УДК 519.2

СЛОЖНЫЕ ПРАВИЛА ОСТАНОВКИ НЕПРЕРЫВНОГО КОНТРОЛЯ

Гусев А.Л.

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь, Россия (614990, г. Пермь, ул. Сибирская, 24), e-mail: alguseval@mail.ru

Основной результат, полученный в работе для правила остановки контроля «из последних r_1 объектов 2 дефектных объекта или из последних r_2 объектов k_2 дефектных объекта» для классического контроля сформулирован в виде теоремы. Правила остановки контроля для плана непрерывного контроля, в который они входят, играют существенную роль. Если реально проконтролированное число объектов до остановки контроля меньше математического ожидания числа проконтролированных объектов для фиксированного p (вероятности годности объекта, т.е. для нормального хода производства объектов), то принимаются какие-либо меры для восстановления нормального хода производства. Это может быть замена или переналадка производственного оборудования в условиях поточного производства объектов или проведение профилактических мер при контроле показателей здоровья населения. Если же реально проконтролированное число объектов до остановки контроля равно или больше математического ожидания числа проконтролированных объектов для фиксированного p, то контроль продолжается без принятия каких-либо мер.

Ключевые слова: непрерывный контроль, план контроля, правило остановки контроля, вероятностные характеристики, рекуррентные события.

COMPLEX RULES STOP CONTINUOUS MONITORING

Gusev A.L.[1]

[1] *Perm state pedagogical university, 614990, Russia, Perm Region, c.Perm, Sydirskaya St., 24, e-mail: alguseval@mail.ru*

The main result in the stopping rule for the control "of the last two objects r1 defective object or objects from the past r2 - k2 defective object" for the classical control is formulated as a theorem. Stopping rules for monitoring the continuous monitoring of the plan, in which they come to play a significant role. If the actual number of inspected objects to the stop control is less than expected number of inspected facilities for fixed (likely date of the object, that is, for the smooth progress of production facilities), that any measures are taken to restore the normal course of production. This may be a replacement or readjustment of industrial equipment in the mass production of objects or preventive measures in monitoring health outcomes. If the actual number of inspected objects to the stop control is equal to or more than expected number of inspected facilities for fixed, then control continues without taking any action.

Key words: Continuous inspection, inspection plan, probabilistic characteristics, recurrent events.

Введение

Пусть имеется производственное нормальное качество – каждый произведенный объект удовлетворяет стандарту с вероятностью, близкой к единице. При длительном производстве объектов со временем происходит сбой оборудования (постепенный или резкий), что влечет за собой снижение производственного качества. При обнаружении снижения качества контроль останавливается, происходит переналадка оборудования или его замена, то есть восстанавливается качество производства, и контроль возобновляется вновь, без какого-либо учета произошедших событий.

Правила остановки контроля как рекуррентные события

В [2; 4] было показано, что правило остановки контроля [1; 3; 5] можно интерпретировать как рекуррентное событие E, которому соответствует некоторый конечный набор состояний $A_1, A_2, \ldots, A_N$, а математическое ожидание проконтролированных объектов до наступления события E равно:

$$\mu(E)=\frac{\sum_{j=0}^{l-1} c_j}{P(E)}, \qquad (1)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_N$ - состояния, соответствующие событию E; $l=\max_{1\le i\le N} L(A_i)$ - максимальная длина состояния, соответствующего событию E; c_h – вероятность перехода за h шагов из состояний $A_1, A_2, \ldots, A_N$, соответствующих событию E, в эти же состояния.

Результаты

Правило остановки Π_2 формулируется так: «из последних r_1 объектов – k_1 дефектных объектов или из последних r_2 объектов – k_2 дефектных объектов», где $r_2>r_1$, $k_2>k_1$ и $k_1>1$. При этом полагают, что вероятность каждого объекта быть годным равна p и быть дефектным равна q=1-p.

Рассмотрим классический случай контроля, т.е. случай, когда информация о контроле после наступления остановки обнуляется. Для правил остановки контроля Π_2 положим, что $k_2/(k_1–1)$ – целое число (при $k=2$ число всегда будет целым), и опишем все состояния отвечающие наступлению события E_{r_1,r_2,k_1,k_2} - правилу остановки контроля «из последних r_1 объектов – k_1 дефектных объектов или из последних r_2 объектов – k_2 дефектных объектов».

Сначала выделим состояния, которые соответствуют наступлению события: «из последних r_1 объектов k_1 объектов дефектных». А именно это состояния:

$$\underbrace{\langle\ 1,\ldots,1\ \rangle}_{k_1},\underbrace{\langle\ 1,0,1,\ldots,1\ \rangle}_{k_1+1},\ldots,\underbrace{\langle\ 1,\ldots,1,0,1\ \rangle}_{k_1+1},\ldots,\underbrace{\langle\ 1,\underbrace{0,\ldots,0}_{r_1-k_1},1,\ldots,1\ \rangle}_{r_1},\ldots,\underbrace{\langle\ 1,\ldots,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{r_1-k_1},1\ \rangle}_{r_1}.$$

Далее необходимо выписать состояния, отвечающие наступлению события: «из r_2 ($r_2>r_1$) последних объектов k_2 ($k_2>k_1$) объектов дефектных». Заметим, что для наступления такого события состояние, отвечающее ему, может иметь не более чем (k_1–1) подряд единиц. В противном случае ранее наступило бы событие: из последних r_1 объектов k_1 дефектных. Кроме того, между соседними группами из i и j единиц, если $i+j \ge k_1$ должна быть группа не менее чем из (k_1–t) нулей, где t=max ($i;j$). Теперь, учитывая, что $k_2/(k_1–1)$ – целое число, будем полагать его равным k_0. Таким образом, минимальную длину, равную

$$n_0 = k_2 + (k_0 - 1)(r_1 - k_1 + 1) = k_2 + (\frac{k_2}{k_1 - 1} - 1)(r_1 - k_1 + 1),$$

будет иметь следующее состояние

$$\langle \underbrace{1,\dots,1}_{k_1-1}, \underbrace{0,\dots,0}_{r_1-k_1+1}, \underbrace{1,\dots,1}_{k_1-1},\dots, \underbrace{1,\dots,1}_{k_1-1} \rangle,$$

где k_0 групп из $(k_1–1)$ единиц и $(k_0–1)$ группа из $(r_1–k_1+1)$ нулей. Ясно, что длину, равную

$$k_2 + (\frac{k_2}{k_1 - 1} - 1)(r_1 - k_1 + 1) + 1,$$

имеют следующие состояния:

$$\underbrace{\langle 1,0,\dots,1}_{k_1}, \underbrace{0,\dots,0}_{r_1-k_1+1}, \underbrace{1,\dots,1}_{k_1-1},\dots, \underbrace{1,\dots,1 \rangle}_{k_1-1}, \underbrace{\langle 1,1,0,1,\dots,1}_{k_1}, \underbrace{0,\dots,0}_{r_1-k_1+1}, \underbrace{1,\dots 1}_{k_1-1},\dots, \underbrace{1,\dots,1 \rangle}_{k_1-1},\dots,$$

$$\underbrace{\langle 1,\dots,1}_{k_1-1}, \underbrace{0,\dots,0}_{r_1-k_1+1}, \underbrace{1,\dots,1}_{k_1-1},\dots \underbrace{1,\dots 1,0,1 \rangle}_{k_1}.$$

Продолжая рассуждать так и далее, установим, что максимальную длину, равную r_2, имеют такие состояния:

$$\langle 1, \underbrace{0,\dots,0}_{r_2-n_0}, \underbrace{1,\dots,1}_{k_1-2}, \underbrace{0,\dots,0}_{r_1-k_1+1}, \underbrace{1,\dots,1}_{k_1-1},\dots, \underbrace{1,\dots,1 \rangle}_{k_1-1},\dots, \underbrace{\langle 1,\dots 1}_{k_1-1}, \underbrace{0,\dots 0}_{r_1-k_1+1}, \underbrace{1,\dots,1}_{k_1-1},\dots, \underbrace{1,\dots,1}_{k_1-2}, \underbrace{0,\dots 0,1 \rangle}_{r_2-n_0}.$$

Тогда вероятность наступления события E_{r_1,r_2,k_1,k_2} равна сумме вероятностей вышеописанных состояний:

$$P(E_{r_1,r_2,k_1,k_2}) = q^{k_1} \sum_{i=0}^{r_1-k_1} p^i C^i_{i+k_1-2} + q^{k_2} p^{(k_0-1)(r_1-k_1+1)} \sum_{i=0}^{r_2-(k_0-1)(r_1-k_1+1)-k_2} p^i C^i_{i+k_2-2}. \qquad (2)$$

Далее зафиксируем k_1=2 (при этом k_0 – целое число) и вычислим $P(E_{r_1,r_2,2,k_2})$ - вероятность наступления события $E_{r_1,r_2,2,k_2}$:

$$P(E_{r_1,r_2,2,k_2}) = q^2 \sum_{i=0}^{r_1-2} p^i + q^{k_2} p^{(k_2-1)(r_1-1)} \sum_{i=0}^{r_2-r_1(k_2-1)-1} p^i C^i_{i+k_2-2}. \qquad (3)$$

Теперь необходимо найти $\sum_{j=0}^{l-1} c_j$. Для этого заметим следующее. Основание «1» входит в любое состояние, соответствующее событию $E_{r_1,r_2,2,k_2}$ и c_0=1. Тогда нетрудно видеть, что

$$\sum_{j=0}^{l-1} c_j = 1 + q\sum_{i=0}^{r_1-2} p^i + q^{k_2-1} p^{(k_2-1)(r_1-1)} \sum_{i=0}^{r_2-r_1(k_2-1)-1} p^i C_{i+k_2-2}^i + \sum_{j=1}^{k_2-2} q^j p^{j(r_1-1)} \sum_{i=0}^{r_2-r(k_{21}-1)-1} p^i C_{i+j-1}^i . \quad (4)$$

Действительно, первое слагаемое отражает тот факт, что c^0=1, второе и третье слагаемое отражают вероятность перехода в состояние, соответствующее событию $E_{r_1,r_2,2,k_2}$ из основания «1». Четвертое слагаемое это сумма вероятностей перехода в состояние, соответствующее событию $E_{r_1,r_2,2,k_2}$ из оснований, отличных от основания «1».

Таким образом, получаем математическое ожидание числа проконтролированных объектов до остановки контроля по правилу «из последних r_1 объектов 2 дефектных объекта или из последних r_2 объектов k_2 дефектных объекта»:

$$\mu(E_{r_1,r_2,2,k_2}) = \frac{1 + q\sum_{i=0}^{r_1-2} p^i + q^{k_2-1} p^{(k_2-1)(r_1-1)} \sum_{i=0}^{r_2-r_1(k_2-1)-1} p^i C_{i+k_2-2}^i + \sum_{j=1}^{k_2-2} q^j p^{j(r_1-1)} \sum_{i=0}^{r_2-r_1(k_2-1)-1} p^i C_{i+j-1}^i}{q^2 \sum_{i=0}^{r_1-2} p^i + q^{k_2} p^{(k_2-1)(r_1-1)} \sum_{i=0}^{r_2-r_1(k_2-1)-1} p^i C_{i+k_2-2}^i} . \quad (5)$$

Фактически была доказана следующая теорема.

Теорема. Математическое ожидание числа проконтролированных объектов до остановки контроля при классическом контроле по правилу «из последних r_1 объектов 2 дефектных объекта или из последних r_2 объектов k_2 дефектных объекта» при q – вероятности дефектности каждого объекта и p=1-q - вероятности годности каждого объекта выражается формулой (5).

Таблица

Таблица 1. Математическое ожидание числа проконтролированных объектов до наступления остановки по правилу «из последних r_1 объектов – k_1 объектов дефектных или из последних r_2 объектов – k_2 объектов дефектных» для $r_1 = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ и набора значений p – вероятности объекта быть годным

	p=0,5	p=0,6	p=0,7	p=0,8	p=0,85	p=0,9	p=0,95	p=0,96	p=0,97	p=0,98	p=0,99	p=0,995
r_2=15	5,1	6,9	10,2	17,6	26,8	51,2	179,1	276,1	489,0	1113,5	4620,2	19092,3
r_2=20	5,1	6,9	10,0	16,5	24,0	43,4	143,5	220,1	390,8	906,4	3971,8	17357,4
r_2=25	5,1	6,9	10,0	16,0	22,6	38,9	119,9	181,3	318,5	738,5	3342,5	15380,1
r_2=40	5,1	6,9	10,0	15,7	21,2	33,3	86,2	123,9	206,4	455,1	2048,7	10225,7
r_2=80	5,1	6,9	10,0	15,7	21,0	31,5	65,6	86,4	128,5	244,3	914,1	4318,3

Заключение

Основной результат, полученный в работе для правила остановки контроля «из последних r_1 объектов 2 дефектных объекта или из последних r_2 объектов k_2 дефектных объекта» для классического контроля, сформулирован в виде теоремы.

Правила остановки контроля для плана непрерывного контроля, в который они входят, играют существенную роль. На практике, применяя какие-либо правила остановки контроля, поступают следующим образом. Если реально проконтролированное число объектов до остановки контроля меньше математического ожидания числа проконтролированных объектов для фиксированного p (вероятности годности объекта, т.е. для нормального хода производства объектов), то принимаются какие-либо меры для восстановления нормального хода производства. Это может быть замена или переналадка производственного оборудования в условиях поточного производства объектов или проведение профилактических мер при контроле показателей здоровья населения. Если же реально проконтролированное число объектов до остановки контроля равно или больше математического ожидания числа проконтролированных объектов для фиксированного p, то контроль продолжается без принятия каких-либо мер.

Список литературы

1. Беляев Ю.К. Вероятностные методы выборочного контроля. - М. : Наука, 1975.
2. Гусев А.Л. Планы непрерывного контроля с памятью // Статистические методы оценивания и проверки гипотез : межвузовский сб. научных трудов. – Пермь : Изд. Пермского государственного университета, 2010. – Вып. 22. – С. 143-147.
3. Gusev A.L. Recurrent events and characteristics of plans of continuous control // Journal of Soviet Mathematics. – 1995. – Vol. 2. – P. 1571-1575.
4. Gusev A.L. Continuous Inspection with Memory // Statistics and Probability Letters. - 2012. – Vol. 82. – P. 303-307.
5. Dodge H.F. A sampling inspection plan for continuous production // Annals of Mathematical Statistics. - 1943. – № 14. – P. 264-279.

Рецензенты:
Пенский Олег Геннадьевич, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры процессов управления и компьютерной безопасности, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь.
Ясницкий Леонид Нахимович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Пермь.