

СМЕШАННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Лавыгин Д.С.¹

¹ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный университет», Ульяновск, Россия (432017, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42), e-mail: vdm.inbox@gmail.com

Построен алгоритм смешанного метода конечных элементов в трехмерной теории термоупругости. Формулировка трехмерной задачи теории упругости с использованием кубического конечного элемента потребовала получения соответствующих функций формы, которые были определены через тензорные произведения одномерных аппроксимирующих функций. Математическими преобразованиями получены четыре матрицы узловых коэффициентов. Установлено, что при использовании ортогональных финитных функций в каждой из трех матриц с производными происходит четырехкратное уменьшение количества ненулевых элементов, а матрица без производных приводится к диагональному виду, что в конечном итоге должно привести к значительному снижению количества ненулевых элементов глобальной разреженной системы и ускорению расчетов. Новые алгоритмы и модели реализованы в комплексе программ ViSolver, позволяющем получать решения сложных технических задач, характеризующиеся высокой точностью и гладкостью как перемещений и углов, так и деформаций и напряжений, за минимальное, по сравнению с другими смешанными методами конечных элементов, время.

Ключевые слова: метод конечных элементов, смешанные методы, ортогональные финитные функции, формообразование в роликовых калибрах.

MIXED FINITE ELEMENT METHOD IN THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

Lavygin D.S.¹

¹Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia (432017, Ulyanovsk, Leo Tolstoy St., 42), e-mail: vdm.inbox@gmail.com

We have built the algorithm of mixed finite element method in the three-dimensional theory of thermoelasticity. The formulation of the three-dimensional problem with cube-shaped finite element demanded creating appropriate shape functions, which was defined by tensor products of one-dimensional approximate functions. Four nodal matrices was built. Revealed that using the orthogonal finite functions in each of three nodal matrices with derivatives leads to fourfold reduce count of non-zero elements. The nodal matrix without derivatives can be represented as diagonal matrix that will leads as a result to significant reduce of non-zero elements of the global sparse system and accelerate calculations. New algorithms and models was released in form of software complex ViSolver, which let to solve the hard technical problems with high smoothness and precision for displacements, angles, strains and stresses.

Keywords: finite element method, mixed schemes, orthogonal finite functions, roll forming

Введение

Применение смешанного метода конечных элементов (МКЭ) совместно с ортогональными финитными функциями (ОФФ) для решения краевых задач трехмерной теории упругости позволяет получать результаты, обладающие уравновешенной точностью и гладкостью [1]. Однако существенным недостатком смешанного метода конечных элементов является высокая размерность получаемых сеточных систем уравнений. В данной статье предлагается новый алгоритм решения задач трехмерной теории упругости в форме смешанного метода конечных элементов с использованием ОФФ, что позволило преодолеть недостатки этого метода.

Цель исследования

Разработка алгоритма смешанного метода конечных элементов с использованием ортогональных финитных функций для решения технических задач трехмерной теории упругости.

Методы и результаты исследований

В рамках работы были использованы методы конечно-элементного моделирования, численные методы решения систем линейных уравнений, объектно-ориентированного и структурного программирования, вариационного исчисления и механики сплошных сред.

Система уравнений трехмерной задачи теории упругости состоит из трех уравнений равновесия и шести соотношений обобщенного закона Гука с учетом термоупругости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + f_1 = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} + f_2 = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + f_3 = 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha \vartheta, \\ \frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha \vartheta, \\ \frac{\partial U_3}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \alpha \vartheta, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{2G} \sigma_{12}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2G} \sigma_{13}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial y} \right) = \frac{1}{2G} \sigma_{23}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где σ_{ij} — компоненты симметричного тензора напряжений $\bar{\sigma}$, U_i — компоненты вектора перемещений \vec{U} , f_i — компоненты вектора объемных сил, α — коэффициент линейного теплового расширения, ϑ — заданное поле температуры, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига.

Функционал Рейсснера [4] для данной задачи запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} R(\bar{\sigma}, \vec{U}) = & \frac{1}{2} \iiint_V \{ U_1 \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + 2f_1 \right) + \\ & + U_2 \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} + 2f_2 \right) + U_3 \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + 2f_3 \right) - \\ & - \sigma_{11} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] - 2\alpha \vartheta \right) - \\ & - \sigma_{22} \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} - \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] - 2\alpha \vartheta \right) - \\ & - \sigma_{33} \left(\frac{\partial U_3}{\partial z} - \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] - 2\alpha \vartheta \right) - \sigma_{12} \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\sigma_{12}}{G} \right) - \\ & - \sigma_{13} \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial x} - \frac{\sigma_{13}}{G} \right) - \sigma_{23} \left(\frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial y} - \frac{\sigma_{23}}{G} \right) \} dV. \end{aligned} \quad (2)$$

Отыскиваемые величины в матричной форме для каждого конечного элемента обозначаются так:

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}^{(e)} &= \sigma_{ab}^{(ijklmnop)} = (\sigma_{(ab)i}, \sigma_{(ab)j}, \sigma_{(ab)k}, \sigma_{(ab)l}, \sigma_{(ab)m}, \sigma_{(ab)n}, \sigma_{(ab)o}, \sigma_{(ab)p})^T, \\ U_a^{(e)} &= U_a^{(ijklmnop)} = (U_{(a)i}, U_{(a)j}, U_{(a)k}, U_{(a)l}, U_{(a)m}, U_{(a)n}, U_{(a)o}, U_{(a)p})^T, \end{aligned} \quad (3)$$

где e — номер элемента, $ijklmnop$ — номера узлов, соответствующих данному элементу с индексом e .

Локальная матрица аппроксимирующих функций записывается в виде:

$$\Phi^{(e)} = \Phi^{(ijklmnop)} = (\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k, \varphi_l, \varphi_m, \varphi_n, \varphi_o, \varphi_p). \quad (4)$$

Функционал (2) после подстановки в него в качестве отыскиваемых величин их произведений с аппроксимирующими функциями в матричной форме (например, $\sigma_{11} = \sum_{e=1}^n \Phi^{(e)} \sigma_{11}^{(e)}$) принимает вид:

$$\begin{aligned} R(\bar{\sigma}, \vec{U}) = & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n \iiint_{V^{(e)}} \left\{ \left(\frac{\partial(\Phi^{(e)} \sigma_{11}^{(e)})}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi^{(e)} \sigma_{12}^{(e)})}{\partial y} + \frac{\partial(\Phi^{(e)} \sigma_{13}^{(e)})}{\partial z} + \right. \right. \\ & + 2f_1) \Phi^{(e)} U_1^{(e)} + \left(\frac{\partial(\Phi^{(e)} \sigma_{21}^{(e)})}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi^{(e)} \sigma_{22}^{(e)})}{\partial y} + \frac{\partial(\Phi^{(e)} \sigma_{23}^{(e)})}{\partial z} + 2f_2) \Phi^{(e)} U_2^{(e)} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial(\Phi^{(e)} \sigma_{31}^{(e)})}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi^{(e)} \sigma_{32}^{(e)})}{\partial y} + \frac{\partial(\Phi^{(e)} \sigma_{33}^{(e)})}{\partial z} + 2f_3) \Phi^{(e)} U_3^{(e)} - \right. \\ & - \left(\frac{\partial(\Phi^{(e)} U_1^{(e)})}{\partial x} - \frac{1}{E} \left[\Phi^{(e)} \sigma_{11}^{(e)} - \nu(\Phi^{(e)} \sigma_{22}^{(e)} + \Phi^{(e)} \sigma_{33}^{(e)}) \right] - 2\alpha\vartheta) \Phi^{(e)} \sigma_{11}^{(e)} - \right. \\ & - \left(\frac{\partial(\Phi^{(e)} U_2^{(e)})}{\partial y} - \frac{1}{E} \left[\Phi^{(e)} \sigma_{22}^{(e)} - \nu(\Phi^{(e)} \sigma_{11}^{(e)} + \Phi^{(e)} \sigma_{33}^{(e)}) \right] - 2\alpha\vartheta) \Phi^{(e)} \sigma_{22}^{(e)} - \right. \\ & - \left(\frac{\partial(\Phi^{(e)} U_3^{(e)})}{\partial z} - \frac{1}{E} \left[\Phi^{(e)} \sigma_{33}^{(e)} - \nu(\Phi^{(e)} \sigma_{11}^{(e)} + \Phi^{(e)} \sigma_{22}^{(e)}) \right] - 2\alpha\vartheta) \Phi^{(e)} \sigma_{33}^{(e)} - \right. \\ & - \left(\frac{\partial(\Phi^{(e)} U_1^{(e)})}{\partial y} + \frac{\partial(\Phi^{(e)} U_2^{(e)})}{\partial x} - \frac{\Phi^{(e)} \sigma_{12}^{(e)}}{G} \right) \Phi^{(e)} \sigma_{12}^{(e)} - \\ & - \left(\frac{\partial(\Phi^{(e)} U_1^{(e)})}{\partial z} + \frac{\partial(\Phi^{(e)} U_3^{(e)})}{\partial x} - \frac{\Phi^{(e)} \sigma_{13}^{(e)}}{G} \right) \Phi^{(e)} \sigma_{13}^{(e)} - \\ & \left. - \left(\frac{\partial(\Phi^{(e)} U_2^{(e)})}{\partial z} + \frac{\partial(\Phi^{(e)} U_3^{(e)})}{\partial y} - \frac{\Phi^{(e)} \sigma_{23}^{(e)}}{G} \right) \Phi^{(e)} \sigma_{23}^{(e)} \right\} dV^{(e)}. \quad (5) \end{aligned}$$

Введем обозначения матричных коэффициентов, содержащих частные производные по x , y и z :

$$A_x^{(e)} = \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial x}, \quad A_y^{(e)} = \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial y}, \quad A_z^{(e)} = \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial z}. \quad (6)$$

С помощью преобразований:

$$\begin{aligned}
\Phi^{(e)} X^{(e)} \Phi^{(e)} Y^{(e)} &= (\Phi^{(e)} Y^{(e)})^T (\Phi^{(e)} X^{(e)})^T = (Y^{(e)})^T (\Phi^{(e)})^T \Phi^{(e)} X^{(e)}, \\
A_x^{(e)} X^{(e)} \Phi^{(e)} Y^{(e)} &= (\Phi^{(e)} Y^{(e)})^T (A_x^{(e)} X^{(e)})^T = (Y^{(e)})^T (\Phi^{(e)})^T A_x^{(e)} X^{(e)}, \\
A_y^{(e)} X^{(e)} \Phi^{(e)} Y^{(e)} &= (\Phi^{(e)} Y^{(e)})^T (A_y^{(e)} X^{(e)})^T = (Y^{(e)})^T (\Phi^{(e)})^T A_y^{(e)} X^{(e)}, \\
A_z^{(e)} X^{(e)} \Phi^{(e)} Y^{(e)} &= (\Phi^{(e)} Y^{(e)})^T (A_z^{(e)} X^{(e)})^T = (Y^{(e)})^T (\Phi^{(e)})^T A_z^{(e)} X^{(e)},
\end{aligned} \tag{7}$$

которые позволяют вынести из под знака интеграла величины $X^{(e)}, Y^{(e)}$, независящие от x, y или z и представляющие собой одну из величин из (3), получим функционал, представляющий собой дискретную модель трехмерного упругого тела:

$$\begin{aligned}
R(\bar{\sigma}, \bar{U}) &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n \{ (U_1^{(e)})^T (\tilde{A}_x^{(e)} \sigma_{11}^{(e)} + \tilde{A}_y^{(e)} \sigma_{12}^{(e)} + \tilde{A}_z^{(e)} \sigma_{13}^{(e)} + 2\tilde{\Phi}^{(e)} f_1) + \\
&\quad + (U_2^{(e)})^T (\tilde{A}_x^{(e)} \sigma_{21}^{(e)} + \tilde{A}_y^{(e)} \sigma_{22}^{(e)} + \tilde{A}_z^{(e)} \sigma_{23}^{(e)} + 2\tilde{\Phi}^{(e)} f_2) + \\
&\quad + (U_3^{(e)})^T (\tilde{A}_x^{(e)} \sigma_{31}^{(e)} + \tilde{A}_y^{(e)} \sigma_{32}^{(e)} + \tilde{A}_z^{(e)} \sigma_{33}^{(e)} + 2\tilde{\Phi}^{(e)} f_3) - \\
&\quad - (\sigma_{11}^{(e)})^T (\tilde{A}_x^{(e)} U_1^{(e)} - \frac{1}{E} [\tilde{B}^{(e)} \sigma_{11}^{(e)} - \nu(\tilde{B}^{(e)} \sigma_{22}^{(e)} + \tilde{B}^{(e)} \sigma_{33}^{(e)})] - 2\alpha \tilde{\Phi}^{(e)} \vartheta) - \\
&\quad - (\sigma_{22}^{(e)})^T (\tilde{A}_y^{(e)} U_2^{(e)} - \frac{1}{E} [\tilde{B}^{(e)} \sigma_{22}^{(e)} - \nu(\tilde{B}^{(e)} \sigma_{11}^{(e)} + \tilde{B}^{(e)} \sigma_{33}^{(e)})] - 2\alpha \tilde{\Phi}^{(e)} \vartheta) - \\
&\quad - (\sigma_{33}^{(e)})^T (\tilde{A}_z^{(e)} U_3^{(e)} - \frac{1}{E} [\tilde{B}^{(e)} \sigma_{33}^{(e)} - \nu(\tilde{B}^{(e)} \sigma_{11}^{(e)} + \tilde{B}^{(e)} \sigma_{22}^{(e)})] - 2\alpha \tilde{\Phi}^{(e)} \vartheta) - \\
&\quad - (\sigma_{12}^{(e)})^T (\tilde{A}_y^{(e)} U_1^{(e)} + \tilde{A}_x^{(e)} U_2^{(e)} - \frac{1}{G} \tilde{B}^{(e)} \sigma_{12}^{(e)}) - \\
&\quad - (\sigma_{13}^{(e)})^T (\tilde{A}_z^{(e)} U_1^{(e)} + \tilde{A}_x^{(e)} U_3^{(e)} - \frac{1}{G} \tilde{B}^{(e)} \sigma_{13}^{(e)}) - \\
&\quad - (\sigma_{23}^{(e)})^T (\tilde{A}_z^{(e)} U_2^{(e)} + \tilde{A}_y^{(e)} U_3^{(e)} - \frac{1}{G} \tilde{B}^{(e)} \sigma_{23}^{(e)}) \},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_x^{(e)} &= \iiint_{V^{(e)}} (\Phi^{(e)})^T A_x^{(e)} dV^{(e)}, & \tilde{A}_y^{(e)} &= \iiint_{V^{(e)}} (\Phi^{(e)})^T A_y^{(e)} dV^{(e)}, \\
\tilde{A}_z^{(e)} &= \iiint_{V^{(e)}} (\Phi^{(e)})^T A_z^{(e)} dV^{(e)}, & \tilde{B}^{(e)} &= \iiint_{V^{(e)}} (\Phi^{(e)})^T \Phi^{(e)} dV^{(e)},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\tilde{\Phi}^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} (\Phi^{(e)})^T dV^{(e)}.$$

Форма применяемого конечного элемента показана на рис. 1.

Трехмерные аппроксимирующие функции матрицы (4) определяются тензорными произведениями одномерных функций Куранта [5] или ортогональных финитных функций [1, 2, 3]:

$$\varphi_j(x, y, z) = \varphi_{right}(x) \times \varphi_{left}(y) \times \varphi_{left}(z), \tag{10}$$

где φ_{right} является правой частью функций, а φ_{left} — их левой частью относительно центра конечного носителя функции. Таким образом, при подстановке функций Куранта, функция $\varphi_j(x, y, z)$ имеет вид:

$$\varphi_j(x, y, z) = \frac{(x_i - x)(y - y_m)(z - z_l)}{(x_i - x_j)(y_i - y_m)(z_i - z_l)}. \tag{11}$$

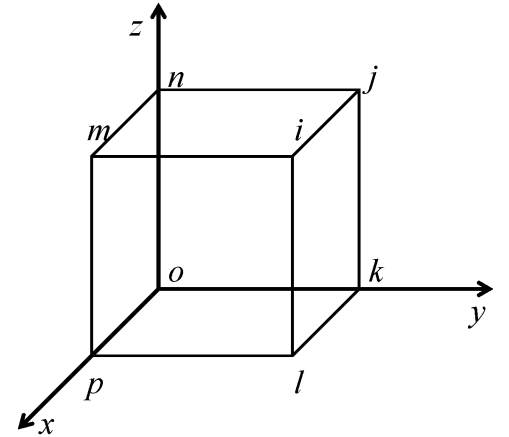


Рисунок 1— Форма трехмерного конечного элемента

Аналогичным образом определяются функции для всех остальных узлов:

$$\begin{aligned}
 \varphi_i(x, y, z) &= \varphi_{left}(x) \times \varphi_{left}(y) \times \varphi_{left}(z), \\
 \varphi_k(x, y, z) &= \varphi_{right}(x) \times \varphi_{left}(y) \times \varphi_{right}(z), \\
 \varphi_l(x, y, z) &= \varphi_{left}(x) \times \varphi_{left}(y) \times \varphi_{right}(z), \\
 \varphi_m(x, y, z) &= \varphi_{left}(x) \times \varphi_{right}(y) \times \varphi_{left}(z), \\
 \varphi_n(x, y, z) &= \varphi_{right}(x) \times \varphi_{right}(y) \times \varphi_{left}(z), \\
 \varphi_o(x, y, z) &= \varphi_{right}(x) \times \varphi_{right}(y) \times \varphi_{right}(z), \\
 \varphi_p(x, y, z) &= \varphi_{left}(x) \times \varphi_{right}(y) \times \varphi_{right}(z).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Интегрирование выражений (9) приводит к получению основных матриц аппроксимирующих функций, которые для функций Куранта имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_x^{(e)} &= \frac{S_{yz}^{(e)}}{k_a} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \tilde{A}_y^{(e)} &= \frac{S_{xz}^{(e)}}{k_a} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
 \tilde{A}_z^{(e)} &= \frac{S_{xy}^{(e)}}{k_a} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \tilde{B}^{(e)} &= \frac{V^{(e)}}{k_b} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \\
 \tilde{\Phi}^{(e)} &= \frac{V^{(e)}}{8} (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T,
 \end{aligned}$$

где $S_{yz}^{(e)}, S_{xz}^{(e)}, S_{xy}^{(e)}$ — площади граней конечного элемента e , параллельных плоскостям yOz, xOz, xOy соответственно; $V^{(e)}$ — объем конечного элемента e . Для функций Куранта $k_a = 18, k_b = 27$, для ортогональных финитных функций $k_a = k_b = 8$. При использовании ортогональных финитных функций все элементы представленных матриц, отличные от 1 или -1 , равны нулю, что приводит к четырехкратному уменьшению количества коэффициентов для каждой из матриц с производными и к восьмикратному уменьшению

количества коэффициентов матрицы $\tilde{B}^{(e)}$, для которой ненулевыми останутся только элементы главной диагонали.

Продифференцируем функционал $R(\bar{\sigma}, \bar{U})^{(e)}$ для элемента (e) по переменным i -го узла $\sigma_{11}^i, \sigma_{22}^i, \sigma_{33}^i, \sigma_{12}^i, \sigma_{13}^i, \sigma_{23}^i, U_1^i, U_2^i$ и U_3^i , приравнявая результат к нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(\bar{\sigma}, \bar{U})^{(e)}}{\partial U_1^i} &= \frac{\partial (U_1^{(e)})^T}{\partial U_1^i} (\Delta \tilde{A}_x^{(e)} \sigma_{11}^{(e)} + \Delta \tilde{A}_y^{(e)} \sigma_{12}^{(e)} + \Delta \tilde{A}_z^{(e)} \sigma_{13}^{(e)} + 2\tilde{\Phi}^{(e)} f_1) = 0, \\ \frac{\partial R(\bar{\sigma}, \bar{U})^{(e)}}{\partial U_2^i} &= \frac{\partial (U_2^{(e)})^T}{\partial U_2^i} (\Delta \tilde{A}_x^{(e)} \sigma_{21}^{(e)} + \Delta \tilde{A}_y^{(e)} \sigma_{22}^{(e)} + \Delta \tilde{A}_z^{(e)} \sigma_{23}^{(e)} + 2\tilde{\Phi}^{(e)} f_2) = 0, \\ \frac{\partial R(\bar{\sigma}, \bar{U})^{(e)}}{\partial U_3^i} &= \frac{\partial (U_3^{(e)})^T}{\partial U_3^i} (\Delta \tilde{A}_x^{(e)} \sigma_{31}^{(e)} + \Delta \tilde{A}_y^{(e)} \sigma_{32}^{(e)} + \Delta \tilde{A}_z^{(e)} \sigma_{33}^{(e)} + 2\tilde{\Phi}^{(e)} f_3) = 0, \\ \frac{\partial R(\bar{\sigma}, \bar{U})^{(e)}}{\partial \sigma_{11}^i} &= \frac{\partial (\sigma_{11}^{(e)})^T}{\partial \sigma_{11}^i} (\Delta \tilde{A}_x^{(e)} U_1^{(e)} - \frac{1}{E} [\tilde{B}^{(e)} \sigma_{11}^{(e)} - 2\nu(\tilde{B}^{(e)} \sigma_{22}^{(e)} + \tilde{B}^{(e)} \sigma_{33}^{(e)})]) - 2\alpha \tilde{\Phi}^{(e)} \vartheta = 0, \\ \frac{\partial R(\bar{\sigma}, \bar{U})^{(e)}}{\partial \sigma_{22}^i} &= \frac{\partial (\sigma_{22}^{(e)})^T}{\partial \sigma_{22}^i} (\Delta \tilde{A}_y^{(e)} U_2^{(e)} - \frac{1}{E} [\tilde{B}^{(e)} \sigma_{22}^{(e)} - 2\nu(\tilde{B}^{(e)} \sigma_{11}^{(e)} + \tilde{B}^{(e)} \sigma_{33}^{(e)})]) - 2\alpha \tilde{\Phi}^{(e)} \vartheta = 0, \\ \frac{\partial R(\bar{\sigma}, \bar{U})^{(e)}}{\partial \sigma_{33}^i} &= \frac{\partial (\sigma_{33}^{(e)})^T}{\partial \sigma_{33}^i} (\Delta \tilde{A}_z^{(e)} U_3^{(e)} - \frac{1}{E} [\tilde{B}^{(e)} \sigma_{33}^{(e)} - 2\nu(\tilde{B}^{(e)} \sigma_{11}^{(e)} + \tilde{B}^{(e)} \sigma_{22}^{(e)})]) - 2\alpha \tilde{\Phi}^{(e)} \vartheta = 0, \\ \frac{\partial R(\bar{\sigma}, \bar{U})^{(e)}}{\partial \sigma_{12}^i} &= \frac{\partial (\sigma_{12}^{(e)})^T}{\partial \sigma_{12}^i} (\Delta \tilde{A}_y^{(e)} U_1^{(e)} + \Delta \tilde{A}_x^{(e)} U_2^{(e)} - \frac{1}{G} \tilde{B}^{(e)} \sigma_{12}^{(e)}) = 0, \\ \frac{\partial R(\bar{\sigma}, \bar{U})^{(e)}}{\partial \sigma_{13}^i} &= \frac{\partial (\sigma_{13}^{(e)})^T}{\partial \sigma_{13}^i} (\Delta \tilde{A}_z^{(e)} U_1^{(e)} + \Delta \tilde{A}_x^{(e)} U_3^{(e)} - \frac{1}{G} \tilde{B}^{(e)} \sigma_{13}^{(e)}) = 0, \\ \frac{\partial R(\bar{\sigma}, \bar{U})^{(e)}}{\partial \sigma_{23}^i} &= \frac{\partial (\sigma_{23}^{(e)})^T}{\partial \sigma_{23}^i} (\Delta \tilde{A}_z^{(e)} U_2^{(e)} + \Delta \tilde{A}_y^{(e)} U_3^{(e)} - \frac{1}{G} \tilde{B}^{(e)} \sigma_{23}^{(e)}) = 0.\end{aligned}$$

Выражения в круглых скобках образуют локальную подсистему для узла i конечного элемента (e) , где $\Delta \tilde{A}_x^{(e)} = \tilde{A}_x^{(e)} - (\tilde{A}_x^{(e)})^T$, $\Delta \tilde{A}_y^{(e)} = \tilde{A}_y^{(e)} - (\tilde{A}_y^{(e)})^T$, $\Delta \tilde{A}_z^{(e)} = \tilde{A}_z^{(e)} - (\tilde{A}_z^{(e)})^T$. Задание граничных условий приводит к возникновению дополнительных слагаемых в соответствующих уравнениях локальных подсистем. В частности, если узел i закреплен по оси X (не может перемещаться вдоль данной оси), то во всех уравнениях, содержащих коэффициенты с производными, при величинах $U_1, \sigma_{11}, \sigma_{12}$, и σ_{13} возникают дополнительные слагаемые $\Delta \tilde{B}_x^{(e)} = \tilde{A}_x^{(e)} + (\tilde{A}_x^{(e)})^T$, $\Delta \tilde{B}_y^{(e)} = \tilde{A}_y^{(e)} + (\tilde{A}_y^{(e)})^T$, $\Delta \tilde{B}_z^{(e)} = \tilde{A}_z^{(e)} + (\tilde{A}_z^{(e)})^T$.

Построение глобальной матрицы жесткости осуществляется непосредственной подстановкой коэффициентов локальных подматриц для каждого из узлов конечного элемента.

Верификация алгоритма была проведена при решении технологических задач формообразования, в числе которых моделирование формообразования профиля специальной формы из перфорированной ленты. Целью моделирования являлась разработка схемы формообразования и получение технологических параметров формообразующего инструмента. В качестве материала при моделировании профиля была выбрана сталь 08кп.

Особенностью схемы формообразования являлось исключение контакта формообразующего инструмента с перфорированными областями профиля (рис. 2).

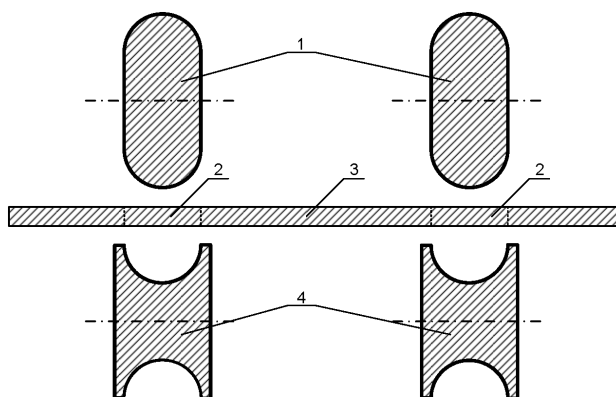


Рисунок 2 – Моделируемая схема формообразования профиля корытообразного типа специальной формы: 1 — верхние ролики; 2 — угловые зоны профиля; 3 — перфорированная лента (заготовка); 4 — нижние ролики

Характерной особенностью формообразования в роликовых калибрах является постоянный контакт инструмента (роликов) с поверхностями заготовки. В данном случае ставилась задача исключения контакта боковой поверхности с перфорированной частью заготовки. При этом область пластических деформаций (угловая зона) должна быть локализована только в специально предназначенной неперфорированной области заготовки (рис. 3).

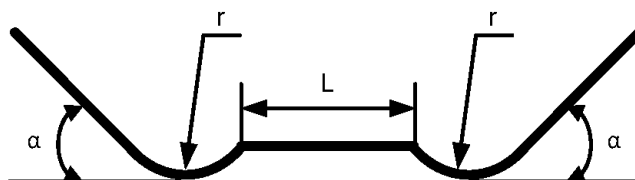
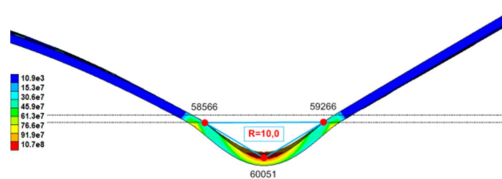
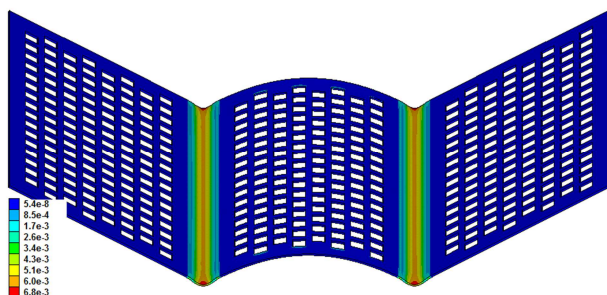


Рисунок 3 – Сечение искомого профиля: r — требуемый радиус скругления; α — требуемый угол подгибки полки профиля; L — протяженность плоского участка дна профиля

Постпроцессорная обработка (рис. 4) позволила получить требуемые технологические параметры для каждого перехода: угол подгибки полок профиля, угол изгиба дна профиля, величину перемещения инструмента и радиус скругления угловых зон.



а)

б)

Рисунок 4 – Величина деформации элементов профиля (а) и угловой зоны (б) на третьем этапе формообразования

Технологические параметры формообразования профиля, полученные в результате конечно-элементного моделирования, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты конечно-элементного моделирования

Параметры	Технологические переходы		
	I	II	III
Угол подгибки полки α , град.	8,0	15,0	33,5
Прирост угла подгибки полки, град.		7,0	18,5
Угол отклонения дна β , град.	5,0	10,0	20,0
Суммарный угол подгибки α^{Σ} , град.	13,0	25,0	53,5
Радиус угловой зоны r , мм	23,8	16,7	10,0
Перемещение инструмента, мм	1,6	3,2	5,6
Контролируемый размер L , мм	112	112	112

Выводы

Предложенный алгоритм был программно реализован в авторском комплексе конечно-элементного анализа в смешанной форме ViSolver (свидетельство о государственной регистрации № 2012617956 от 3 сентября 2013 г.). Анализ результатов был произведен в программной среде ViPost, которая является составной частью комплекса ViSolver.

В результате проделанной работы была получена схема формообразования и основные технологические параметры процесса. Проведен расчет суммарной величины подгибки полок профиля.

Список литературы

1. Леонтьев В. Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2003. – 177 с.
2. Лавыгин Д.С., Леонтьев В.Л. Смешанный вариационно-сеточный метод, связанный с ортогональными финитными функциями, в задачах теории стержней // Прикладная математика и механика. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – С. 362-367.

3. Лавыгин Д.С., Леонтьев В.Л. Смешанный метод конечных элементов, связанный с использованием ортогональных финитных функций // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – С. 142-146.
4. Reissner, E. On a variational theorem in elasticity // Journal of Mathematical Physics. – 1950. – V. 29. - № 2. – P. 90-95.
5. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – V. 49. - № 1. – P. 1-23.

Рецензенты

Антонов И.С., д.т.н., зав. кафедрой проектирования и сервиса автомобилей, ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный университет», г. Ульяновск.

Светухин В.В., д.ф.-м.н., профессор, директор научно-исследовательского технологического института УлГУ, ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный университет», г. Ульяновск.