УДК 517.925.51

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО, ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Конашенко А.В.[1] , Родионова Г.С.[1]

[1]*ГБОУ ВПО «Смоленский государственный университет», Смоленск, Россия (214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, 4), e-mail: rectorat@smolgu.ru*

В работе рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений второго, третьего и четвертого порядков с постоянными коэффициентами, а также соответствующие возмущенные системы в смысле возмущения коэффициентов исходных систем. Основным вопросом, изучаемым в данной статье, является вопрос устойчивости и асимптотической устойчивости решений соответствующих систем по Ляпунову. Получены модифицированные условия устойчивости в терминах коэффициентов матриц данных систем линейных дифференциальных уравнений, причем основные теоремы данной работы содержат как необходимые, так и достаточные условия устойчивости. Кроме того, получены результаты, касающиеся устойчивости соответствующих возмущенных систем. Также работа сопровождается конкретными примерами, в которых иллюстрируется применение новых полученных модифицированных условий. Результаты данной работы могут быть полезны для всех исследователей, занимающихся математическим моделированием любых реальных задач, при создании моделей которых используются системы линейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: устойчивость, неустойчивость, возмущения, линейная система дифференциальных уравнений второго, третьего и четвертого порядка, условие Рауса-Гурвица.

ABOUT STABILITY OF SYSTEMS OF THE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS SECOND THIRD AND FOURTH LOCK

Konashenko A.V. [1] Rodionova G.S.[1]

[1]*Smolensk State University, Smolensk, Russia (214000, Smolensk, Przhevalskogo street, 4), e-mail: rectorat@smolgu.ru*

In this paper we consider the linear differential equations of the second, third and fourth order with constant coefficients, and the corresponding perturbed system in terms of the perturbation of the coefficients of the original systems. The main question studied in this paper is the question of stability and asymptotic stability of solutions of the corresponding systems of Lyapunov. The modified stability conditions in terms of coefficients of matrixes of data of systems of the linear differential equations are received, and the main theorems of this work contain both necessary and sufficient stability conditions. The results concerning stability of the relevant indignant systems are received. Also work is accompanied by concrete examples in which application of the new received modified conditions is illustrated. Results of this work can be useful to all researchers who are engaged in mathematical modeling of any real tasks at which the creation of models systems of the linear differential equations are used.

Key words: stability, instability, perturbations, systems of the linear differential equations second third and fourth lock.

Введение

Если некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n), \text{ где } (i = 1,2,..., n) \tag{1}$$

с начальными условиями, которые обычно являются результатами измерений и, следовательно, неизбежно получены с некоторой погрешностью, то естественно возникает вопрос о влиянии изменения начальных значений на искомое решение.

Если окажется, что сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то решение, определяемое выбранными нами неточными начальными данными, обычно не имеет никакого прикладного значения и даже приближенно не может описывать изучаемое явление.

Если t меняется на конечном отрезке, то ответ на этот вопрос дает *теорема о непрерывной зависимости решений от начальных значений.* Если же t может принимать сколь угодно большие значения, то этим вопросом занимается *теория устойчивости* [4; 5].

Известные условия устойчивости и неустойчивости были подробно изучены в работах [1; 2; 4; 5].

1. Понятие об устойчивости решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Физические процессы часто описываются дифференциальными уравнениями второго и более высокого порядка, которые можно представить в виде системы двух или большего числа линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Как говорилось ранее, на физические измерения действуют возмущения, поэтому необходимо знать условия устойчивости решений системы дифференциальных уравнений. В данной статье рассматриваются однородные системы с постоянными коэффициентами (возмущения действуют на коэффициенты).

Определение 1.1 Систему вида

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

будем называть линейной системой однородных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка n переменных, где a_{ij} - вещественные постоянные.

Теорема 1.1. Линейная однородная система (2) с постоянной матрицей A *устойчива* тогда и только тогда, когда все характеристические корни $k_j = k_j(A)$ матрицы A обладают неположительными вещественными частями $\operatorname{Re} k_j(A) \le 0, (j = 1,2,...,n)$, причем характеристические корни, имеющие нулевые вещественные части, допускают лишь простые элементарные делители (т.е. соответствующие клетки Жордана сводятся к одному элементу).

Теорема 1.2. Линейная однородная система (2) с постоянной матрицей A *асимптотически устойчива* тогда и только тогда, когда все характеристические корни $k_j = k_j(A)$ матрицы A имеют отрицательные вещественные части $\operatorname{Re} k_j(A) < 0, (j = 1,2,...,n)$.

Доказательство теорем 1.1 и 1.2 приведено в [4; 5].

2. Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дана система двух линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = AX, \tag{3}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матрица системы с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$, т.е. $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

Введем следующие обозначения: $a_1 = -(a_{11} + a_{22}),\ a_2 = \Delta A$.

Теорема 2.1 (*необходимое и достаточное условие устойчивости*).

Необходимым и достаточным условием устойчивости нулевого решения системы (3) является положительность введенных коэффициентов a_1, a_2.

Доказательство. В данном случае коэффициентами характеристического уравнения являются единица при λ^2 и a_1, a_2 при λ^1 и λ^0 соответственно, поэтому необходимым условием устойчивости нулевого решения системы (3) является положительность введенных коэффициентов a_1, a_2. Так как матрица Гурвица имеет вид $\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, то условия $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ также являются и достаточным условием асимптотической устойчивости.

Замечание 2.1. Путем добавления возмущений каждому из коэффициентов системы исходная система дифференциальных уравнений переходит в некоторую новую систему дифференциальных уравнений, коэффициенты которой можно обозначить $b_{i,j}$, где $(i, j = 1,2)$. Изменения коэффициентов могут быть вызваны возмущением характеристик системы. Для возникшей системы верна также теорема 2.1 об устойчивости, что и для исходной с заменой коэффициентов a на b.

3. Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дана система трех линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = AX, \qquad (4)$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрица системы с постоянными коэффициентами.

Введем следующие обозначения:

$a_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33})$, где в скобках представлена сумма элементов по главной диагонали;

$a_2 = M_{11} + M_{22} + M_{33}$ — сумма миноров элементов, стоящих на главной диагонали;

$a_3 = -\Delta A$, где ΔA — определитель матрицы А системы.

Теорема 3.1 (*необходимое и достаточное условие устойчивости).* Необходимым условием устойчивости нулевого решения системы (4) является положительность всех введенных коэффициентов a_1, a_2, a_3. Достаточным условием асимптотической устойчивости является выполнение следующего неравенства: $a_1 \cdot a_2 - a_3 > 0$.

Доказательство. Для системы дифференциальных уравнений (4) составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (5)$$

что после равносильных преобразований запишем в виде:

$$\lambda^3 - \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + \lambda(a_{11} \cdot a_{22} + a_{11} \cdot a_{33} + a_{22} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} -$$
$$a_{23} \cdot a_{32}) - (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$
$$- a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}) = 0$$

Легко заметить, что коэффициент перед λ^0 является определителем матрицы системы (4) со знаком минус, что ранее обозначено через a_3. Коэффициент перед λ^1 представляет собой сумму миноров к элементам a_{11}, a_{22} и a_{33}, что обозначено через a_2. Коэффициент перед λ^2 является суммой элементов главной диагонали матрицы системы (4) со знаком минус, что обозначено через a_1. Коэффициент перед λ^3 обозначим через $a_0 = 1$.

Наличие хотя бы одного корня характеристического уравнения с действительной частью больше нуля означает неустойчивость нулевого решения, тогда все корни характеристического уравнения должны иметь отрицательную действительную часть, для чего необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического многочлена были положительны. Что и доказывает необходимость в условии теоремы.

Для доказательства достаточности составим матрицу Гурвица для данной задачи, используя введенные обозначения:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Так как $a_1 > 0$ и $a_3 > 0$, то главным условием оказывается следующее неравенство:

$\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$, что равносильно $a_1 \cdot a_2 - a_3 > 0$. Что и требовалось доказать.

Замечание 3.1. Путем добавления возмущений каждому из коэффициентов системы исходная система дифференциальных уравнений переходит в некоторую новую систему дифференциальных уравнений, коэффициенты которой можно обозначить $b_{i,j}$, где $(i, j = 1,2,3)$. Изменения коэффициентов могут быть вызваны возмущением характеристик системы. Для возникшей системы верна также теорема 3.1 об устойчивости, что и для исходной с заменой коэффициентов a на b.

Примером неустойчивой системы дифференциальных уравнений третьего порядка является система вида (4), матрица коэффициентов которой имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Несмотря на то что необходимые условия выполняются: $a_1 > 0, a_2 >, a_3 > 0$, достаточное условие нарушается.

Примером устойчивой системы является система, матрица коэффициентов которой имеет вид $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Для данной системы выполняются и необходимое, и достаточное условия.

4. Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть дана система четырех линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = AX, \qquad (7)$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ - матрица системы с постоянными коэффициентами. Введем следующие обозначения:

$a_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})$, где в скобках представлена сумма элементов по главной диагонали;

$a_2 = ([a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}] + [a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}] + [a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41}] + [a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}] + [a_{22}a_{44} -$
$- a_{24}a_{42}] + [a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}])$.

$a_3 = -(M_{11} + M_{22} + M_{33} + M_{44})$ — сумма миноров элементов, стоящих на главной диагонали со знаком минус;

$a_4 = \Delta A$, где ΔA — определитель матрицы А системы.

Коэффициент a_2 можно представить в следующем виде:

$a_2 = \Delta_{1,2}A + \Delta_{1,3}A + \Delta_{1,4}A + \Delta_{2,3}A + \Delta_{2,4}A + \Delta_{3,4}A$, где $\Delta_{i,j}A$ - определитель матрицы, полученной из матрицы А путем вычеркивания одновременно i-х и j-х строк и столбцов.

Теорема 4.1 (*необходимое и достаточное условие устойчивости).*

Необходимым условием устойчивости нулевого решения системы (7) является положительность всех введенных коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4.

Достаточным условием устойчивости является выполнение следующих неравенств:

1) $a_1 \cdot a_2 - a_3 > 0$.

2) $a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$. (8)

Доказательство проводится аналогичным образом, как и для систем третьего порядка, т.е. путем непосредственного преобразования характеристического уравнения. В силу наличия четырех переменных естественно увеличивается количество условий и усложняется матрица Гурвица, из-за чего появляется среди достаточных второе условие.

Замечание 4.1. Для возмущенных систем четвертого порядка условие устойчивости сохраняет тот же вид, что и в теореме 4.1 с естественным изменением коэффициентов.

Список литературы

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М. : Наука, 1967. – 472 с.

2. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – М. : Наука и техника, 1979. – 745 с.

3. Краснов М.Л., Киселев А.И.., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: задачи и примеры с подробными решениями : учебное пособие. - Изд. 3-е, испр. и доп. - М. : Едиториа УРСС, 2003. – 176 с.

4. Тихонов А.Н., Ильина В.Л., Свешников А.Г. Курс высшей математики и математической физики / вып. № 7. Дифференциальные уравнения. – М. : Наука, 1980. – 231 с.

5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. – М. : Наука, 1969. — 425 с.

Рецензенты:

Расулов Карим Магамедович, д.ф-м.н., профессор Смоленского государственного университета, г. Смоленск.

Мищенко Владимир Ильич, д.т.н., профессор Смоленского государственного университета, г. Смоленск.

Криштоп Виктор Владимирович, д.ф.м.н., профессор, заведующий кафедрой «Физика», Дальневосточный государственный университет путей сообщения, г. Хабаровск, профессор Университета Kwangwoon University, Корея.