

УДК 004.021

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАЗМЕЩЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Дулесов А.С., Прутовых М.А.

ФГБОУ ВПО Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова, Абакан, Россия (655017, Абакан, пр. Ленина, 90), e-mail: prutovyh_ma@mail.ru.

В работе представлена методика нахождения оптимального места размещения производственных объектов и дан пример её реализации. Поиск решения опирается на комплекс математических, оптимизационных методов и геоинформационных технологий. Методика предполагает предварительное нахождение возможных мест размещения объекта на географической территории, полученных с помощью существующих методов: логистики (определение центра тяжести, решение задачи единого среднего и задачи охвата) и имитационного моделирования. Поиск данными методами осуществляется на основе затрат о размещении и доставки грузов. Полученные значения о местах размещения аппроксимированы с целью получения целевой функции затрат и построения области допустимых решений. Решение сформированной задачи оптимизации достигается на основе градиентных методов. Реализация разработанной методики рассмотрена на примере производственных объектов строительного индустриального кластера. Методика обладает достаточной точностью, универсальностью и оптимальностью по сравнению с существующими методами. Для обеспечения наглядности решения возможно использование геоинформационной системы, позволяющей провести дополнительный пространственный анализ с отображением полученного результата.

Ключевые слова: методы размещения объектов, оптимизационные методы, нахождение градиента функции.

THE METHOD OF TASK'S SOLUTION ABOUT OPTIMUM SITING OF PRODUCTION OBJECTS

Dulesov A.S., Prutovyh M.A.

Katanov State University of Khakassia, Abakan, Russia (655017, Abakan, 90 Lenin Avenue), e-mail: prutovyh_ma@mail.ru.

In the article is presented the technique of finding of an optimum place of production objects' siting and the example of its realization is given. Search of the decision leans on a complex of mathematical, optimization methods and geoinformation technologies. The technique assumes preliminary finding of possible places of object's siting in the geographical territory, received by means of existing methods: logistic (definition of gravity's center, solution of a task of a uniform average and a task of coverage), simulation modeling. Search by these methods is carried out on the basis of expenses about placement and deliveries of freights. The received values about siting's places are approximated for the purpose of receiving criterion function of expenses and creation of admissible decisions' area. The solution of the created optimization task is reached on the basis of gradient methods. Realization of the developed technique is considered on the example of production objects of a construction and industrial cluster. The technique possesses sufficient accuracy, universality and optimality in comparison with existing methods. For ensuring presentation of the decision is possible use of the geoinformation system, allowing to carry out the additional spatial analysis with display the received result.

Keywords: methods of objects' siting, optimization methods, finding of function's gradient.

Введение

Нахождение оптимального месторасположения объекта производственной цепи является важным процессом, так как от этого зависят затраты на размещение, возможная прибыль, доступность предприятия для клиентов и поставщиков. Для решения данной задачи существуют различные методы и технологии [2]: математические, эвристические, геоинформационные. Эвристические методы позволяют рассматривать различные критерии оптимизации размещения. По сравнению с ними наибольшую точность в получении

конечных результатов можно ожидать от математических методов, а наглядность решения – от геоинформационных технологий [3]. Наиболее распространенными методами являются: решение задачи охвата и единого среднего, определение центра тяжести, имитационное моделирование. Эвристические методы обычно применяют на предварительном этапе для оценки возможных мест размещения. В их поддержку геоинформационные технологии позволяют оценить полученный результат с помощью инструментов пространственного анализа. Существующие методы не обладают достаточной степенью универсальности и не гарантируют в полной мере оптимальность решения.

Методика нахождения оптимального решения задачи о размещении

Для повышения универсальности имеющихся методов предлагается использование предлагаемой методики, которая объединяет возможности нескольких методов для получения наиболее оптимального решения. Она основывается на решении оптимизационной задачи.

Методика включает в себя следующие этапы решения задачи:

1. Нахождение решения задачи о размещении с применением известных математических методов. Расчет показателей эффективности размещения: затрат, прибыли.
2. Построение на основе метода наименьших квадратов целевой функции затрат или прибыли посредством аппроксимации полученных решений на предыдущем этапе [1]. После получения уравнения проводится его оценка с помощью различных критериев: средняя ошибка аппроксимации, критерий детерминации.
3. Формирование ограничений задачи оптимизации. Для этого определяется градиент целевой функции в различных точках области размещения объекта. Определяется шаг градиента в сторону максимума целевой функции и отмечается точка границы возможного размещения объекта. Количество таких точек определяет число ограничений. Построение функций ограничений определяет область допустимых решений задачи.
4. Поиск оптимального места размещения объекта.

Реализация методики на примере

В республике Хакасия наиболее приоритетным направлением развития является создание Абакано-Черногорской агломерации. В ходе реализации проекта планируется на территории сформировать пять производственных кластеров: строительно-индустриальный, агропромышленный, машиностроительный, топливно-энергетический, транспортно-логистический. На этапе проектирования будущей агломерации важно решение задачи о размещении производственных объектов, что позволит создать эффективную сеть взаимосвязанных кластеров.

Рассмотрим задачу о размещении объекта строительного-индустриального кластера. Пусть необходимо определить месторасположение некоторого производственного объекта. Имеются данные о существующих и потенциальных клиентах, объемах потребления товаров или услуг, координаты их расположения на географической территории.

Первоначально находят места размещения объекта с помощью нескольких методов: решение задачи единого среднего и задачи охвата, определение центра тяжести и имитационного моделирования [4,5]. Используя данные методы, полученные решения представлены в таблице 1. Каждый метод дал по одному решению, за исключением имитационного моделирования, в результате использования которого определено два возможных места размещения.

Для упрощения расчетов можно воспользоваться программой для ЭВМ «Программа решения задачи размещения предприятий». Подробнее ее использование рассмотрено в работе [6].

Таблица 1. Возможные места размещения производственного объекта

№ п/п	Координата x ° в. д. (восточной долготы)	Координата y , ° с. ш. (северной широты)	Значение издержек на размещение (Z_i), руб.
1	91.341346	53.766951	75177
2	91.401774	53.754743	95489
3	91.376035	53.706837	123606
4	91.339262	53.768529	75680
5	91.470524	53.669068	121653

Для каждого решения рассчитываются затраты на размещение по формуле:

$$Z_i = c_{i\text{аренда}} + c_{i\text{транспорт}}, \quad (1)$$

где $c_{i\text{аренда}}$ – стоимость аренды в зависимости от географического расположения; $c_{i\text{транспорт}}$ – стоимость транспортных расходов, которые вычисляются по формуле (2), $i = 1, 2, \dots, n$ – порядковый номер возможного места размещения объекта (в данном примере $n = 5$).

$$c_{i\text{транспорт}} = \sum L_j T_j, \quad (2)$$

где $\sum L_j$ – сумма расстояний (длин) от каждого клиента j до места размещения объекта; T_j – транспортный тариф, $j = 1, 2, \dots, m$ – порядковый номер клиента.

Далее на основе метода наименьших квадратов строится целевая функция издержек путем аппроксимации ранее полученных координат мест размещений. В качестве возможного вида уравнения было выбрано:

$$\tilde{Z}(x, y) = a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot y^2 + a_0. \quad (3)$$

Для (3) вычисляются значения коэффициентов a_i , при которых функция должна иметь минимум: $\tilde{Z}(x, y) \rightarrow \min$. Известно, что в точке минимума первая производная (3) должна быть равна нулю:

$$Q(a_i) = \sum [(\tilde{Z}(x_i, y_i) - Z_i)^2] = 0, \quad (4)$$

что позволяет определить a_i через систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 \sum (x^4) + a_2 \sum (x^3) + a_3 \sum (x^2 y) + a_4 \sum (x^3 y) + a_5 \sum (x^2 y^2) + a_0 \sum (x^2) = \sum (x^2 z) \\ a_1 \sum (x^3) + a_2 \sum (x^2) + a_3 \sum (xy) + a_4 \sum (x^2 y) + a_5 \sum (xy^2) + a_0 \sum (x) = \sum (xz) \\ a_1 \sum (x^2 y) + a_2 \sum (xy) + a_3 \sum (y^2) + a_4 \sum (xy^2) + a_5 \sum (y^3) + a_0 \sum (y) = \sum (yz) \\ a_1 \sum (x^3 y) + a_2 \sum (x^2 y) + a_3 \sum (xy^2) + a_4 \sum (x^2 y^2) + a_5 \sum (xy^3) + a_0 \sum (xy) = \sum (xyz) \\ a_1 \sum (x^2 y^2) + a_2 \sum (xy^2) + a_3 \sum (y^3) + a_4 \sum (xy^3) + a_5 \sum (y^4) + a_0 \sum (y^2) = \sum (y^2 z) \\ a_1 \sum (x^2) + a_2 \sum (x) + a_3 \sum (y) + a_4 \sum (xy) + a_5 \sum (y^2) + a_0 \sum 1 = \sum (z) \end{cases} \quad (5)$$

В (5) заносятся исходные значения x и y . В итоге получаем систему уравнений с 6-ю неизвестными.

$$\begin{cases} 348726845 \cdot a_1 + 3815982 \cdot a_2 + 2243727 \cdot a_3 + 205044839 \cdot a_4 + 120562693 \cdot a_5 + 41757 \cdot a_0 = 4106261205 \\ 3815982 \cdot a_1 + 41757 \cdot a_2 + 24552 \cdot a_3 + 2243727 \cdot a_4 + 1319272 \cdot a_5 + 457 \cdot a_0 = 44929478 \\ 2243727 \cdot a_1 + 24552 \cdot a_2 + 14436 \cdot a_3 + 1319272 \cdot a_4 + 775710 \cdot a_5 + 269 \cdot a_0 = 26411717 \\ 205044839 \cdot a_1 + 2243727 \cdot a_2 + 1319272 \cdot a_3 + 120562693 \cdot a_4 + 70888808 \cdot a_5 + 24552 \cdot a_0 = 2413857202 \\ 120562693 \cdot a_1 + 1319272 \cdot a_2 + 775710 \cdot a_3 + 70888808 \cdot a_4 + 41681471 \cdot a_5 + 14436 \cdot a_0 = 1418983130 \\ 41757 \cdot a_1 + 457 \cdot a_2 + 269 \cdot a_3 + 24552 \cdot a_4 + 14436 \cdot a_5 + 5 \cdot a_0 = 491605 \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений методом Гаусса, определяются значения коэффициентов: $a_0=55661.742$, $a_1=2020.913$, $a_2=330194.646$, $a_3=128042.515$, $a_4=-14310.032$, $a_5=5672.763$.

Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\tilde{Z}(x, y) = 2020.913 \cdot x^2 + 330194.646 \cdot x + 128042.515 \cdot y - 14310.032 \cdot x \cdot y + 5672.763 \cdot y^2 + 55661.742 \quad (6)$$

Необходимо определить, насколько уравнение (6) адекватно описывает имеющуюся зависимость. Для этого можно воспользоваться следующими показателями: средняя ошибка аппроксимации и коэффициент детерминации [7]. Средняя ошибка аппроксимации должна быть в интервале 8–10 %, тогда полученное уравнение считается адекватным. Она рассчитывается по формуле:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_i \left| \frac{Z_i - \tilde{Z}_i}{Z_i} \right| \cdot 100\%, \quad (7)$$

где Z_i – исходные значения затрат по каждому i -му месту размещения, \tilde{Z}_i – значения затрат, полученные по уравнению (6).

Для рассматриваемого примера средняя ошибка аппроксимации составила 8,4 %.

Коэффициент детерминации отражает, насколько исходные данные могут быть объяснены полученной моделью. Он измеряется в интервале от 0 до 1, чем полученное

значение ближе к единице, тем уравнение объясняет большую часть изменчивости соответствующих переменных. Коэффициент находится по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n-1} \sum_i (Z_i - \tilde{Z}_i)^2}{\frac{1}{n} \sum_i (Z_i - \bar{Z})^2} \quad (8)$$

где $\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n}$ – среднее значение исходных затрат.

Значение критерия детерминации для примера получилось равным 0,7.

Рассчитанные по (7) и (8) показатели подтверждают значимость уравнения (6), которое можно использовать в качестве целевой функции затрат для дальнейшего решения задачи о размещении.

Далее строятся ограничения, накладываемые на поиск оптимума задачи. Для каждого полученного ранее решения определяется градиент, указывающий на направление наискорейшего возрастания целевой функции, значение которой меняется от одной точки пространства к другой. Он определяется по формуле:

$$\text{grad } \tilde{Z} = \left\{ \frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial Z}{\partial y} \right\} \quad (9)$$

Все рассчитанные значения градиентов оказались отрицательными, что свидетельствует о нахождении антиградиента, показывающего направление наискорейшего убывания функции.

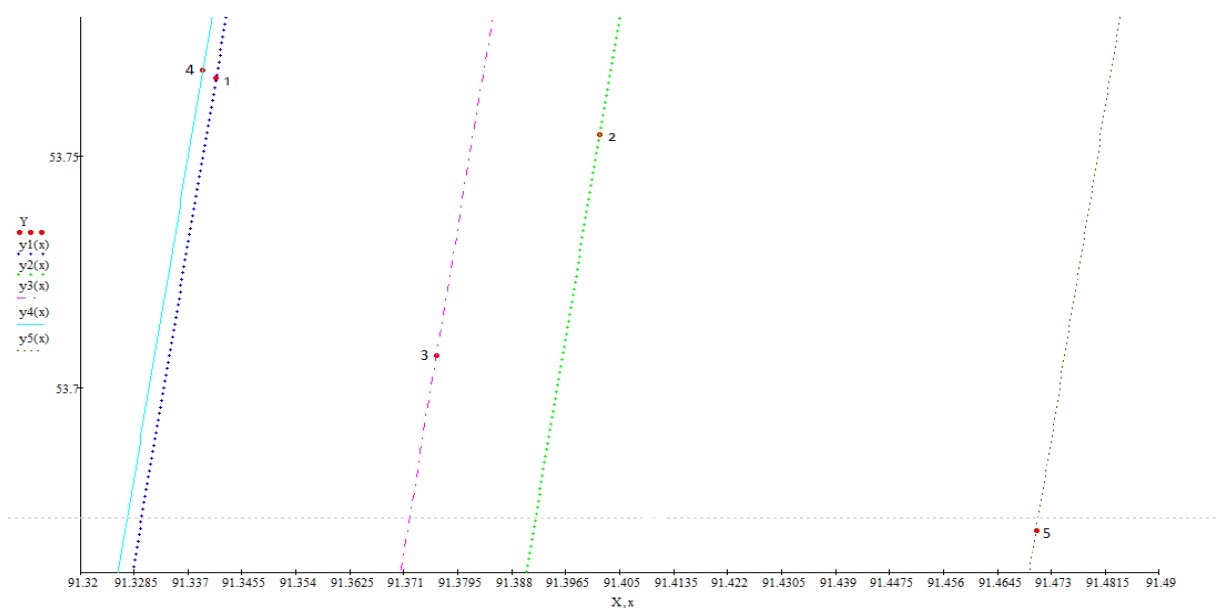


Рисунок 1. Антиградиенты целевой функции в точках опорного решения

В направлении снижения уровня затрат найдем точки в пределах территории, отведенной для размещения объекта. Совокупность точек начального решения и точек с наименьшими затратами будет составлять область допустимых значений (рис. 2).

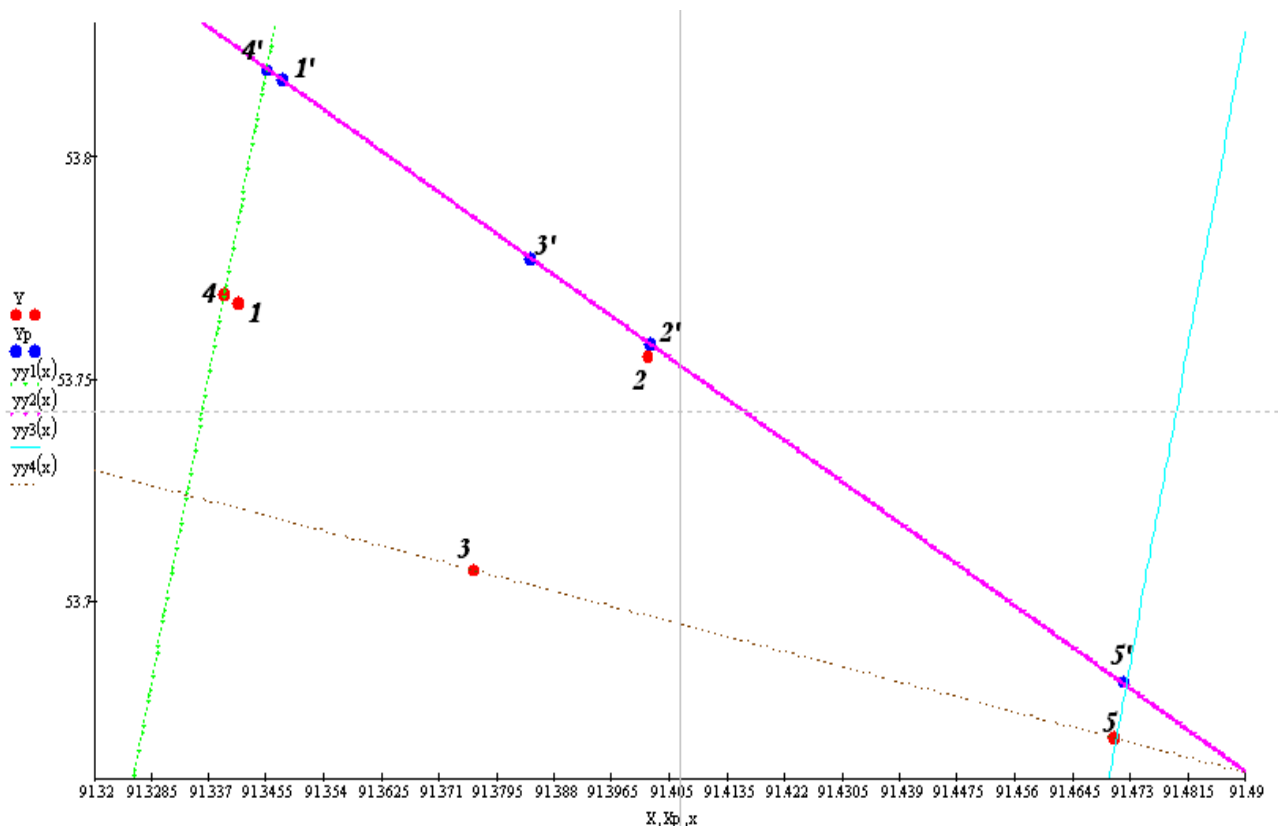


Рисунок 2. Область допустимых значений

В результате имеем следующую задачу минимизации:

$$Z = 2020.913 \cdot x^2 + 330194.646 \cdot x + 128042.515 \cdot y - 14310.032 \cdot x \cdot y + 5672.763 \cdot y^2 + 55661.742 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0.050833 x + 0.006266 y \geq 4.3061351; \\ 0.059494 x + 0.0543815 y \leq 8.361302; \\ 0,012466 x - 0.001491 y \leq 1.0602563; \\ 0.037769 x + 0.094489 y \geq 8.52588679, \end{cases}$$

при $x > 0, y > 0$.

Получили следующее решение $x=91.345555^{\circ}$ в.д., $y=53.8195812^{\circ}$ с.ш.. Затраты на размещение составят 51930 рублей. Эти координаты определяют наилучшее расположение предприятия с наименьшими затратами.

Заключение

Разработанная методика позволяет найти оптимальное решение задачи о размещении. Она обладает достаточной универсальностью и позволяет учесть несколько предварительных решений в получении координат возможного размещения объекта.

Недостаток методики заключается в её сложности, использование которой состоит в следующем: если требуется для нескольких объектов найти места их размещения, то по каждому из них следует предварительно применить несколько методов (каждый из которых позволяет использовать только ему присущие возможности в определении координат).

Список литературы

1. Гордон Р. Аппроксимация эмпирически полученной поверхности методом наименьших квадратов // Delphi. Виртуальный клуб программистов. Режим доступа: <http://www.delphikingdom.com/asp/viewitem.asp?catalogid=1368> (дата обращения 26.08.2013).
2. Дулесов А.С., Казаева М.А. Анализ методов размещения объектов сетевой структуры // Актуальные проблемы и инновации в экономике, технике, образовании, информационных технологиях: материалы международной научной конференции, Ставрополь – Кисловодск, 3-7 мая 2011 г. – Севастополь: Изд-во НОУ ВПО «СевКавГТИ», 2011. – С.86-89.
3. Дулесов А.С., Казаева М.А. Геоинформационные технологии территориального размещения объектов малого бизнеса // Проблемы современной экономики: сборник материалов IV Международной научно-практической конференции: в 2 ч. Ч. 2. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – С.70-73.
4. Дулесов А.С., Прутовых М.А. Алгоритмы территориального размещения предприятия на основе геоинформационных технологий // Научно-практический журнал «Прикладная информатика». – М., 2012. – № 5(41). – С. 14-21.
5. Казаева М.А. Применение имитационного моделирования для размещения предприятий на географической территории // Научно-практический журнал «Приволжский научный вестник». – Ижевск, 2012. – № 5(9). – С. 20-23.
6. Прутовых М.А. Решение задачи о размещении предприятий малого бизнеса на географической территории // Наука, образование, общество: тенденции и перспективы: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 января 2013 г. В 7 ч. Ч. V. Мин-во обр и науки – М.: АР-Консалт, 2013. – С. 121-124.
7. Шанченко Н. И. Эконометрика: лабораторный практикум: учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 117 с.

Рецензенты:

Кочетков В.П., д.т.н., профессор, профессор кафедры «Электроэнергетики» Хакасского технического института – филиала ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», г. Абакан.

Нагрузова Л.П., д.т.н., доцент, профессор кафедры «Строительство» Хакасского технического института – филиала ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», г. Абакан.