УДК 656.02+351.811.12

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ЗАКОНА ЭРЛАНГА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Наумова Н. А., Данович Л. М., Данович Ю. И.

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет» Министерства образования и науки РФ, Краснодар, Россия (350072, Краснодар, ул. Московская, д.2-А), e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

Проблема моделирования и оптимизации распределения транспортных потоков по сети является актуальной. Эффективность решения задач макромоделирования зависит от аналитического задания функции транспортных затрат. В работе предлагается построение математической модели функционирования транспортной сети при условии справедливости гипотезы о распределении интервалов по времени между автомобилями в потоке по обобщенному закону Эрланга. Приведены плотность распределения, интегральная функция распределения и метод вычисления теоретических моментов для обобщенного распределения Эрланга. Разработан способ определения параметров обобщенного закона Эрланга по экспериментальным данным; доказана разрешимость этой задачи. Приведен метод проверки гипотезы о виде распределения интервалов по времени между автомобилями в потоке.

Ключевые слова: транспортные потоки, функция транспортных затрат, обобщенное распределение Эрланга, параметры распределения.

THE DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF THE DISTRIBUTION OF A GENERALIZED ERLANG LAW ON EXPERIMENTAL DATA IN THE STUDY OF TRANSPORT FLOWS

Naumova N. A., Danovich L. M., Danovich Y. I.

Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia (350072, Krasnodar, street Moskovskaya, 2-A), e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

The problems of modeling and optimization of the distribution of traffic flow on the network t is urgent. The efficiency of solving tasks macro-modeling depends on the analytical forms of the functions of transport costs. In the paper we construct a mathematical model of functioning of the transport network, subject to the justice of a hypothesis about the distribution of intervals of time between vehicles in the flow of the generalized Erlang law. The density of the distribution, the cumulative distribution function and a method of calculating the theoretical moments for generalized Erlang distribution was given. The method of determining the parameters of a generalized Erlang law on experimental data was developed; the existence of solution of this problem was proved. The method for testing the hypothesis about the distribution of intervals of time between the cars in the stream was introduced.

Keywords: transportation network, function of transport costs, generalized Erlang distribution, parameters of the distribution.

Введение

В середине прошлого века теория транспортных потоков образовала самостоятельную ветвь в прикладной математике. Существует большое количество математических моделей, отличающихся по математическому аппарату и степени детализации, позволяющих решать различные задачи по распределению транспортных потоков внутри сети. Задачи макромоделирования базируются на поиске равновесного распределения потоков, микромоделирование решает проблемы пропускных способностей локальных участков сетей [2]. Из-за различного характера гипотез, закладываемых в макро- и микромодели, задача обмена информацией между ними не решена ни теоретически, ни в виде программных продуктов.

Эффективность решения задачи поиска потокового равновесия во многом зависит от способа аналитического задания функции транспортных затрат. Авторами в работе [3] предложена математическая модель транспортной сети, которая базируется на гипотезе о распределении интервалов по времени по обобщенному закону Эрланга.

Функция распределения обобщенного закона Эрланга

Согласно проведенным авторами исследованиям [5], распределение интервалов по времени между требованиями в транспортном потоке при интенсивности движения по одной полосе до 300 авт/ч хорошо согласуется с законом Эрланга. Однако в более плотных потоках расхождение между теоретическим и эмпирическим распределениями становится существенным. Ряд авторов [1,4] утверждает, что с помощью обобщенного закона Эрланга можно аппроксимировать практически любое распределение случайной величины.

Простым обобщением специального распределения Эрланга порядка k является случай, при котором показательные распределения длительности k стадий имеют различные параметры $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{k-1}$. Преобразование Лапласа функции плотности такого распределения является рациональной функцией и имеет вид:

$$f^{(*)} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_{k-1}}{(s+\lambda_0)(s+\lambda_1)\cdot ... \cdot (s+\lambda_{k-1})}. \tag{1}$$

Для получения самой функции плотности распределения $f(t)$ необходимо разложить (1) на простые дроби с помощью метода неопределенных коэффициентов и найти оригинал по его изображению. В случае, если все параметры λ_i различны, функция плотности имеет вид:

$$f_k(t) = (-1)^{k-1} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \lambda_i \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda_i t}}{\prod\limits_{\substack{n=0 \\ n \neq j}}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_n)} \tag{2}$$

Если ввести следующие обозначения: $a_i = \prod\limits_{\substack{n=0 \\ n \neq i}}^{k-1} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_i}$, $\sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i = 1$,

то функция плотности распределения примет более простой вид:

$$f_k(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}. \tag{3}$$

При этих условиях нетрудно определить интегральную функцию распределения:

$$F^{(k)}(t) = \int_0^t \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i \lambda_i e^{-\lambda_i z} \right) dz = \sum_{i=0}^{k-1} (-a_i) \cdot \int_o^t e^{-\lambda_i z} d(-\lambda_i z) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} a_i e^{-\lambda_i t}. \tag{4}$$

Математическое ожидание для обобщенного закона Эрланга может быть получено с учетом его свойств и определения потока Эрланга:

$$M(T) = M\left(\sum_{i=0}^{k-1} T_i\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i} \ . \qquad (5)$$

Рассуждая аналогично, получим значение дисперсии для обобщенного закона Эрланга:

$$D(T) = D\left(\sum_{i=0}^{k-1} T_i\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(\lambda_i)^2} \ . \qquad (6)$$

Определение параметров обобщенного закона Эрланга по экспериментальным данным

Параметры обобщенного закона Эрланга авторы предлагают определять с помощью метода моментов, то есть, приравняв теоретические и эмпирические значения математического ожидания и дисперсии.

Пусть $k^* = \frac{\overline{x}_B^2}{\hat{s}^2}$, где $\overline{x}_B$ – выборочная средняя случайной величины T – интервалов между следующими подряд по одной полосе автомобилями; σ_B^2 – выборочная дисперсия случайной величины T. Параметр $k = [k^*] + 1$ – целое число, большее k^*.

Экспериментальные исследования авторов показали, что значение k^* для случайной величины T не превышает четырех.

Пусть $\lambda_i = x \cdot \lambda_{i-1}, i \geq 1$. В этом случае необходимо определить два неизвестных параметра: λ_0 и x.

При $k = 2$**.**

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} = \bar{x}_B \\ \frac{1}{(\lambda_0)^2} + \frac{1}{(\lambda_1)^2} = (\sigma_B)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_0} = \bar{x}_B \\ \frac{1}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\left(\bar{x}_B\right)^2 - (\sigma_B)^2}{2} \end{cases} .$$

Обозначим $y = \frac{1}{\lambda_0}$, $z = \frac{1}{\lambda_1}$, тогда $\begin{cases} y + z = \bar{x}_B \\ y \cdot z = \frac{\left(\bar{x}_B\right)^2 - (\sigma_B)^2}{2} \end{cases}$;

$$\begin{cases} y = \bar{x}_B - z \\ z^2 - \bar{x}_B \cdot z + \frac{\left(\bar{x}_B\right)^2 - (\sigma_B)^2}{2} = 0 \end{cases}$$

Переменная z является решением квадратного уравнения:

$$z^2 - \bar{x}_B \cdot z + \frac{\left(\bar{x}_B\right)^2 - (\sigma_B)^2}{2} = 0;$$

$$z_1 = \frac{\bar{x}_B - \sqrt{2(\sigma_B)^2 - (x_B)^2}}{2},\ z_1 = \frac{\bar{x}_B + \sqrt{2(\sigma_B)^2 - (x_B)^2}}{2}.$$

Таким образом, при условии $(\sigma_B)^2 < \left(\bar{x}_B\right)^2 < 2(\sigma_B)^2$ значения параметров:

$$\lambda_0 = \frac{2}{\bar{x}_B + \sqrt{2(\sigma_B)^2 - (\bar{x}_B)^2}},\ \lambda_1 = \frac{2}{\bar{x}_B - \sqrt{2(\sigma_B)^2 - (\bar{x}_B)^2}}. \qquad (7)$$

Найдем отношение $x = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$. Введем обозначение: $k^* = \frac{(\bar{x}_B)^2}{(\sigma_B)^2}$, тогда:

$$x = \frac{\bar{x}_B + \sqrt{2(\sigma_B)^2 - (\bar{x}_B)^2}}{\bar{x}_B - \sqrt{2(\sigma_B)^2 - (\bar{x}_B)^2}} = \frac{\sqrt{k^*} + \sqrt{2-k^*}}{\sqrt{k^*} - \sqrt{2-k^*}}.$$

Неравенство $(\sigma_B)^2 < \left(\bar{x}_B\right)^2 < 2(\sigma_B)^2$ равносильно следующему: $1 < k^* < 2$.

Последнее условие как раз и гарантирует наличие действительных значений параметров x, λ_0, λ_1.

При $k = 3$. Пусть $\lambda_1 = x \cdot \lambda_0, \lambda_2 = x \cdot \lambda_1 = x^2 \cdot \lambda_0$, тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \bar{x}_B \\ \frac{1}{(\lambda_0)^2} + \frac{1}{(\lambda_1)^2} + \frac{1}{(\lambda_2)^2} = (\sigma_B)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_0 x} + \frac{1}{\lambda_0 x^2} = \bar{x}_B \\ \frac{1}{(\lambda_0)^2} + \frac{1}{x^2(\lambda_0)^2} + \frac{1}{x^4(\lambda_0)^2} = (\sigma_B)^2 \end{cases}$$

После элементарных преобразований:

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right) = \bar{x}_B \\ \frac{1}{(\lambda_0)^2}\left(\frac{(x^2+x+1)(x^2+1)}{x^4}\right) = \frac{(\sigma_B)^2 + (x_B)^2}{2} \end{cases}.$$

Возведем первое уравнение в квадрат и разделим первое уравнение на второе. После упрощения получим квадратное уравнение:

$$x^2 \cdot \left((\bar{x}_B)^2 - (\sigma_B)^2\right) - x \cdot \left((\sigma_B)^2 + (x_B)^2\right) + \left((\bar{x}_B)^2 - (\sigma_B)^2\right) = 0.$$

При $(\sigma_B)^2 < \left(\bar{x}_B\right)^2 < 3(\sigma_B)^2$ корнями уравнения являются:

$$x=\frac{\left(\left(\bar{x}_B\right)^2+\left(\sigma_B\right)^2\right)\pm\sqrt{\left(-\left(\bar{x}_B\right)^2+3\left(\sigma_B\right)^2\right)\cdot\left(3\left(\bar{x}_B\right)^2-\left(\sigma_B\right)^2\right)}}{2\left(\left(\bar{x}_B\right)^2-\left(\sigma_B\right)^2\right)}, \qquad (8)$$

Учтем обозначение $k^*=\frac{\left(\bar{x}_B\right)^2}{\left(\sigma_B\right)^2}$, тогда

$x=\frac{\left(k^*+1\right)\pm\sqrt{\left(-k^*+3\right)\cdot\left(3k^*-1\right)}}{2\cdot\left(k^*-1\right)}$, при $1<k^*<3$.

Условие $1<k^*<3$ гарантирует наличие действительных корней.

После этого находим параметр λ_0:

$$\lambda_0=\frac{x^2+x+1}{x^2}\cdot\frac{1}{\bar{x}_B}. \qquad (9)$$

При $k=4$**.** Пусть $\lambda_1=x\cdot\lambda_0$, $\lambda_2=x\cdot\lambda_1=x^2\cdot\lambda_0$, $\lambda_3=x\cdot\lambda_2=x^3\cdot\lambda_0$.

$$\begin{cases}\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}=\bar{x}_B\\ \frac{1}{\left(\lambda_0\right)^2}+\frac{1}{\left(\lambda_1\right)^2}+\frac{1}{\left(\lambda_2\right)^2}+\frac{1}{\left(\lambda_3\right)^2}=\left(\sigma_B\right)^2\end{cases}$$

Составим систему уравнений с двумя неизвестными параметрами x и λ_0.

$$\begin{cases}\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_0 x}+\frac{1}{\lambda_0 x^2}+\frac{1}{\lambda_0 x^3}=\bar{x}_B\\ \frac{1}{\left(\lambda_0\right)^2}+\frac{1}{x^2\left(\lambda_0\right)^2}+\frac{1}{x^4\left(\lambda_0\right)^2}+\frac{1}{x^6\left(\lambda_0\right)^2}=\left(\sigma_B\right)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{x^3+x^2+x+1)}{x^3}\right)=\bar{x}_B;\\ \frac{1}{\left(\lambda_0\right)^2}\left(\frac{x^6+x^4+x^2+1)}{x^6}\right)=\left(\sigma_B\right)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{(x^2+1)(x+1)}{x^3}\right)=\bar{x}_B;\\ \frac{1}{\left(\lambda_0\right)^2}\left(\frac{(x^2+1)(x^4+1)}{x^6}\right)=\left(\sigma_B\right)^2\end{cases}$$

Возведем первое уравнение в квадрат и разделим первое уравнение на второе. После элементарных преобразований получим:

$$x^4\cdot\left(\frac{\left(\sigma_B\right)^2-\left(\bar{x}_B\right)^2}{2}\right)+x^3\cdot\left(\sigma_B\right)^2+x^2\cdot\left(\sigma_B\right)^2+x\cdot\left(\sigma_B\right)^2+\left(\frac{\left(\sigma_B\right)^2-\left(\bar{x}_B\right)^2}{2}\right)=0.$$

Это уравнение четвертой степени с симметричными коэффициентами, сводится к квадратному с помощью замены переменной: $x+\frac{1}{x}=y,\ \ x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Следовательно:

$$\left(\frac{\left(\sigma_B\right)^2-\left(\bar{x}_B\right)^2}{2}\right)\cdot y^2+\left(\sigma_B\right)^2\cdot y+\left(\bar{x}_B\right)^2=0$$

При условии $(\sigma_B)^2 < \left(\bar{x}_B\right)^2$ положительным решением уравнения является:

$$y = \frac{(\sigma_B)^2 + \sqrt{\left((\bar{x}_B)^2 - (\sigma_B)^2\right)^2 + (\bar{x}_B)^4}}{(\bar{x}_B)^2 - (\sigma_B)^2}. \qquad (10)$$

Тогда:

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}; \; \lambda_0 = \frac{(x^2+1)(x+1)}{x^3} \cdot \frac{1}{\bar{x}_B}. \qquad (11)$$

Учитывая, что $(\sigma_B)^2 < \left(\bar{x}_B\right)^2$, то есть $k^* > 1$, найдем условие, гарантирующее наличие действительных значений переменной x:

$$y > 2, \qquad \frac{1 + \sqrt{(k^*-1)^2 + (k^*)^2}}{k^* - 1} > 2, \qquad \sqrt{(k^*-1)^2 + (k^*)^2} > 2k^* - 3.$$

При $1 < k^* \le 1{,}5$ неравенство выполнено. При $k^* > 1{,}5$:

$$(k^*-1)^2 + (k^*)^2 > 4(k^*)^2 - 12k^* + 9, \qquad (k^*)^2 - 5k^* + 4 < 0, \qquad \begin{cases} k^* > 1{,}5, \\ 1 < k^* < 4 \end{cases}.$$

Таким образом, условие $1 < k^* < 4$ гарантирует наличие действительных значений переменной x.

Отметим, что если $k^* = \frac{\bar{x}_B^2}{\hat{s}^2}$ – целое число, то для всех $k \in \{2, 3, 4\}$значение $x = 1$, а, следовательно, все λ_i совпадают. Таким образом, получим специальное распределение Эрланга, подробно рассмотренное в работах [5,6].

Алгоритм проверки гипотезы о виде распределения интервалов по времени по обобщенному закону Эрланга

Адекватность гипотезы о распределении интервалов между автотранспортными средствами по обобщенному закону Эрланга можно проверить по следующему алгоритму:

1) при помощи эксперимента получить зависимость между $T_i = (t_i; t_{i+1})$– интервалом (по времени) между двумя последовательными прибытиями автомобилей, двигающихся в данном направлении, и количеством n_i таких интервалов, появившихся в результате эксперимента;

2) вычислить эмпирические моменты:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i t_i}{N}, \quad \sigma_B^2 = \frac{\sum_{i-1}^{N} n_i (t_i - \bar{x}_B)^2}{N}, \text{ где } N \text{ – объем выборки.}$$

3) найти вероятность p_i попадания случайной величины T в каждый интервал $T_i = (t_i; t_{i+1})$ по формуле:

$$p_i = F^{(k)}(t_{i+1}) - F^{(k)}(t_i).$$

Тогда теоретическое число значений, попавших в интервал $T_i = (t_i; t_{i+1})$, рассчитывается по формуле:

$$n_{teor} = N \cdot p_i .$$

4) в качестве меры расхождения эмпирических частот и теоретических используется критерий Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{L} \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i} \qquad (12)$$

с $(L-3)$ степенями свободы.

Также можно использовать критерий Романовского:

$$R = \frac{\chi^2 - \nu}{\sqrt{2\nu}}, \quad \nu = K - 3, \qquad (13)$$

где K – число разрядов. Если $R < 3$, то сходимость считается хорошей.

Заключение

Авторами разработана математическая модель транспортной сети, в которой поток на дугах графа задан как функция плотности распределения интервалов по времени между автотранспортными средствами; выведено аналитическое задание функции транспортных затрат при условии справедливости гипотезы о распределении интервалов по времени по обобщенному закону Эрланга. В данной работе приведен метод определения параметров для работы с вышеуказанной моделью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект р-юг-а-13-08-96502.

Список литературы

1. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.

2. Гасников А. В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / А. В. Гасников, С. Л. Кленов, Е. А. Нурминский, Я. А. Холодов, Н. Б. Шамрай / Под ред. А. В. Гасникова. – М.: МФТИ, 2010. – 362 с.

3. Наумова Н. А. Метод определения функции транспортных затрат в узловых точках сети // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 8 (часть 4). – С. 853-857.
4. Cox, D. R., Smith, W. L., Queues, Methuen, London, 1961.
5. Naumova N. A. Problems of Optimisation of Flows Distribution in the Network // Applied Mathematics. – 2013. – Vol. 3, No. 1. – P. 12-19. doi: 10.5923/j.am.20130301.02.
6. Naumova, N., Danovich, L. Modelling and Optimisation of Flows Distribution in the Network// Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 2, No. 5. – P. 171-175. doi: 10.5923/j.am. 20120205. 04.

Рецензенты:

Атрощенко В.А., д.т.н., профессор, декан факультета компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет» Министерства образования и науки РФ, г. Краснодар.

Видовский Л.А., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой вычислительной техники и автоматизированных систем управления ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет» Министерства образования и науки РФ, г. Краснодар.