4. Записать выражение составного события через введенные события-компоненты с помощью операций отрицания (перехода к противоположному событию), сложения, умножения событий (формализация результата, полученного на шаге 2) .

Шаг 5. Применить соответствующую формулу; см. правый столбец таблицы соответствия п. 2, или формулы альтернатив (3.1) – (3.3).

Шаг 6. Произвести вычисления.

Замечание. В процессе решения конкретных задач иногда отдельные шаги удобно поменять местами.

5. Примеры. Рассмотрим использование вышеприведенных технологических приемов на примерах, аналогичных заданиям п. В 10 открытого банка задач ЕГЭ по математике [4].

Пример 1. Вероятность того, что завтра на маршрут выйдут не больше 20 автобусов, равна 0,25, а вероятность того, что автобусов будет меньше 15, равна 0,1. Какова вероятность, что на маршрут выйдут от 15 до 20 автобусов.

Вводимые в рассмотрение события (шаги 1 и 3 алгоритма): A – автобусов от15 до 20 (его вероятность подлежит отысканию) и «сопутствующие» события: B – автобусов не более 20, C – меньше 15 автобусов на маршруте. В соответствии со вторым шагом алгоритма, событие B состоит в наступлении или A, или C, т.е. (шаг 4) $B = A\Delta C$. Следовательно (шаги 5 и 6), $P(B) = P(A) + P(C)$ или $0{,}25 = P(A) + 0{,}1$, откуда $P(A) = 0{,}15$.

Пример 2. Двор дома освещается фонарём с двумя лампами, параллельно соединенными. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,1. Найдите вероятность того, что 1) в течение года фонарь будет освещать двор; 2) к концу года в фонаре будет гореть только одна лампа.

Для ответа на первый вопрос воспользуемся алгоритмом п. 4.

Шаг 1. Событие A – фонарь будет освещать двор.

Шаг 2. Событие A равносильно исправности хотя бы одной из ламп (или первой, или второй, или обоих).

Шаг 3. Вводим события A_1 и A_2 – исправность первой и второй ламп, соответственно.

Шаг 4. В соответствии с шагом 2 и 1.7 представляем событие A в виде $A = A_1 + A_2$.

Шаг 5. Выбираем для расчетов формулу (2.2): $P(A_1 + A_2) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2})$ (случай совместных независимых событий).

Шаг 6. $P(A) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}99$.

Второй вопрос задачи предполагает использование схемы альтернатив: событие B, состоящее в исправности только одной из ламп, представимо в виде «или A_1 и не A_2 или не A_1 и A_2». Имеем, по условию, $q = p(\overline{A_1}) = 0{,}1$, $q^* = p(\overline{A_2}) = 0{,}1$, $p = p^* = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

В соответствии с (3.3) получаем $P(B) = p \cdot q^* + q \cdot p^* = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}18.$

Пример 3. Компьютерной диагностике подвергается группа участников диспансеризации, среди которых 10 % страдают некоторыми заболеваниями. В результате диагностики болезнь выявляется с вероятностью 0,95, и с вероятностью равной 0,03 здоровый участник признается больным. Какова вероятность, что произвольно выбранного протестированного участника компьютер признает заболевшим?

Решение. Если событие D состоит в том, что протестированный участник признан больным, то (шаги 1–4 алгоритма п. 4) наступление D означает, что больным признан либо здоровый (событие A) , либо больной (событие $\overline{A}$) член группы: «или A и D , или не A и D». Следовательно (шаг 5), имеем формулу альтернатив в виде (3.2). В нашем случае $P(A) = 0{,}9,\ \ P(\overline{A}) = 0{,}1,\ \ P_A(D) = 0{,}03,\ \ P_{\overline{A}}(D) = 0{,}95$, и $P(D) = 0{,}9 \cdot 0{,}03 + 0{,}1 \cdot 0{,}95 = 0{,}122$.

Выводы. Предлагаемые новые технологические приемы решения вероятностных задач основаны на использовании логических операций над высказываниями, позволяющих «опознать» стандартную вероятностную схему (вероятность суммы, произведения, схема «альтернатив») и выбрать соответствующую формулу для вычисления вероятности.

Результаты работы могут быть использованы педагогами на этапе обобщающего повторения курса математики и, в частности, в процессе подготовки к ЕГЭ.

Список литературы

1. Нахман А. Д. Булевы алгебры как основа для изучения математической логики, теории множеств, теории вероятностей // Вестник ТГТУ. – 2005. – Т.11. – №1Б. – С.246-253.
2. Нахман А. Д. Задачи на вычисление вероятности события // Математика в школе. – 2011. – N 1. – С. 34-41.
3. Нахман А. Д. Инновационные содержательно-методические линии курса математики: монография. – Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации», 2012. – 112 с.
4. Открытый банк заданий по математике. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mathege.ru (дата обращения: 23.06.2013).
5. Терехова Л. А. Элементы стохастики как средство усиления внутрипредметных связей школьного курса математики // Вестник Тамбовского университета. Серия: Гуманитарные науки. – 2008. – Вып. 5(61). – С. 347-350.

Рецензенты:

Богословский Андрей Витальевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов.

Куликов Геннадий Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и механика» ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов.