УДК 372.851

ИГРЫ С БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ. ОБ ОДНОЙ ТРЕНИРОВОЧНОЙ ЗАДАЧЕ ЕГЭ

[1]Попырин А.В., [1]Савина Л.Н.

[1]*Елабужский институт ФГАОУ ВПО «Казанского (Приволжского) федерального университета», Елабуга, РТ, Россия (423600, г. Елабуга, ул. Казанская, 89), e-mail: elabuga@kpfu*

В статье анализируется недостаточно обоснованное решение известной тренировочной задачи С6 из сборника: ЕГЭ-2013. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. - М. : Национальное образование, 2012. – 192 с. Приведенное в сборнике решение требует, например, от школьников знания условий, при которых для числовых рядов выполняются сочетательный и переместительный законы. Эти условия изучаются лишь в вузе. Без знания этих условий перенос свойств конечных сумм на бесконечные может привести к противоречиям. В настоящей статье приводится другое решение этой задачи. Оно основано на свойствах сравнений по величине обыкновенных дробей. Кстати, при таком подходе легко можно найти все обыкновенные дроби, удовлетворяющие решению этой задачи. Используемым инструментарием школьники владеют свободно.

Ключевые слова: подготовка к ЕГЭ, задача группы С, бесконечная десятичная дробь.

GAMES WITH PERPETUITY: TREATING ONE OF THE USE TRAINING PROBLEMS

[1]Popyrin A.V., [1]Savina L.N.

[1]*Elabuga Institute of Kazan (Volga Region) Federal University, Elabuga, RT, Russia (423600, Elabuga, Kazanskaya st., 89), e-mail: elabuga@kpfu*

The article analyses the solution of the well-known training problem found in the workbook: ЕГЭ-2013. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. - М. : Национальное образование, 2012. – 192 с. (Mathematics: Samples of Examination Tasks: 30 Variants / edited by A.L. Semenov, I.V. Yaschenko. M.: Natsionalnoye obrazovaniye, 2012. – 192 p.). The solution to the problem presented in the book assumes that the schoolchildren should know the scenarios for associative and commutative laws to be applied to numerical series. However, these conditions are studied only in institutions of higher education. The transfer of properties from finite sums to infinite ones can entail contradictions. Treating the given solution as an insufficiently grounded the authors of the article offer their own one. It is based on the properties of common fractions magnitude comparison. This approach will also make it easy to find all the common fractions complying with the solution to the problem. The schoolchildren have sufficient skills to do all these operations.

Keywords: Preparation for USE (United State Examination), C problem, infinite decimal fraction.

В типовых экзаменационных вариантах ЕГЭ по математике под редакцией А.Л. Семенова и И.В. Ященко 2011, 2012 и 2013 гг. в открытом банке задач портала «Обучающая система Дмитрия Гущина "Решу ЕГЭ"» (С6 № 484659) приводится интересная и полезная задача C_6 следующего содержания: «Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел a_n. В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение a_3» [1, с. 32].

Приведено решение: «Очевидно, $a_3 \geq 3$, причем $a_3=3$, только если $a_1=1$, $a_2=2$, то есть если дробь начинается: 0,123… (четвертая цифра не ноль). Заметим, что таким образом начинается, например, число

$$m=10^{-1}+2\cdot10^{-2}+3\cdot10^{-3}+\ldots+n\cdot10^{-n}+\ldots .$$

Найдем число m и проверим, удовлетворяет ли оно условиям задачи. Для этого запишем сумму подробнее.

$$\begin{aligned} m=&10^{-1}+10^{-2}+10^{-3}+\ldots+10^{-n}+\ldots+\\ &+10^{-2}+10^{-3}+\ldots+10^{-n}+\ldots+ \qquad\qquad (*)\\ &+10^{-3}+\ldots+10^{-n}+\ldots+\\ &+\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

В каждой строке – сумма геометрической прогрессии со знаменателем 10^{-1}. Получаем:

$$m = 10^{-1}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + 10^{-2}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + \cdots 10^{-n}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + \cdots =$$

$$= \frac{10}{9}(10^{-1} + 10^{-2} + \cdots + 10^{-n} + \cdots) = \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{10}{81}.$$

… Число m удовлетворяет условиям задачи и … $a_3=3$» [1, с. 166].

Представление m в виде (*) предполагает, что перенос слагаемых в сумме через бесконечное число других слагаемых (переместительный закон) и произвольная расстановка скобок (сочетательный закон) не изменяет суммы бесконечного числа слагаемых.

Известно, что применение сочетательного и переместительного законов к бесконечным суммам может привести к противоречиям. Приведем примеры. Суммой ряда, по определению, называют бесконечную сумму со «стандартной» расстановкой скобок $\ldots(\ldots((a_1+a_2)+a_3)+\ldots+a_n)+\ldots$, точнее, предел конечных сумм, полученных согласно указанной расстановке скобок.

Если допустить справедливость выполнения сочетательного закона, то, например, суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ является, с одной стороны,

$(–1+1)+(–1+1)+\quad+(–1+1)+\ldots = 0+0+0+\ldots=0$, а с другой стороны, $–1+(1–1)+(1–1)+\ldots= –1+0+\ +0+\ldots= –1$, хотя, по определению, сумма этого ряда не существует, поскольку предел частичных сумм $s_1= –1$, $s_2= –1+1=0$, $s_3= –1+1–1= –1$,… не существует.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Известно, что этот ряд сходится и сумма его равна $ln2$. Представим, переставив слагаемые, сумму в виде [2, с. 254]:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)+\cdots=$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)+\cdots=$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\ ln2\neq ln2.$$

По теореме Римана из этого ряда подходящей перестановкой его членов можно получить сходящийся ряд с любой наперед заданной суммой, а также расходящийся ряд.

Вернемся к исходной задаче ЕГЭ. Полагаем, что для полноты решения, приведенного в [1], необходимо сначала доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n}n$, поскольку переместительный закон справедлив лишь для абсолютно сходящихся рядов, а это требует определенных знаний и навыков, хотя во введении данного сборника указано: «Задание C_6 требует высокой математической культуры, но не очень много специальных знаний…».

С бесконечными суммами школьники сталкиваются при изучении суммы бесконечной геометрической прогрессии. В математических классах ученики могут знакомиться с понятием суммы числового ряда. Более тонкие вопросы, связанные со сходимостью рядов, как возможность применения переместительного и сочетательного законов, выходят далеко за рамки школьной программы. Рассуждения же по аналогии (перенос свойств с конечных сумм на бесконечные) очень часто приводят к неправильным выводам.

Есть еще один вопрос. Если задача будет решена подбором, то по каким критериям будет произведена оценка решения? Приведенные критерии не предусматривают такого варианта.

Приведем другое решение рассматриваемой задачи ЕГЭ. Естественнее начать поиск с правильных обыкновенных дробей, так как их, с заданными ограничениями на знаменатель, будет конечное число и, следовательно, возможен перебор. Если существует дробь, начинающаяся с 0,123…= m, то она меньше дроби 0,125:

$$0{,}125 = \frac{1}{8}, \qquad 0,(1) = \frac{1}{9}, \qquad \text{значит,} \qquad \frac{1}{9} < m < \frac{1}{8}.$$

$$\text{Имеем: } 0{,}125 = \frac{1}{8} = \frac{2}{16} = \frac{3}{24} = \cdots = \frac{10}{80} = \frac{11}{88} = \frac{12}{96} = \frac{13}{104}.$$

Уменьшать дроби будем за счет увеличения знаменателя, оставляя числитель неизменным. Отсюда следует, что если существует дробь m, равная обыкновенной дроби со знаменателем, меньшим 100, то знаменатель ее – двузначное число и числитель не превосходит 12. Начнем поиск с обыкновенных дробей с числителем 12:

$$\frac{12}{96} = \frac{1}{8}, \qquad \frac{12}{97}, \qquad \frac{12}{98}, \quad \frac{12}{99}$$

Из приведенных трех дробей нашим требованиям удовлетворяет

$$\frac{12}{97} = 0{,}1237\ldots.$$

$$\text{Дроби с числителем 11: } \quad \frac{11}{88} = \frac{1}{8}, \qquad \frac{11}{89} = 0{,}1235\ldots, \frac{11}{90} = 0{,}122\ldots.$$

Дроби с числителем 10: $\frac{10}{80}=\frac{1}{8}, \qquad \frac{10}{81}=0{,}1234\dots, \frac{10}{82}=0{,}1219\dots.$

Аналогично, $\quad \frac{9}{72}=\frac{1}{8}, \qquad \frac{9}{73}=0{,}1232\dots, \qquad \frac{9}{74}=0{,}1216\dots.$

Далее, $\quad \frac{8}{64}=\frac{1}{8}, \ \frac{8}{65}=0{,}12307\dots, \ \ a_3 \ge 30.$

Дальнейший поиск прекращаем, поскольку

$$\frac{2}{17}<\frac{3}{25}<\dots<\frac{7}{57}<\frac{8}{65}<m, \text{так как} \frac{k+1}{8k+9}-\frac{k}{8k+1}=\frac{1}{(8k+9)(8k+1)}$$

Второй способ уменьшения дробей достигается уменьшением числителя с сохранением знаменателя, но среди дробей

$$\frac{1}{16},\frac{2}{24},\frac{3}{32},\frac{4}{40},\frac{5}{48},\frac{6}{56},\frac{7}{64},\frac{8}{72},\frac{9}{80},\frac{10}{88},\frac{11}{96},$$

расположенных в порядке возрастания, нет искомых.

Таким образом, условию задачи с $a_3=3$ удовлетворяют дроби:

$$\frac{9}{73}, \quad \frac{10}{81}, \quad \frac{11}{89}, \quad \frac{12}{97}.$$

Желаем выпускникам больших успехов на экзамене в поисках своих решений.

Список литературы

1. Семенов А.Л. ЕГЭ-2013. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М. : Национальное образование, 2012. – 192 с.

2. Семенов А.Л. ЕГЭ-2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М. : Национальное образование, 2011.

3. Семенов А.Л. ЕГЭ-2011. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М. : Национальное образование, 2010. – 240 с.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М. : Интеграл-Пресс, 2006. – Т. 2. - 544 с.

5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. - М. : Наука, 1974. – Т. 1. - 480 с.

Рецензенты:

Капустина Т.В., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Елабужского института (филиала) Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Елабуга.

Зайниев Р.М., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор кафедры математики Набережно-Челнинского института Казанского федерального университета, г. Набережные Челны.