

## НАХОЖДЕНИЕ ВЫСШИХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МОДЕЛИ С ФУНКЦИЕЙ ХЭВИСАЙДА

Хромых А. А.<sup>1</sup>, Чубырь Н. О.<sup>2</sup>, Коваленко А. В.<sup>3</sup>, Уртенев М. Х.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ФГКОУ ВПО «Краснодарский университет МВД России», Краснодар, Россия (350005 г. Краснодар, ул. Ярославская, 128)

<sup>2</sup>ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», Краснодар, Россия (350072, г. Краснодар, ул. Московская, д. 2)

<sup>3</sup>ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет», Краснодар, Россия (350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149)

В работе предлагается асимптотическое решение краевой задачи, моделирующей перенос ионов соли в камере обессоливания электродиализного аппарата. Для этого область камеры обессоливания разбивается на две подобласти: область электронейтральности и область пространственного заряда, в каждой из которых асимптотическое разложение имеет свой вид. Особенность предлагаемого асимптотического решения является то, что в области пространственного заряда для однозначной разрешимости текущего приближения используется условие разрешимости следующего приближения. Для численной реализации предлагаемого асимптотического решения формулируется дифференциальный оператор, который в области электронейтральности является эллиптическим, а в области пространственного заряда параболическим. Для дискретизации используются явная и неявная разностные схемы. Приведен пример численного решения.

Ключевые слова: «жесткие» задачи, математическое моделирование, асимптотические методы, численные методы, бинарный электролит, система уравнений Нернста – Планка – Пуассона, функция Хэвисайда, область электронейтральности, область пространственного заряда.

## FINDING OF THE HIGHEST ASYMPTOTIC DECOMPOSITION OF THE REGIONAL PROBLEM OF MODEL WITH THE HEVISAYDA FUNCTION

Khromykh A. A.<sup>1</sup>, Chubyr N. O.<sup>2</sup>, Kovalenko A. V.<sup>3</sup>, Urtenov M. K.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>FGKOU VPO "Ministry of Internal Affairs Krasnodar University of Russia", Krasnodar, Russia (350005, Krasnodar, Yaroslavskaya St., 128)

<sup>2</sup>FGBOU VPO "Kuban State Technological University", Krasnodar, Russia (350072, Krasnodar, Moskovskaya St., 2)

<sup>3</sup>FGBOU VPO "Kuban State University", Krasnodar, Russia (350040, Krasnodar, Stavropolskaya St., 149)

In work the asymptotic solution of the regional task modeling transfer of ions of salt in the camera of an obessolivaniye of the electro dialysis device is proposed. For this purpose the area of the camera of an obessolivaniye breaks into two subareas: the area of an electroneutrality and area of a spatial charge, in each of which, asymptotic decomposition has the appearance. Feature of the proposed asymptotic solution is that in the field of a spatial charge for unambiguous resolvability of the current approach the condition of resolvability of the following approach is used. For the numerical realization, the proposed asymptotic solution the differential operator who in the field of an electroneutrality is elliptic, and in the field of a spatial charge parabolic is formulated. For sampling obvious and implicit differential schemes are used. The example of the numerical decision is given.

Keywords: "rigid" tasks, mathematical modeling, asymptotic methods, numerical methods, binary electrolyte, system of the equations of Nernsta – Planka – Puassona, Hevisayd's function, electroneutrality area, area of a spatial zaryadaresheniye.

### Введение

Электродиализный аппарат имеет периодическую структуру, состоящую из чередующих камер обессоливания и концентрирования, а также двух электродных камер. Изменение концентрации в камере концентрирования можно учесть в граничных условиях. Таким образом, основной задачей является моделирование переноса в камере обессоливания. Пусть  $x = 0$  соответствует условной межфазной границе анионообменная мембрана/раствор,

$x = 1$  соответствует условной межфазной границе катионообменная мембрана/раствор,  $y = 0$  – входу, а  $y = L$  – выходу из камеры обессоливания,  $\vec{V}$  – заданная скорость прокачивания раствора. Будем считать, что скорость течения раствора имеет форму параболы Пуазейля или моделируется по-другому.

Для математического моделирования явлений переноса для бинарного электролита в камере обессоливания используется краевая задача для системы уравнений Нернста – Планка и Пуассона [4], которая достаточно сложна для аналитического и численного решения.

**2. Постановка задачи.** Нами в работе [5], для 1:1 электролита с одинаковыми коэффициентами диффузии катионов и анионов, была выведена упрощенная модельная задача с функцией Хэвисайда [1] и показано, что она достаточна адекватна. В данной работе предлагается асимптотическое решение соответствующей краевой задачи, которая имеет безразмерный вид [1, 2]:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \lambda \Delta \tilde{S} - \chi(\tilde{S}) \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{V}), \quad (1)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2 \vec{E} + \tilde{S} \vec{E} = \vec{I}, \quad (2)$$

$$\Delta \eta = \lambda \left( \nabla \left( \tilde{S} + \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2 \right), \vec{E} \right), \quad (3)$$

$$\tilde{S}|_{x=0} = C_{2a} - \frac{\varepsilon}{2C_{2a}} \|\nabla \eta\|_{x=0}^2, \quad \tilde{S}|_{x=1} = C_{1m} - \frac{\varepsilon}{C_{1m}} \|\nabla \eta\|_{x=1}^2,$$

$$\tilde{S}|_{y=0} = \left( C_1 + C_2 - \frac{\varepsilon}{2(C_1 + C_2)} \|\nabla \eta\|^2 \right)_{y=0}, \quad \tilde{S}|_{y=L} = \left( C_1 + C_2 - \frac{\varepsilon}{2(C_1 + C_2)} \|\nabla \eta\|^2 \right)_{y=L} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x=0, x=x_k} = - \frac{\partial}{\partial y} (C_1 - C_2) \Big|_{x=0, x=1}, \quad \eta|_{y=0} = 0, \quad \eta|_{y=L} = -i_{av} L,$$

$$\tilde{S}|_{t=0} = \tilde{S}_0(x, y), \quad \eta|_{t=0} = \eta_0(x, y), \quad (5)$$

где  $\vec{E}$  – искомая напряженность,  $C_1, C_2$  – концентрации катионов и анионов,

$\tilde{S} = C_1 + C_2 - \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2$  – обобщенная общая «концентрация»,  $\vec{I}$  – плотность тока,  $\eta$  –

функция тока для плотности тока  $\vec{I}$ , т.е.  $I_1 = -\eta_y$ ,  $I_2 = \eta_x$ ,  $\varepsilon > 0$  – безразмерный малый

параметр, равный удвоенному квадрату отношения Дебаевской длины к ширине канала,

$\lambda = 1/Pe$ ,  $Pe$  – число Пекле,  $\vec{V}$  – заданная скорость протока электролита в камере

обессоливания,  $\chi(\tilde{S})$  – функция Хэвисайда,  $i_{av}$  – ток в цепи,  $L$  – длина канала,

$(\vec{a}, \vec{b})_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$  – кососимметрическое скалярное произведение.

При запредельных режимах функция  $\tilde{S}$  меняет знак в области  $[0,1] \times [0,L]$  по крайней мере, для небольших  $y$ , причем дважды. Из этого следует, что функция  $\vec{E}$  имеет в разных частях области различные асимптотические представления.

Нами показано, что область  $(U_2)$ , где значение функции  $\tilde{S}$  положительно является областью электронейтральности, а отрицательно  $(U_1 = U_{1,1} \cup U_{1,2})$  – пространственного заряда.

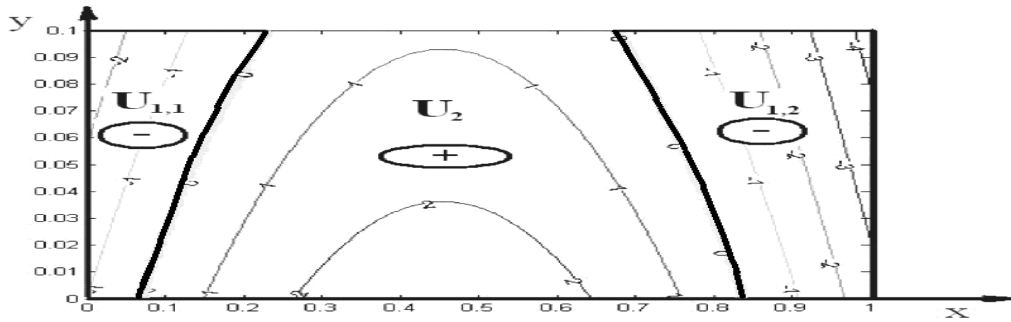


Рисунок 1. Область знакопостоянства функции  $\tilde{S}$

Особенностью задачи является то, что функция  $\tilde{S}(t, x, y)$  из уравнения (1) находится независимо от функций  $\vec{E}(x, y)$  и  $\eta(x, y)$ .

### 3. Асимптотическое решение в области электронейтральности

#### 3. 1. Асимптотическое разложение

Используем в области электронейтральности ( $\tilde{S} > 0$ ) для асимптотического решения следующие разложения:

$$\vec{E} = \vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(1)}\varepsilon + \dots + \vec{E}^{(i)}\varepsilon^i + \dots, \quad \eta = \eta^{(0)} + \eta^{(1)}\varepsilon + \dots + \eta^{(i)}\varepsilon^i + \dots$$

Подставляя данные разложения в систему уравнений и приравнивая коэффициенты при равных степенях  $\varepsilon$ , получим уравнения, решая которые можно найти все коэффициенты разложения. Для нахождения решения  $i$ -го приближения получаем следующую систему уравнений:

$$\vec{E}^{(i)} = \frac{1}{\tilde{S}} \vec{I}^{(i)} - \frac{1}{\tilde{S}} f_i(\vec{E}^{(0)}, \vec{E}^{(1)}, \vec{E}^{(2)}, \dots, \vec{E}^{(i-1)}) \quad (6)$$

$$\Delta \eta^{(i)} = \frac{\lambda}{\tilde{S}} (\nabla \tilde{S}, \nabla \eta^{(i)}) - \frac{1}{\tilde{S}} (\nabla \tilde{S}, f_i(\vec{E}^{(0)}, \vec{E}^{(1)}, \dots, \vec{E}^{(i-1)}))_1 + \varphi_i(\vec{E}^{(0)}, \vec{E}^{(1)}, \dots, \vec{E}^{(i-1)}) \quad (7)$$

где

$$f_i(\vec{E}^{(0)}, \vec{E}^{(1)}, \vec{E}^{(2)}, \dots, \vec{E}^{(i-1)}) = \frac{\lambda}{2} \sum_{\substack{k+j+l=i-1 \\ k \geq 0, j \geq 0, l \geq 0 \\ k < i, j < i, l < i}} (\vec{E}^{(k)}, \vec{E}^{(j)}) \vec{E}^{(l)}$$

$$\varphi_i(\vec{E}^{(0)}, \vec{E}^{(1)}, \vec{E}^{(2)}, \dots, \vec{E}^{(i-1)}) = \frac{\lambda}{2} \sum_{\substack{k+j+l=i-1 \\ k \geq 0, j \geq 0, l \geq 0 \\ k < i, j < i, l < i}} (\nabla(\vec{E}^{(k)}, \vec{E}^{(j)}, \vec{E}^{(l)}))_1$$

### 3. 2. Алгоритм решения начального и первого приближения

Для начального приближения имеем систему уравнений:

$$\vec{E}^{(0)} = \frac{1}{\tilde{S}} \vec{I}^{(0)},$$

$$\Delta\eta^{(0)} = \lambda (\nabla \tilde{S}, \vec{E}^{(0)})_1,$$

которая после ряда преобразований принимает вид:

$$\vec{E}^{(0)} = \frac{1}{\tilde{S}} \vec{I}^{(0)} \quad (8)$$

$$\Delta\eta^{(0)} = \frac{\lambda}{\tilde{S}} (\nabla \tilde{S}, \nabla \eta^{(0)}) \quad (9)$$

Из системы уравнений (9)–(10) видно, что вначале из уравнения (9) находится решение  $\eta^{(0)}$ , далее, используя условие  $\vec{I}^{(0)} = \left( -\frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y}, \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} \right)$ , вычисляем  $\vec{I}^{(0)}$ , затем находим  $\vec{E}^{(0)}$ .

Для приближения первого порядка получаем систему уравнений:

$$\vec{E}^{(1)} = \frac{1}{\tilde{S}} \vec{I}^{(1)} - \frac{1}{2\tilde{S}} \|\vec{E}^{(0)}\|^2 \vec{E}^{(0)}$$

$$\Delta\eta^{(1)} = \lambda (\nabla \tilde{S}, \vec{E}^{(1)})_1 + \frac{\lambda}{2} \left( \nabla \|\vec{E}^{(0)}\|^2, \vec{E}^{(0)} \right)_1,$$

которая после некоторых преобразований преобразуется к виду:

$$\vec{E}^{(1)} = \frac{1}{\tilde{S}} \vec{I}^{(1)} - \frac{1}{2\tilde{S}} \|\vec{E}^{(0)}\|^2 \vec{E}^{(0)} \quad (10)$$

$$\Delta\eta^{(1)} = \frac{\lambda}{\tilde{S}} (\nabla \tilde{S}, \nabla \eta^{(1)}) - \frac{\lambda}{2\tilde{S}} \left( \nabla \tilde{S}, \|\vec{E}^{(0)}\|^2 \vec{E}^{(0)} \right)_1 + \frac{\lambda}{2} \left( \nabla \left( \|\vec{E}^{(0)}\|^2 \right), \vec{E}^{(0)} \right)_1 \quad (11)$$

Из системы уравнений (10)–(11) видно, что первое приближение находится по такому же алгоритму, что и начальное приближение.

## 4. Асимптотическое решение в области пространственного заряда

### 4. 1. Асимптотическое разложение

Сделаем замену:  $\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \tilde{E}$ , и используем в области пространственного заряда ( $\tilde{S} < 0$ )

для асимптотического решения следующие разложения тогда

$$\tilde{E} = \tilde{E}^{(0)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{E}^{(1)} + \varepsilon \tilde{E}^{(2)} + \dots + \varepsilon^{\frac{i}{2}} \tilde{E}^{(i)} + \dots,$$

$$\eta = \eta^{(0)} + \varepsilon^2 \eta^{(1)} + \varepsilon \eta^{(2)} + \dots + \varepsilon^2 \eta^{(i)} + \dots,$$

тогда для  $i$ -го приближения имеем систему уравнений

$$\left( \tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(i)} \right) \tilde{E}^{(0)} = \bar{I}^{(i-1)} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+j+l=i \\ k \geq 0, j \geq 0, l \geq 0 \\ k < i, j < i, l < i}} \left( \bar{E}^{(k)}, \bar{E}^{(j)} \right) \bar{E}^{(l)} \quad (12)$$

$$\Delta \eta^{(i)} = \frac{\lambda}{2} \sum_{\substack{k+j+l=i \\ k \geq 0, j \geq 0, l \geq 0}} \left( \nabla \left( \bar{E}^{(k)}, \bar{E}^{(j)} \right), \bar{E}^{(l)} \right) \quad (13)$$

Система уравнений (12) может быть записана в виде:

$$A \tilde{E}^{(i)} = \bar{I}^{(i-1)} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+j+l=i \\ k \geq 0, j \geq 0, l \geq 0 \\ k < i, j < i, l < i}} \left( \bar{E}^{(k)}, \bar{E}^{(j)} \right) \bar{E}^{(l)},$$

где  $A = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1^{(0)} \tilde{E}_1^{(0)} & \tilde{E}_1^{(0)} \tilde{E}_2^{(0)} \\ \tilde{E}_1^{(0)} \tilde{E}_2^{(0)} & \tilde{E}_2^{(0)} \tilde{E}_2^{(0)} \end{pmatrix}$ .

Заметим, что для  $\tilde{E}^{(i)}$  получаем систему линейных уравнений с нулевым определителем  $\det A = 0$ . Для однозначного определения  $i$ -го приближения используется условие разрешимости  $i+1$ -го приближения, которое имеет вид

$$\left( \tilde{E}^{(0)}, \bar{I}^{(i-1)} \right)_H - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+j+l=i \\ k \geq 0, j \geq 0, l \geq 0 \\ k < i, j < i, l < i}} \left( \left( \bar{E}^{(k)}, \bar{E}^{(j)} \right) \bar{E}^{(l)}, \tilde{E}^{(0)} \right)_H = 0 \quad (14)$$

#### 4. 2. Алгоритм решения начального и первого приближения

Система уравнений для нулевого приближения имеет вид

$$\left( \frac{1}{2} \|\tilde{E}^{(0)}\|^2 + \tilde{S} \right) \tilde{E}^{(0)} = 0 \quad (15)$$

$$\Delta \eta^{(0)} = \lambda \left( \nabla \left( \tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(1)} \right), \tilde{E}^{(0)} \right)_H \quad (16)$$

Система уравнений для первого приближения имеет вид

$$A \tilde{E}^{(1)} = \bar{I}^{(0)} \quad (17)$$

$$\Delta \eta^{(1)} = \lambda \left( \nabla \left( \tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(1)} \right), \tilde{E}^{(1)} \right) + \frac{\lambda}{2} \left( \nabla \left( 2 \left( \tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(2)} \right) + \|\tilde{E}^{(1)}\|^2 \right), \tilde{E}^{(0)} \right) \quad (18)$$

Система уравнений для второго приближения для  $\tilde{E}^{(2)}$  имеет вид:

$$A \tilde{E}^{(2)} = \bar{I}^{(1)} - \left( \tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(1)} \right) \tilde{E}^{(1)} - \frac{1}{2} \|\tilde{E}^{(1)}\|^2 \tilde{E}^{(0)} \quad (19)$$

Уравнение (15) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \|\tilde{E}^{(0)}\|^2 + \tilde{S} = 0 \quad (20)$$

Из этого уравнения не удается однозначно найти  $\tilde{E}_1^{(0)}$  и  $\tilde{E}_2^{(0)}$ , поэтому необходимо использовать условие разрешимости уравнения для  $\tilde{E}^{(1)}$ , которое, как следует из (14), имеет следующий вид:

$$\left(\tilde{E}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}\right)_1 = 0 \quad (21)$$

Решая систему уравнений (20) и (21), получаем однозначное выражение  $\tilde{E}^{(0)}$  через  $\bar{I}^{(0)}$ :

$$\tilde{E}^{(0)} = \frac{\sqrt{-2\tilde{S}}}{\|\bar{I}^{(0)}\|} \bar{I}^{(0)}, \quad (22)$$

с учетом которого уравнение (18) преобразуется к виду:

$$\left(\|\nabla\eta\|^2 - \lambda\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - 2\lambda \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + \left(\|\nabla\eta\|^2 - \lambda\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = -\lambda \frac{\|\nabla\eta\|^2}{2\tilde{S}} (\nabla\eta, \nabla\tilde{S}) \quad (23)$$

Уравнение (23) является квазилинейным уравнением параболического типа.

Из уравнения (19) имеем следующее условие разрешимости для первого приближения

$$\left(\tilde{E}^{(0)}, \bar{I}^{(1)}\right)_1 - \left(\tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(1)}\right) \left(\tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(1)}\right)_1 = 0 \quad (24)$$

Решая систему уравнений (21) и (24), выражаем напряженность электрического поля через плотность тока для первого приближения

$$\tilde{E}^{(1)} = B \bar{I}^{(1)} + \bar{C}, \quad (25)$$

$$\text{где } B = \frac{1}{\left(\tilde{E}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}\right)} \begin{pmatrix} \tilde{E}_2^{(0)} \tilde{E}_2^{(0)} & -\tilde{E}_1^{(0)} \tilde{E}_2^{(0)} \\ -\tilde{E}_1^{(0)} \tilde{E}_2^{(0)} & \tilde{E}_1^{(0)} \tilde{E}_1^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \frac{I_1^{(0)}}{\left(\tilde{E}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}\right) \tilde{E}_1^{(0)}} \bar{I}^{(0)}.$$

Из уравнений (18) и (19) можно получить выражение для нахождения  $\eta^{(1)}$ :

$$\Delta\eta^{(1)} = \lambda \left( \nabla \left( \tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(1)} \right), \tilde{E}^{(1)} \right)_1 + \lambda \left( \nabla \left( \frac{I_1^{(1)}}{\tilde{E}_1^{(0)}} - \frac{\left( \tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(1)} \right) \tilde{E}_1^{(1)}}{\tilde{E}_1^{(0)}} \right), \tilde{E}^{(0)} \right)_1,$$

в которое из (21) подставляем  $\tilde{E}^{(1)}$  и получаем уравнение для  $\eta^{(1)}$ . Соответствующее уравнение не приводится из-за ее громоздкости.

### 5. Алгоритм численного решения начального приближения

Для численного решения вводится в рассмотрение дифференциальный оператор  $L(\eta, \tilde{S})$ , который определяется следующим образом [3]:

$$L(\eta, \tilde{S}) = \begin{cases} \Delta\eta - \lambda \frac{1}{\tilde{S}} (\nabla \tilde{S}, \nabla \eta), & (x, y) \in U_2 \\ \left( \|\nabla \eta\|^2 - \lambda \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2\lambda \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \left( \|\nabla \eta\|^2 - \lambda \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \lambda \frac{\|\nabla \eta\|^2}{2\tilde{S}} (\nabla \tilde{S}, \nabla \eta), & (x, y) \in U_1 \end{cases},$$

Тогда для функций  $\tilde{S}$  и  $\eta$  получается система уравнений

$$L(\eta, S) = 0 \quad t > 0, x \in (0, 1), y \in (0, L) \quad (26)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \lambda \Delta S - \chi(S) \operatorname{div}(S \vec{V}) \quad t > 0, x \in (0, 1), y \in (0, L) \quad (27)$$

с соответствующими краевыми условиями (4)–(5).

Для численного решения использовался метод установления, для дискретизации применялись явная и неявная разностные схемы. На рисунке 2 приведены графики решений краевой задачи для функции обобщенной концентрации  $\tilde{S}$  и плотности тока  $\vec{I}$ .

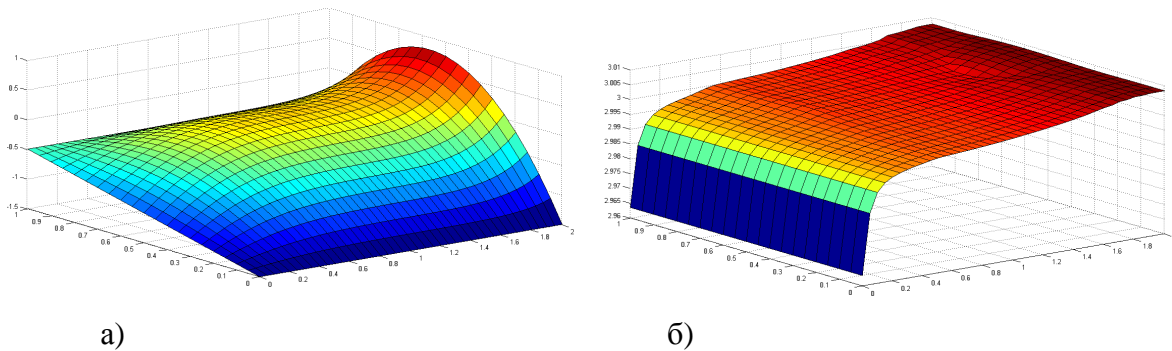


Рисунок 2. Графики решений краевой задачи: а)  $S(\bar{t}, x, y)$ , б)  $I_1(\bar{t}, x, y)$

**Заключение.** Краевая задача (11)–(15) относится к классу «жестких» задач [1] из-за наличия малого параметра и поэтому при численном решении при значениях малого параметра  $\mathcal{E}$  порядка  $10^{-4}$  требуется шаг дискретизации порядка  $10^{-6}$ , что еще приемлемо по времени решения.

Однако реально  $\mathcal{E}$  меняется в пределах от  $10^{-6}$  до  $10^{-10}$ . При таких значениях малого параметра численное решение становится затруднительным. Предлагаемое асимптотическое решение позволяет провести численный анализ краевой задачи при произвольно малых значениях параметра  $\mathcal{E}$ .

### Список литературы

1. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем: Пер. с англ.– М.: Мир, 1983. – 200 с.
2. Коваленко А. В., Уртенев М. Х., Узденова А. М., Хромых А. А., Барсукова В. Ю. Анализ

краевой задачи модели переноса бинарного электролита в приближении закона Ома / А. В. Коваленко, М. Х. Уртенев, А. М. Узденова, А. А. Хромых, В. Ю. Барсукова // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2012. – № 77(03). – <http://ej.kubagro.ru/2012/03/pdf/57.pdf>.

3. Коваленко А. В., Уртенев М. Х, Узденова А. М., Чубырь Н. О. Численное решение краевых задач для квазилинейных уравнений математической физики с функцией Хэвисайда / А. В. Коваленко, М. Х. Уртенев, А. М. Узденова, Н. О. Чубырь // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 2; URL: <http://www.science-education.ru/102-5919>

4. Лаврентьев А. В., Уртенев К. М., Хромых А. А., Чубырь Н. О. Полная декомпозиция неоднородной системы уравнений Нернста – Планка – Пуассона для бинарного электролита / А. В. Лаврентьев, К. М. Уртенев, А. А. Хромых, Н. О. Чубырь // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – Краснодар, 2009. – №2. – С. 32-37.

5. Чубырь Н. О., Коваленко А. В., Уртенев М. Х. Двумерные математические модели переноса бинарного электролита в мембранных системах (численный и асимптотический анализ): монография / Н. О. Чубырь, А. В. Коваленко, М. Х. Уртенев. – Краснодар: ФГБОУ ВПО «КубГТУ», 2012. – 132 с.

#### **Рецензенты:**

Осипян Валерий Осипович, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры информационных технологий Кубанского государственного университета, г. Краснодар.

Семенчин Евгений Андреевич, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии Кубанского государственного университета, г. Краснодар.

Криштоп Виктор Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «Физика», Дальневосточный государственный университет путей сообщения, г. Хабаровск, профессор Университета Kwangwoon University, Korea.