

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЫ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОГРАНИЧЕНИЯ РАЗЛЕТА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПЛАЗМЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исаев Ю.Н.¹, Васильева О.В.¹

¹ФГБОУ ВПО «НИ ТПУ» («Национальный исследовательский Томский политехнический университет»),
Томск, Россия (634050, г. Томск, пр. Ленина, 30), e-mail: vasileva.o.v@mail.ru

Работа посвящена разработке модели потенциального барьера, позволяющей учитывать упругое отражение частиц о стенки плазматрона. Рассматривается коаксиальный магнитоплазменный ускоритель, реально используемый на практике. В ускорителе исследовано изменение скорости и массы плазменного сгустка в зависимости от координаты, определяемое как энергетическими характеристиками, так и газодинамическими закономерностями гиперзвуковых струйных течений в цилиндрическом канале. Представлен вид потенциальной функции и силового поля, моделирующих пространственное ограничение разлета частиц плазмы. Установлена динамика распространения заряженных частиц в электромагнитном поле, графически представлен баланс энергии с учетом эрозии стенок канала. Показана адекватность разработанной модели коаксиального магнитоплазменного ускорителя с учетом эрозии, вызванной при распространении частиц по низкочастотной спирали. Низкочастотное спиральное движение представлено как суперпозиция продольного и поперечного движений. Решение дифференциальных уравнений осуществлялось методом Рунге–Кутты с фиксированным шагом.

Ключевые слова: плазма, изменение массы, потенциальная функция, заряженная частица, эрозия, баланс энергии, колебательный закон, динамика сгустка.

MODELLING OF THE POTENTIAL HOLE FOR SPATIAL RESTRICTION OF SCATTERING OF THE LOADED PARTICLES OF PLASMA IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD

Isaev Y.N.¹, Vasileva O.V.¹

¹National research Tomsk polytechnic university, Tomsk, Russia (634050, Tomsk, Lenin prospect, 30), e-mail: vasileva.o.v@mail.ru

Work is devoted to development of model of the potential barrier, allowing considering elastic reflection of particles about plasmatron walls. The coaxial magneto plasma accelerator which is really used in practice is considered. In the accelerator change of speed and weight of a plasma clot depending on the coordinate, defined both power characteristics, and gas dynamic regularities of hypersonic jet currents in the cylindrical channel is investigated. The type of potential function and the force field, modeling spatial restriction of scattering of particles of plasma is presented. Dynamics of distribution of the loaded particles in an electromagnetic field is established, the balance of energy taking into account an erosion of walls of the channel is graphically presented. Adequacy of the developed model of the coaxial magneto plasma accelerator taking into account an erosion caused at distribution of particles on a low-frequency spiral is shown. Low-frequency spiral movement is presented as superposition of longitudinal and cross movements. The solution of the differential equations was carried out by a method Runge-Kutta with the fixed step.

Keywords: plasma, weight change, the potential function, the charged particle, erosion, balance of energy, the oscillatory law, dynamics of a clot.

Введение

Потенциальная яма – это математический прием, который позволяет ограничить движение частиц плазмы в электромагнитном поле. Известно, что это такая ограниченная область пространства, в которой потенциальная энергия частицы меньше, чем вне ее, и энергия такой частицы может принимать лишь определенные дискретные значения. Разработаем модель потенциальной ямы на примере коаксиального магнитоплазменного

ускорителя, который является электроэрозийным ускорителем. Исследование процесса электроэрозийного износа поверхности ускорительного канала с целью изучения характера износа по длине ствола, оптимизации электроэрозийной наработки рабочего материала и конструкции ускорителя является актуальной практической задачей.

Теоретический анализ

Приведем экспериментальные данные работы [6; 7] по измерению скорости в зависимости от координаты $v(x)$, рис. 1а. Рядом приведен график скорости $v(x)$, представленной в виде сплайновой функции, позволяющей производить аналитические операции над функцией скорости $v(x)$, рис. 1б.

Предварительно преобразуем зависимость от координаты $v(x)$ в зависимость от времени $v(t)$ с помощью соотношений:

- ускорение определяется выражением $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = v(x) \frac{dv(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dv^2(x)}{dx}$;
- время – $dt(x) = \frac{v'(x)}{a(x)} dx \rightarrow t(x) = \int_0^x \frac{v'(x)}{a(x)} dx$.

После подстановки зависимостей $v(x)$ и $a(x)$ в интегральные и дифференциальные соотношения получаем аналитические зависимости $t(x)$ и $x(t)$.

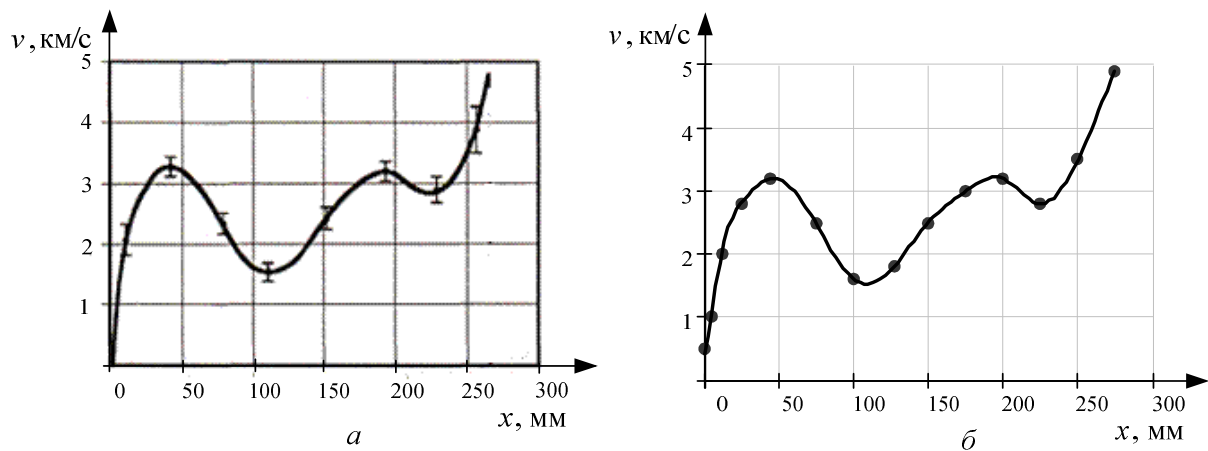


Рис. 1. Зависимость скорости $v(x)$: а) экспериментальная; б) сплайновая

Таким образом, полученная зависимость скорости от времени имеет колебательный характер, рис. 2. Следовательно, для адекватности моделирования динамики распространения плазменного сгустка необходимо учитывать изменение массы сгустка в процессе его распространения [1; 2; 5; 6]. Колебательный характер скорости можно объяснить, рассматривая динамику распространения заряженных частиц в электромагнитном поле.

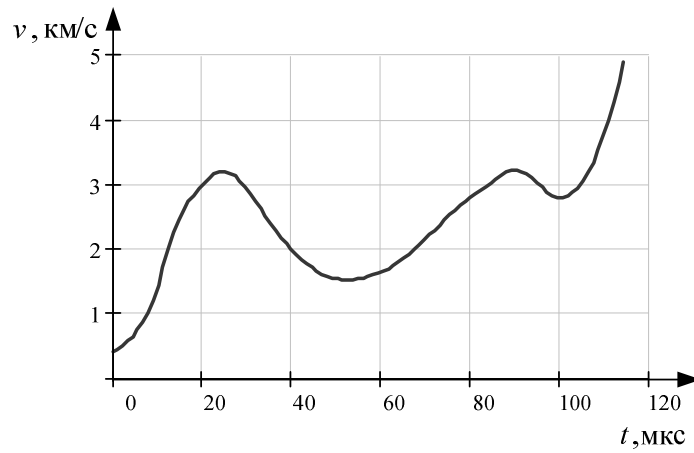


Рис. 2. Зависимость скорости плазменного сгустка от времени $v(t)$

Методика исследования

Магнитное поле плазменного укорителя можно представить как суперпозицию независимых ортогональных полей, создаваемых плазменным шнуром $\mathbf{H}_{\text{Пл}}=H_{\phi}(r)$ (аксиальное поле) и индуктором $\mathbf{H}_{\text{Инд}}=\{H_{\gamma}(z,r), H_z(z,r)\}$ [2; 3; 6].

Поскольку нас интересует поле в области, ограниченной электродным стволом, то поле индуктора в этой области можно считать однородным, не зависящим от координат и имеющим только z -компоненту $H_z=\text{const}$. Напомним, что линии равного векторного потенциала A это силовые линии магнитного поля. Кроме магнитных полей, имеется и электрическое поле электродной системы «ствол-жгут», определяемое выражениями:

$$\varphi(x, y) = -\frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)} \ln(r(x, y)/R_2),$$

$$E(x, y) = -\frac{d\varphi(x, y)}{dr} = \frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{r(x, y)}.$$

где $\varphi(x, y)$ – потенциал электрического поля; U_0 – напряжение, равное 3 кВ; R_2, R_1 – радиусы электрода ствола и плазменного жгута соответственно; $E(x, y)$ – напряженность электрического поля.

Компоненты напряженности электрического поля $E(x, y)$ по осям x и y будут соответственно:

$$E_x(x, y) = \frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad E_y(x, y) = \frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

Моделирование потенциальной ямы

Для ограничения траектории движения частиц в пределах ствола введена потенциальная функция $U(x, y)$ – «потенциальная яма», имеющая аналитический вид:

$$U(x, y) = \beta \left[1 - e^{-\rho(x, y)^{48} \alpha} \right], \quad (2)$$

и ее силовая функция, которая определяется выражением, используя (1) и (2):

$$\mathbf{F} = -\nabla U(x, y), F_x(x, y) = -48\beta\rho(x, y)^{46}\alpha x e^{-\rho(x, y)^{48}\alpha},$$

$$F_y(x, y) = -48\beta\rho(x, y)^{46}\alpha y e^{-\rho(x, y)^{48}\alpha}, \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Входящие безразмерные коэффициенты имеют значения: $\beta=10^4$, $\alpha=10^{-60}$.

Экспериментальная часть

Пространственный вид потенциальной функции и силового поля представлены на рис.

3. На данном рисунке представлена локализация силы $\mathbf{F}(x, y) = -\nabla U(x, y)$.

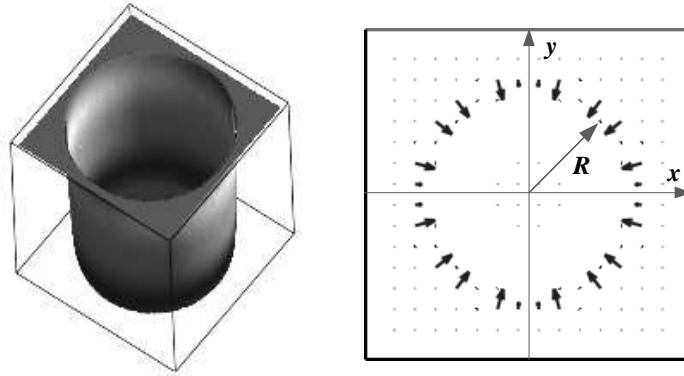


Рис. 3. Пространственное распределение потенциальной ямы $U(x, y)$ и силовое поле $\mathbf{F}(x, y) = -\nabla U(x, y)$

На основе полученных соотношений запишем уравнение динамики заряженных частиц в электромагнитных полях в векторной форме [4]:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{B} \times \mathbf{v} + e\mathbf{E} - \nabla U(\mathbf{r}), \mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}.$$

Систему дифференциальных уравнений второго порядка запишем в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка в развернутом виде для каждой компоненты координаты и скорости:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{m}(B_y v_z - B_z v_y) + \frac{e}{m}E_x - \frac{1}{m} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{e}{m}(B_z v_x - B_x v_z) + \frac{e}{m}E_y - \frac{1}{m} \frac{\partial U(x, y)}{\partial y},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{m}(B_x v_y - B_y v_x) + \frac{e}{m}E_z.$$

Решение дифференциальных уравнений осуществлялось методом Рунге–Кутты с фиксированным шагом с числом дискретизации $N=10^3$. Результаты расчетов приведены ниже. Все частицы имели одинаковую массу, заряд (+) и продольную компоненту скорости. Начальные значения поперечных скоростей и исходных координат частиц задавались различные. Относительные значения поперечных скоростей и координаты по отношению к радиусу электрода приведены на рис. 4. Видно, что при больших поперечных скоростях получаются большие радиусы. При заданной конфигурации электромагнитного поля частицы движутся по спирали.

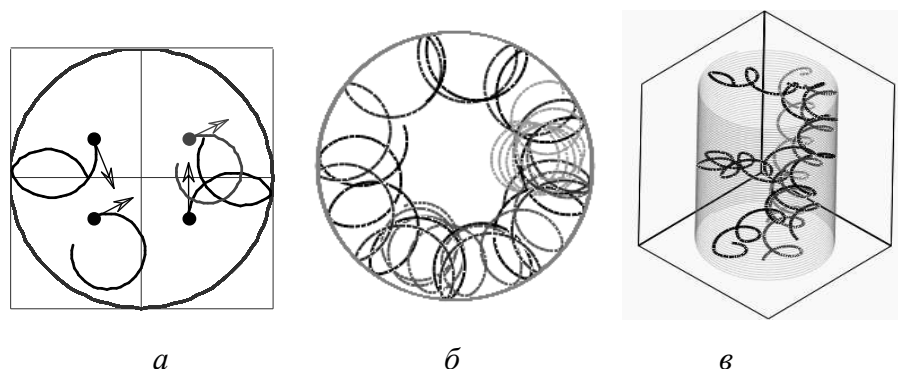


Рис. 4. Результаты расчета уравнения динамики заряженных частиц в электромагнитных полях: а) начальные положения координат и поперечные величины и направления скоростей; б) проекция траектории частиц на плоскость x, y ; в) вид пространственной траектории частиц

Траектория, усредненная по ларморовскому периоду, тоже представляет собой спираль более низкой частоты. Таким образом, при распространении частиц центр окружности, по которой вращаются частицы в поперечной плоскости, движется по низкочастотной спирали. Соприкасаясь со стенками, частицы вызывают эрозию, в результате которой изменяется масса плазмы. Плазменный сгусток представлен в виде плазменного шнура [7]. Таким образом, масса пучка меняется по колебательному закону (рис. 5).

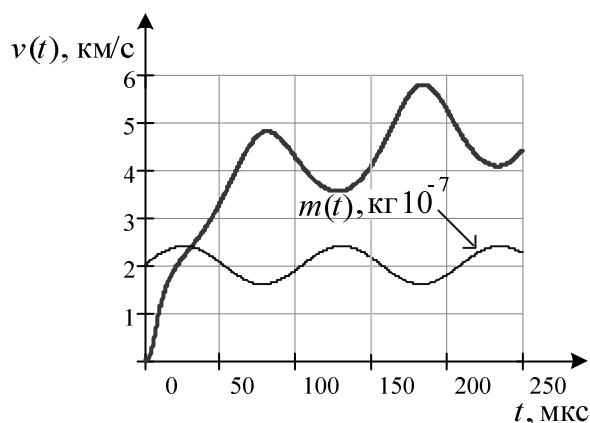


Рис. 5. Скорость сгустка с учетом эрозии при значениях параметров цепи $C=12 \cdot 10^{-3}$ Ф, $L_0=1,722 \cdot 10^{-7}$ Гн, $L'=4,6 \cdot 10^{-7}$ Гн, $U_0=3$ кВ

С учетом этого обстоятельства перепишем систему уравнений равновесия напряжения, тока и динамики сгустка:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m(t)} \frac{i^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} L(z) - \frac{v(t)}{m(t)} \frac{dm(t)}{dt} \\ \frac{d}{dt} i = \frac{-i \frac{\partial L(z)}{\partial z} + U_c - iR + U_0}{L(z)} \\ \frac{d}{dt} U_c = -\frac{i}{C} \end{cases} .$$

В качестве модели изменения массы $m(t)$ выберем функцию:

$$m(t) = m_0(1 + \zeta \sin(\omega t)),$$

где $m_0 = 10^{-7}$ кг, $\zeta = 0,2$, $\omega = 6 \cdot 10^5$.

Рассматривая зависимость скорости от времени (рис. 5), видим, что полученный результат находится в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Заметим, что изменения массы и изменения скорости находятся в противофазах.

В балансе энергии добавляется эффективная потенциальная энергия, обусловленная изменением массы и равная величине [7]:

$$U_{\text{Эф}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t v^2(t) \frac{dm(t)}{dt} dt .$$

Отсюда баланс энергии записывается в виде:

$$\frac{U_0^2 C}{2} = \frac{mv^2(t)}{2} + \int_0^t i^2(t) R(t) dt + \frac{u_c^2(t) C}{2} + \frac{i^2(t) L(z(t))}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t v^2(t) \frac{dm(t)}{dt} dt .$$

Графическое представление баланса энергии приведено на рис. 6.

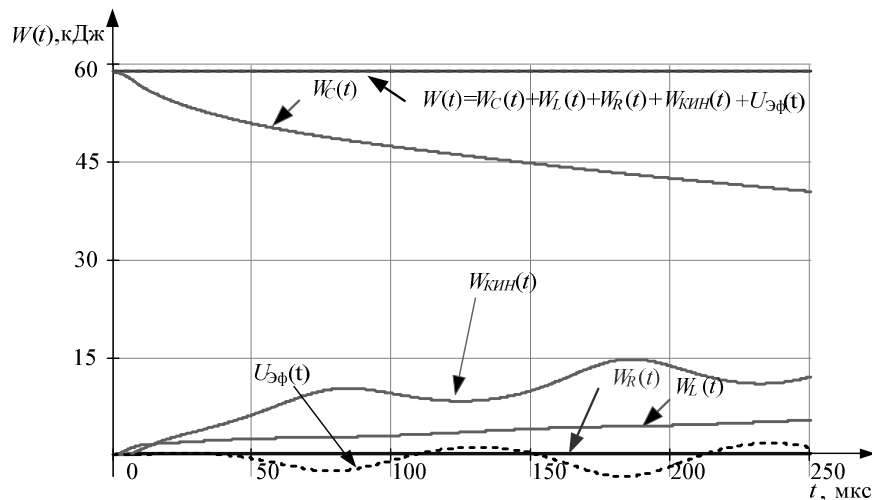


Рис. 6. Баланс энергии

Ниже приводится таблица сравнения экспериментальных и расчетных данных (табл. 1).

Таблица 1. Сравнение экспериментальных и расчетных данных

Величина	Эксперимент	Теория
Индуктивность, L_0 , Гн	$(2...6) \cdot 10^{-7}$	$1,72 \cdot 10^{-7}$
Скорость, v , м/с	4...10	6
Ток, I , кА	80...120	90
Пространственная длительность процесса, x , мм	240	250
Ускорение, a , км/с ²	$2 \cdot 10^5$	$1,8 \cdot 10^5$

Таким образом, разработанная модель потенциальной ямы на примере коаксиального магнитоплазменного ускорителя позволяет наглядно проследить за движением частиц по низкочастотной спирали.

Низкочастотное спиральное движение есть суперпозиция движений:

- поперечного, обусловленного вращением частиц в поперечном направлении к магнитному полю и ограниченного потенциальным барьером, моделирующим поперечные размеры цилиндра;

- продольного – движение частиц вдоль оси цилиндра, параллельно магнитному полю. Это движение обусловлено магнитным давлением, толкающим плазменную субстанцию к выходу цилиндра. Соприкасаясь со стенками, частицы вызывают эрозию цилиндра и изменение массы плазмы.

Результаты

Предложен вид потенциальной ямы и силового поля, моделирующих пространственное ограничение разлета частиц плазмы. Установлены общие закономерности электроэрозийного износа поверхности ускорительного канала коаксиального магнитоплазменного ускорителя, которые определяются как энергетическими характеристиками, так и газодинамическими закономерностями гиперзвуковых струйных течений в цилиндрическом канале. Рассчитан баланс энергии с учетом эрозии.

Приведена таблица сравнения экспериментальных и теоретических данных, свидетельствующая в пользу удовлетворительной работы предложенной математической модели.

Список литературы

1. Колесников П.М. Электродинамическое ускорение плазмы. – М. : Атомиздат, 1971. – 388 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8: Электродинамика сплошных сред. – М. : Наука, 1992. – 664 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1: Механика. – М. : Наука, 2001. – 222 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2: Теория поля. – М. : Наука, 2001. – 533 с.
5. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. – М. : Физматлит, 2008. – 613 с.
6. Сивков А.А., Герасимов Д.Ю., Цыбина А.С. Электроэрозийная наработка материала в коаксиальном магнитоплазменном ускорителе для нанесения покрытий // Электротехника. – 2005. – № 6. – С. 25–38.
7. Сивков А.А., Исаев Ю.Н., Васильева О.В., Купцов А.М. Математическое моделирование коаксиального магнитоплазменного ускорителя // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 4. – С. 33-41.

Рецензенты:

Лукутин Б.В., д.т.н., заведующий кафедрой ЭПП ЭНИН ФГБОУ ВПО «НИ ТПУ», Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск.

Курец В.И., д.т.н., профессор кафедры ЭСиЭ ЭНИН ФГБОУ ВПО «НИ ТПУ», Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск.