УДК 621.313.17

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ЛИНЕЙНОГО МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРИВОДА ДЛЯ ИСПЫТАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ ЭЛАСТОМЕРОВ ПРИ ЗАДАННЫХ РЕЖИМАХ НАГРУЖЕНИЯ

Татевосян А.А.[1], Осинина Е.В.[2]

[1] *ФГБОУ ВПО «Омский государственный технический университет», Омск, Россия (644050, г. Омск, пр. Мира, 11), e-mail: karo1@mail.ru*
[2] *ОАО НПП «Эталон», Омск, Россия (644009, г. Омск, ул. Лермонтова, 17), e-mail: elen_o@mail.ru*

Описание рабочего процесса в линейном магнитоэлектрическом приводе при установившихся колебаниях опытных образцов эластомеров связано с построением математических моделей отдельных подсистем привода, объединением этих моделей в общую математическую модель для всего привода и решением полученной системы уравнений при наличии уравнений связи между расчетными величинами и задании начальных условий и ограничений. В статье рассматривается пример решения задачи по исследованию динамических характеристик магнитоэлектрического привода для испытания вязкоупругих свойств эластомеров. Для исследования динамики выполняется математическое моделирование отдельных подсистем привода. При составлении математической модели, учитывающей вязкоупругие свойства опытного образца эластомера, использовался подход, основанный на применении многоконтурной схемы замещения, параметры которой определяются по экспериментальным данным, полученным в процессе релаксации механического напряжения при заданной деформации. Приведен расчет механического напряжения, деформации, напряжения источника питания, механической и электромагнитной сил, а также результаты разложения деформации в ряд Фурье с выделением основной гармоники частотой 10 Гц.

Ключевые слова: магнитоэлектрический привод, эластомер, магнитная система, реология.

MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC PROCESSES OF LINEAR MAGNETO-ELECTRIC DRIVE FOR TESTING THE VISCOELASTIC PROPERTIES OF ELASTOMERS FOR SPECIFIC PRESSURE CONDITIONS

Tatevosyan A.A.[1], Osinina E.V.[2]

[1]*Omsk State Technical University, Omsk, Russia (644050, Omsk, pr.Mira, 11) e-mail:karo1@mail.ru*
[2] *Research and Production Enterprise "Etalon"(*644009*, Omsk, Lermontova,17) e-mail:eleno@mail.ru*

Description of the workflow in the linear magneto-electric drive at steady-state oscillations of prototypes elastomers due to the construction of mathematical models of individual subsystems of the drive, the union of these models in a general mathematical model for the entire drive, and the decision of the resulting system of equations with the equations of the relationship between design values and initial conditions and restrictions . The article describes an example of solving the problem on the dynamic characteristics of the magneto drive to test the viscoelastic properties of elastomers. To study the dynamics performed mathematical modeling of the individual subsystems of the drive. In drawing up a mathematical model that takes into account the viscoelastic properties of the elastomer used a prototype-based approach to the application of multi-loop equivalent circuit parameters are determined from experimental data obtained in the process of relaxation of stress at a given strain. The calculation of the stress, strain, voltage, power supply, mechanical and electromagnetic forces, as well as the results of the decomposition of deformation in a Fourier series with the release of the fundamental frequency of 10 Hz.

Keywords: magneto-electric drive, elastomer, magnetic system, rheology.

В соответствии со стандартом испытаний [8,9] проверка свойств опытных образцов эластомеров при установившихся колебаниях прижимного штока якоря линейного магнитоэлектрического двигателя обуславливает необходимость решения задачи математического моделирования привода с учетом динамических процессов.

Для исследования динамики линейного магнитоэлектрического привода (ЛМЭП) воспользуемся результатами математического моделирования отдельных подсистем привода:

- в электрической подсистеме привода из-за нелинейных свойств нагрузки при синусоидальном приложенном напряжении ток в обмотке двигателя является несинусоидальным, и, наоборот, при синусоидальном токе напряжение на обмотке двигателя будет несинусоидальным. Это обстоятельство определяет концепцию на разработку управляемого источника тока, обеспечивающего заданный закон изменения электромагнитного усилия на опытный образец эластомера. Основное назначение системы регулирования при этом сводится к варьированию постоянной составляющей и амплитуды переменной составляющей тока обмотки, а также его частоты;
- в магнитной подсистеме привода в пределах активной части обмотки индукция магнитного поля, созданного постоянными магнитами из редкоземельных материалов, изменяется незначительно;
- в вязкоупругой подсистеме привода сложность математического аппарата определения динамического модуля упругости эластомеров создает труднопреодолимый барьер по составлению модели данной подсистемы и привода в целом. Поэтому представляется целесообразным для исследования динамики привода воспользоваться результатами синтеза многоконтурной схемы замещения опытного образца эластомера по экспериментальным данным, полученным в процессе релаксации напряжения опытных образцов при заданной деформации.

Обоснование и доказательство надежности и эффективности изложенных выше подходов к построению математической модели ЛМЭП с учетом вязкоупругих свойств эластомеров осуществляется на сопоставлении результатов расчета и эксперимента по исследованию релаксационных характеристик опытных образцов эластомеров [4].

Для построения математической модели отдельных подсистем ЛМЭП примем следующие допущения:

- источником питания и системой управления ЛМЭП обеспечивается заданный закон изменения тока в обмотке двигателя, содержащий постоянную I_0 и переменную синусоидальную составляющую тока

$$i_{ист} = I_0 + I_m \sin(\varpi t). \qquad (1)$$

При этом несинусоидальная форма напряжения на зажимах источника питания неизвестна и в расчете требуется ее определение. Иными словами, в математической модели ЛМЭП

источник питания и система управления замещаются идеальным управляемым источником тока;

- развиваемое на штоке ЛМЭП прижимное электромагнитное усилие и противо-ЭДС в обмотке двигателя не зависят от хода якоря и определяются из выражений

$$F_{эм}(t) = C_м \ i; \quad e(t) = C_e \ \vartheta, \qquad (2)$$

- где $C_м, C_e$ – постоянные, определяемые численным расчетом магнитного поля ЛМЭП. В пределах активной части обмотки двигателя распределение магнитного поля в рабочих зазорах конструкции двигателя слабо зависит от перемещения якоря, поэтому среднее значение индукции можно принять постоянным;
- учитывая, что в конструкции магнитоэлектрического двигателя обмотка изготавливается из большого числа параллельно включенных секций, существенно уменьшающих ее эквивалентное индуктивное сопротивление, определяемое потоками рассеяния, а также слабость потоков рассеяния из-за значительных воздушных промежутков на путях их следования, будем считать в модели ЛМЭП индуктивность обмотки двигателя L_s постоянной величиной, не зависящей от хода якоря;
- для учета вязкоупругих свойств нагрузки в модели ЛМЭП воспользуемся результатами синтеза многоконтурной схемы замещения напряженно деформированного состояния опытного образца эластомера, снятого по опыту релаксации напряжения при заданной деформации. Принимая во внимание небольшой разброс в значениях соответствующих сопротивлений и емкостей участков различных схем замещения, полученных для одного и того же опытного образца эластомера, но при разных фиксированных значениях деформации ε, будем использовать в математической модели ЛМЭП их усредненные значения для установленного стандартом испытаний вязкоупругих свойств эластомеров диапазона изменения прижимного усилия.

С учетом принятых допущений математическая модель ЛМЭП включает в себя:

- уравнение электрического состояния обмотки линейного магнитоэлектрического двигателя

$$i_{ист} \ R_{обм} + L_s \ \frac{d i_{ист}}{d t} + C_e \ \vartheta = u_{ист}, \qquad (3)$$

- уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние опытного образца эластомера, составленные для его синтезированной многоконтурной схемы замещения с использованием уравнений Кирхгофа (для упрощения записи уравнений воспользуемся обозначениями, принятыми действующим стандартом для электрических схем, учитывая формальную аналогию при замене параметров электрической цепи с сопротивлениями

$R_0, R_1, ..., R_n$ на инверсные модули упругости $E_0^{-1}, E_1^{-1}, ..., E_n^{-1}$, с емкостями $C_0, C_1, ..., C_n$ на коэффициенты вязкого течения $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$, с токами i_k и напряжениями на участках цепи u_{Rk} и u_{Ck} соответственно на механические напряжения σ_k, упругие $\varepsilon_{ук}$ и вязкие относительные деформации $\varepsilon_{вк}$, с напряжением u и током i на входе электрической цепи соответственно на полные деформацию ε и механическое напряжение σ).

$$\begin{aligned}
&\frac{du_{c0}}{dt} = \frac{1}{C_0}\left(\frac{u-u_{c0}}{R_0} - \frac{u_{c0}-u_{c1}}{R_1} - ... - \frac{u_{c0}-u_{cn}}{R_n}\right),\\
&\frac{du_{c1}}{dt} = \frac{1}{C_1R_1}(u_{c0}-u_{c1}),\\
&\frac{du_{c2}}{dt} = \frac{1}{C_2R_2}(u_{c0}-u_{c2}),\\
&... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ...\\
&\frac{du_{cn}}{dt} = \frac{1}{C_nR_n}(u_{c0}-u_{cn});
\end{aligned} \tag{4}$$

- уравнения движения якоря

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{m}(C_м i_{ист} - \sigma S - mg)\\
&\frac{dx}{dt} = \vartheta
\end{aligned}, \tag{5}$$

где S - площадь поперечного сечения опытного образца эластомера, m - масса якоря, x - ход якоря.

- уравнения связи между токами (механические напряжения) и напряжениями (деформациями) на участках многоконтурной схемы замещения опытного образца эластомера

$$\begin{aligned}
&i = \frac{u-u_{c0}}{R_0}, \quad i_1 = \frac{u_{c0}-u_{c1}}{R_1}, ..., \; i_n = \frac{u_{c0}-u_{cn}}{R_n};\\
&i_0 = i - i_1 - ... - i_n
\end{aligned} \tag{6}$$

и, соответственно, между ходом якоря x и полной относительной деформацией ε

$$x = \varepsilon \ell_0, \tag{7}$$

где ℓ_0 - высота опытного образца эластомера в ненагруженном состоянии.

Для исследования динамики ЛМЭП уравнения (1-7) необходимо объединить в систему и провести ее решение с использованием численных методов [1-3,10] анализа жестких систем уравнений, характеризующихся большим диапазоном изменений постоянных времени, при нулевых начальных условиях и ограничениях:

$$0 \le x(t) \le 2x_м, \tag{8}$$

$$|u_{ист}| \le U_{доп}, \qquad (9)$$

где $x_м$ - амплитуда хода якоря; $U_{доп}$ - максимально допустимое напряжение на обмотке двигателя.

Разработанную математическую модель используем для расчета его динамических характеристик ЛМЭП при заданном законе изменения тока в обмотке двигателя $i_{ист} = 0.4 + 0.3\sin(62.8t)$. Расчет проведем для двух образцов эластомеров, имеющих различные свойства, обусловленные химическим составом (в состав эластомера входят различные марки технического углерода, П-550 и П-234).

Исследования процесса релаксации напряжения в опытных образцах эластомеров на испытательном стенде показывают, что в процессе релаксации напряжения при фиксированных значениях деформации ε участвуют шесть экспонент, имеющих различные постоянные времени $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_6$. В [5,6] рассматривается алгоритм по синтезу многоконтурной схемы замещения опытного образца эластомера (рис. 1) с использованием его при исследовании динамических характеристик привода и реологических характеристик эластомеров.

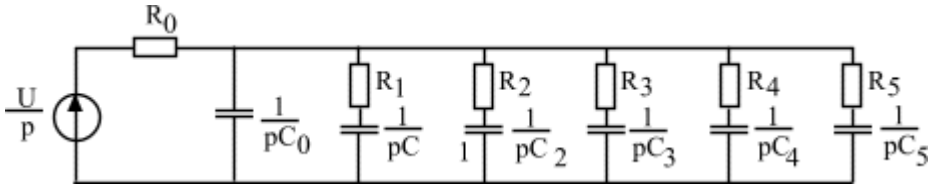

Рис. 1. Многоконтурная схема замещения цепи в операторной форме

Параметры многоконтурной схемы замещения вязкоупругого испытуемого образца приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры многоконтурной схемы замещения опытного образца эластомера с различным наполнителем технического углерода П-550 и П-234

Техуглерод П - 550			Техуглерод П- 234		
τ_i, 1/с	C_i ,Ф	R_i, Ом	τ_i, 1/с	C_i ,Ф	R_i, Ом
3.541	$2.154 \cdot 10^{-8}$	$1.644 \cdot 10^{8}$	0.919	$6.312 \cdot 10^{-9}$	$1.457 \cdot 10^{8}$
433.779	$1.581 \cdot 10^{-6}$	$2.742 \cdot 10^{8}$	120.991	$1.135 \cdot 10^{-6}$	$1.066 \cdot 10^{8}$
15.683	$3.27 \cdot 10^{-7}$	$4.796 \cdot 10^{7}$	4.872	$1.108 \cdot 10^{-7}$	$4.398 \cdot 10^{7}$
$2.464 \cdot 10^{3}$	$6.11 \cdot 10^{-6}$	$4.034 \cdot 10^{8}$	$1.350 \cdot 10^{3}$	$7.597 \cdot 10^{-6}$	$1.778 \cdot 10^{8}$

0.744	$3.129 \cdot 10^{-8}$	$2.379 \cdot 10^{7}$	0.158	$1.305 \cdot 10^{-8}$	$1.211 \cdot 10^{7}$
$2.019 \cdot 10^{5}$	$3.741 \cdot 10^{-3}$	$5.399 \cdot 10^{7}$	$1.388 \cdot 10^{5}$	$2.472 \cdot 10^{-3}$	$5.616 \cdot 10^{7}$

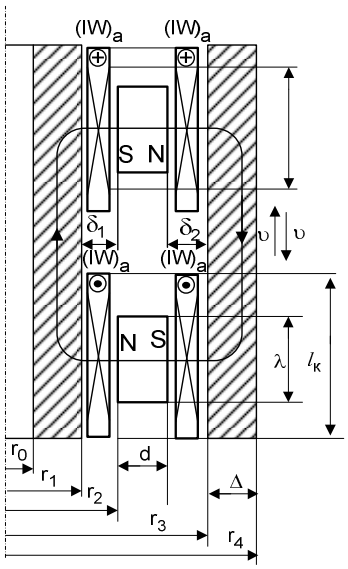

Рис. 2. Конструкция магнитной системы магнитоэлектрического двигателя

Используя оптимизационный расчет по условиям максимума прижимного усилия на опытный образец эластомера в качестве базовой конструкции магнитной системы выбрана магнитная система с магнитами, намагниченными в радиальном направлении с двумя воздушными каналами (рис. 2) [7]. Конструктивные параметры магнитной системы магнитоэлектрического двигателя приведены в таблице 2.

Таблица 2

Конструктивные параметры базовой конструкции магнитоэлектрического двигателя

Наименование параметра	Ед. изм.	Значение	Наименование параметра	Ед. изм.	Значение
Амплитуда хода якоря, x	м	0.005	Средний радиус внутренней обмотки	м	$4.64 \cdot 10^{-2}$
Высота магнита, λ	м	0.054	Средний радиус внешней обмотки	м	$5.74 \cdot 10^{-2}$
Длина магнита по оси намагничивания, d	м	$7.9 \cdot 10^{-3}$	Радиус внутреннего сердечника магнитопровода, r_1	м	$4.51 \cdot 10^{-2}$
Высота активной части обмотки, ℓ_a	м	0.06	Радиус внутренней обмотки, r_2	м	$4.78 \cdot 10^{-2}$
Высота обмотки, $\ell_к$	м	0.07	Радиус магнита, r_3	м	$5.57 \cdot 10^{-2}$
Толщина внутренней обмотки, δ_1	м	$2.7 \cdot 10^{-3}$	Радиус внешней обмотки, r_4	м	$5.9 \cdot 10^{-2}$
Толщина внешней обмотки, δ_2	м	$3.3 \cdot 10^{-3}$	Радиус внешнего сердечника магнитопровода, r_5	м	$7.43 \cdot 10^{-2}$
Средний радиус магнита	м	$5.18\ 10^{-2}$	Индукция в нейтральном сечении магнита	Тл	0.578

На основе численного расчета магнитного поля при различных положениях якоря были получены средние значения коэффициентов для определения тягового усилия и противо-ЭДС обмотки магнитоэлектрического двигателя $C_e = 76.677$ и $C_м = 79.577$.

Параметры испытуемых цилиндрических образцов эластомеров в ненагруженном состоянии: диаметр, высота и площадь поперечного сечения равны соответственно $d = 0.01$ м, $\ell_0 = 0.01$м, $S = 7.853 \cdot 10^{-5}$ м^2.

Сравнение вариантов расчета динамических характеристик ЛМЭП с различными опытными образцами эластомеров проведем при заданном значении тока в обмотке двигателя и температуре испытаний (рис. 3).

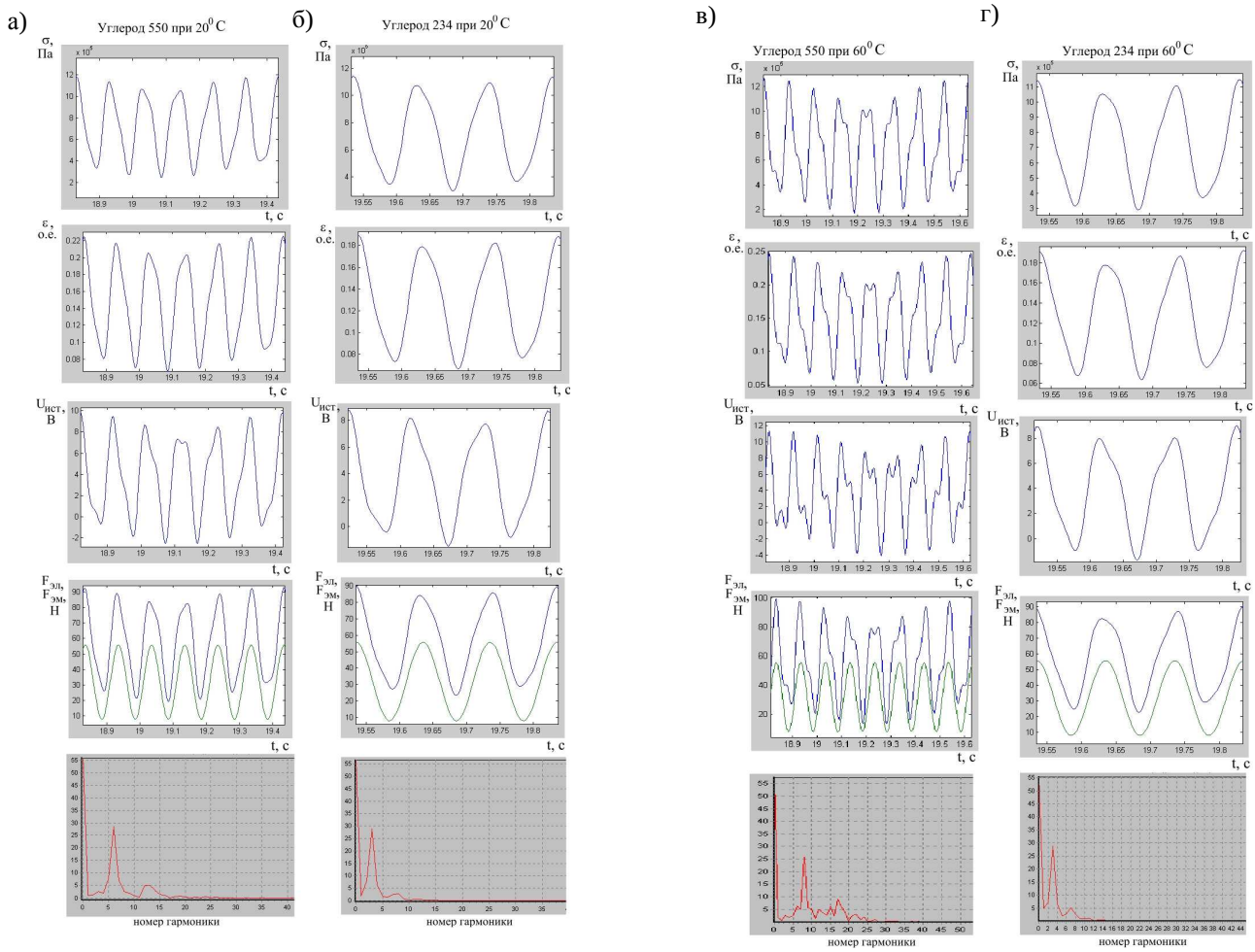

Рис. 3. Динамические характеристики ЛМЭП при различных температурах испытаний опытных образцов эластомеров, наполненных техническим углеродом П-550 и П-234: для $T = 20^0$С соответственно колонки с результатами расчета (а, б); для $T = 60^0$С то же, но колонки (в, г). В колонках (сверху вниз) приведены мгновенные значения расчетных величин: механического напряжения σ, деформации ε, напряжения источника питания $U_{ист}$, механической $F_{мех.}$ и электромагнитной $F_{эм.}$ сил, а также результаты разложения деформации $\varepsilon(t)$ в ряд Фурье с выделением основной гармоники частотой 10 Гц.

При принятых допущениях математическая модель ЛМЭП представляет собой смешанную систему дифференциально-алгебраических уравнений. Отражение в модели широкого спектра элементарных релаксационных процессов, протекающих в ветвях многоконтурной схемы замещения опытного образца эластомера, а также их взаимодействие с другими процессами, происходящими в электрической и механической подсистемах привода, определяют высокую размерность полученной системы уравнений и ее жесткость. Особенности разработанной модели согласуются с использованием численных методов расчета жестких систем уравнений, что делает возможным применение модели ЛМЭП для исследования динамических характеристик привода (рис. 3) и определения реологических характеристик опытных образцов эластомеров при разложении расчетных временных зависимостей механической силы и деформации в ряд Фурье (табл. 3).

Таблица 3

Реологические характеристики опытных образцов эластомеров с различным наполнителем технического углерода П-550 и П- 234 при температуре испытаний $T°C$

№	Параметр	Условное обозначение	Техуглерод П-550		Техуглерод П-234	
			Т=20°	Т= 60°	Т=20°	Т= 60°
1	Динамический модуль упругости, МПа	$\lvert E \rvert$	5.84	5.62	6.87	6.67
2	Модуль упругости, 10^3 Н/м	$K_y(1)$	45.9	44.1	54.0	52.4
3	Модуль вязкости, 10^3 Н/м	$K_в(1)$	0.27	0.046	0.633	0.397
4	Тангенс угла механических потерь, 10^{-3}	$tg(\delta)$	5.95	1.04	11.74	7.57

Проведенные исследования динамических характеристик ЛМЭП с различными опытными образцами эластомеров показали работоспособность математической модели и хорошую степень соответствия ее реальным процессам в приводе, что подтверждается уточнением решения задачи оптимизации конструкции привода и накопленным опытом проектирования и создания экспериментального макетного образца на основе разработанных расчетных методик.

Список литературы

1. Ковалев Ю.З. Разработка алгоритмов исследования динамики обобщенного электромеханического преобразователя энергии на ЭЦВМ : автореф. дис. … д-ра техн. наук. – М., 1980. – 40 с.

2. Ковалев Ю.З., Копылов И.П. Расчет переходных процессов электрических машин при автоматизированном проектировании // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1980. - № 3. – С. 7–12.

3. Копылов И.П. Электромеханические преобразователи энергии. – М. : Энергия, 1973. – 400 с.

4. Татевосян А.А. Разработка и моделирование линейного магнитоэлектрического привода для испытания вязкоупругих свойств эластомеров : дис. ... канд. техн. наук. - Омск, 2005. - 173 с.

5. Татевосян А.А. Математическая модель для определения реологических характеристик эластомеров при циклическом нагружении // Омский научный вестник. – 2006. – Вып. 41. - С. 92-96.

6. Татевосян А.А. Синтез многоконтурной схемы замещения опытного образца эластомера на основе исследования процесса релаксации // Зимняя школа по механике сплошных сред (четырнадцатая) : тез. докл. – Екатеринбург : УрО РАН, 2005. - С. 6. - ISBN 5-7691-1564-5.

7. Татевосян А.А. Расчет параметров оптимальных конструкций магнитных систем магнитоэлектрического привода по испытанию вязкоупругих свойств эластомеров // Омский научный вестник. – 2004.

8. ASTM Designation: D 5992 – 96 Standard Guide for Dynamic Testing of Vulcanized Rubber and Rubber-Like Materials Using Vibratory Methods.

9. DIN 53535- Bestimmung der visco-elastischen Eigenschaften von Elastimeren. Testing of rubber; determination of the visco-elastic property of rubber under forced vibration beyond resonance.

10. Stabrowske M.M., Sikora J. Nonlinear analysis of field distribution electric motor with periodicity // Arch. Electrotechn. W. – Berlin conditions. – 1981. - 64, № 3-4. - S. 195-200.

Рецензенты:

Федоров В.К., д.т.н., профессор кафедры «Электротехника и электрификация», Омского государственного аграрного университета им. П.А. Столыпина, г. Омск.

Сергеев Р.В., к.т.н., доцент кафедры «Электрические машины и общая электротехника» Омского государственного университета путей сообщения, г. Омск.