УДК 539.31

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Санкин Ю.Н.[1], Юганова Н.А.[2]

[1]Ульяновский государственный технический университет (Россия, 432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32),доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, yns@ulstu.ru
[2]Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова (Россия,
432700 г. Ульяновск, пл. 100-летия В.И. Ленина, д. 4), кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой технологии, yuganov_vs@mail.ru

Предлагается частотный метод решения задачи о нестационарных колебаниях стержневых систем с учетом или без учета рассеяния энергии при соударении с препятствием. Уравнение динамики линейной вязко-упругой системы преобразуется по Лапласу при наличии ненулевых начальных условий. Решается краевая задача, заключающаяся в нахождении преобразованных по Лапласу краевых продольных сил как функций краевых перемещений. Затем составляется система уравнений равновесия узлов, решая которую, строятся амплитудо-фазо-частотные характеристики (АФЧХ) для интересующих сечений стержневой системы. Осуществляя обратное преобразование Лапласа, строится переходный процесс. Предлагаемая методика динамического расчета стрежневых систем при соударении с препятствием допускает обобщения на произвольную стержневую систему с неограниченным количеством упруго-присоединенных масс при произвольном силовом воздействии, приложенном в произвольных сечениях.

Ключевые слова: нестационарные колебания, стержневые системы, частотный метод

NONSTATIONARY VIBRATIONS ROD SYSTEMS

Sankin Y.N.[1], Yuganova N.A.[2]

[1]Ulyanovsk State Technical University (32, Severny Venetz str., 432027 Ulyanovsk, Russia), Department of Theoretical and Applied Mechanics, professor, PD, yns@ulstu.ru
[2]Ulyanovsk Stat Pedagogical University(4, square of the 100-anniversary of V.I.Lenin, 432700 Ulyanovsk, Russia), Department of technical disciplines, candidate of technical sciences, head of the department, yuganov_vs@mail.ru

Frequency method is proposed for solving the problem of transient oscillations rod systems with or without energy dissipation in a collision with an obstacle. Dynamic equation of the linear visco- elastic system Laplace transforms in the presence of non-zero initial conditions. We solve the boundary value problem , which consists in finding the Laplace transformed boundary longitudinal force as a function of boundary movements . Then is a system of equilibrium equations of nodes which are constructed by solving the phase - amplitude-frequencycharacteristics (AFCHH) for interested sections of the rod system . Carrying out the inverse Laplace transform , construct the transition process. The proposed method of dynamic analysis of a core systems in a collision with an obstacle can be generalized to an arbitrary rod system with unlimited number of elastically attached masses for arbitrary force action , applied in arbitrary sections.

Keywords: nonstationary vibtrations, rod systems, the frequency method

Уравнения динамики линейной вязко-упругой системы, у которой зависимости между деформациями и напряжениями задаются линейными соотношениями, в операторной форме можно записать следующим образом [2]:

$$D\sigma + R\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T\frac{\partial u}{\partial t} - f = 0;$$

$$CD^* u + C_1 D^* \frac{\partial u}{\partial t} = \sigma . \qquad (1)$$

Здесь σ – вектор обобщенных сил или тензор напряжений;

u – вектор обобщенных смещений;

R – матрица или тензор инерционных характеристик;

T – матрица или тензор внешнего рассеяния энергии;

f – вектор-функция внешних нагрузок;

C – матрица или тензор упругих постоянных;

C_1 – матрица или тензор коэффициентов внутреннего трения.

Граничные условия: $n_\sigma \sigma = f_s$ на S_1; $n_u u = u_s$ на S_2 , (2)

где n_σ – оператор статической совместности на поверхности тела;

n_u – оператор геометрической совместности на поверхности тела;

f_s – нагрузка на участке поверхности S_1;

u_s – граничное перемещение на S_2.

Условие совместности по напряжениям и перемещениям на границах конечных элементов

$$n_{\sigma+}\sigma_+ + n_{\sigma-}\sigma_- = 0 \quad \text{на } S_1^/ ;$$

$$n_{u+}u_+ = n_{u-}u_- \quad \text{на } S_2^/ . \tag{3}$$

Знаки «+» и «-» соответствуют различным сторонам границы сопряжения элементов $S^/ = S_1^/ \cup S_2^/$.

Начальные условия

$$u\big|_{t=0} = a_0 ; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = a_1 .$$

Операторы D и D* сопряженные в смысле Лагранжа:

$$\int_V (D\sigma)^T u dV = \int_V \sigma^T D^* u dV - \int_S \sigma_s{}^T u_s \, dS \;, \tag{4}$$

где $\sigma_s = n_\sigma \sigma$; $u_s = n_u u$, V – объем конечного элемента.

В общем случае граница элемента $S = S_1 \cup S_2 \cup S_1^/ \cup S_2^/$.

Уравнения (1), граничные условия (2), условия совместности (3) эквивалентны условию стационарности следующего функционала [2]:

$$e(p) = \frac{1}{2}\int_V \left[D\sigma + p^2 RU + pTU - 2\left(f + pRa_0 + Ra_1 + Ta_0\right)\right]^T U dV +$$

$$+\frac{1}{2}\int_V \sigma^T \left(D^* U - C^{*-1}\sigma - 2C^{*-1}C_1 D^* a_0\right) dV + \frac{1}{2}\int_{S_1} \left(n_\sigma \sigma - 2 f_s\right)^T n_u U dS_1 - \tag{5}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{S_2} (n_\sigma \sigma)^T (n_u U - 2u_s) dS_2 + \frac{1}{2}\int_{S_1^/} \left(n_\sigma \sigma^/\right)^T n_u U dS_1^/ - \frac{1}{2}\int_{S_2^/} (n_\sigma \sigma)^T n_u u' dS_2' \;,$$

где $C^* = C + p \cdot C_1$, V – объем элементов, на которые разбито тело (знак суммирования в (5) по элементам, на которые разбито тело, опущен).

Вариация функционала (5) имеет вид [2]:

$$\delta e(p)=\int_V\left[D\sigma+p^2RU+pTU-\left(f+pRa_0+Ra_1+Ta_0\right)\right]^T\delta UdV+$$

$$+\int_V\delta\sigma^T\left(D^*U-C^{*-1}\sigma-C^{*-1}D^*a_0\right)dV+\int_{S_1}\left(n_\sigma\sigma-f_s\right)^T n_u\delta UdS_1- \qquad (6)$$

$$-\int_{S_2}\left(n_\sigma\delta\sigma\right)^T\left(n_uU-u_s\right)dS_2+\int_{S_1'}\left(n_\sigma\sigma'\right)^T n_u\delta UdS_1'-\int_{S_2'}\left(n_\sigma\delta\sigma\right)^T n_uu'dS_2'=0.$$

В случае одного независимого поля перемещений по виду вариации функционала (6) заключаем, что нагрузочные члены σ_n и u_s строятся согласно выражению:

$$f+pRa_0+Ra_1+Ta_0+DC_1D^*a_0,$$

где Ra_1 – поле начальных скоростей;

PRa_0 – поле начальных сосредоточенных перемещений;

f – распределенная нагрузка.

Дальнейший ход решения заключается в следующем. Поскольку все особые точки величин, преобразованных по Лапласу, находятся в левой полуплоскости, то обратное преобразование можно осуществить численным образом, положив $p=i\omega$. При $p=i\omega$ строим амплитудо-фазо-частотные характеристики и по ним осуществляем обратное преобразование. В случае стержневой системы уравнения (1) выполняются точно, причем возможно решение задачи Коши в предположении, что известен вектор начальных перемещений u_0 и вектор начальных сил σ_0. Это легко сделать, т.к. рассматриваются гармонические колебания; модель одномерна, и поэтому исходные уравнения (1) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. В общем случае это решение можно записать в виде [2]:

$$\begin{pmatrix}u\\ \sigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K_{uu}(\alpha) & K_{u\sigma}(\alpha)\\ K_{\sigma u}(\alpha) & K_{\sigma\sigma}(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ \sigma_0\end{pmatrix}+\sum\begin{pmatrix}K_{uu}(\alpha-\alpha_n) & K_{u\sigma}(\alpha-\alpha_n)\\ K_{\sigma u}(\alpha-\alpha_n) & K_{\sigma\sigma}(\alpha-\alpha_n)\end{pmatrix}\times \qquad (7)$$

$$\times\begin{pmatrix}0\\ \sigma_n\end{pmatrix}+\sum\int_{S_1}^{S_2}\begin{pmatrix}K_{uu}(\alpha-s) & K_{u\sigma}(\alpha-s)\\ K_{\sigma u}(\alpha-s) & K_{\sigma\sigma}(\alpha-s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \sigma(s)\end{pmatrix}dS,$$

где $K(\alpha)=\begin{pmatrix}K_{uu}(\alpha) & K_{u\sigma}(\alpha)\\ K_{\sigma u}(\alpha) & K_{\sigma\sigma}(\alpha)\end{pmatrix}$ – матрица переноса начальных параметров, элементы которой в общем случае сами являются матрицами;

$K(\alpha)$ – функции влияния;

σ_i – вектор нагружения в i – ом сечении стержня;

$\sigma(s)$ – вектор распределенных нагрузок на участке S_1S_2.

Рассмотрим верхнюю строку матричного соотношения (55) для начала и конца стержня. Обозначим их индексами n и k соответственно.

$$u_k = K_{uu}(l)u_n + K_{u\sigma}(l)\sigma_n + \sum K_{u\sigma}(l-\alpha_i)\sigma_i + \sum \int_{S_1}^{S_2} K_{ur}(l-s)\sigma(s)dS\,;$$

$$-\sigma_n = K_{u\sigma}^{-1}(l)K_{uu}(l)u_n - K_{u\sigma}^{-1}(l)u_k + K_{u\sigma}^{-1}(l)[U_k],$$

где

$$[U_k] = \sum K_{u\sigma}(l-\alpha_i)\sigma_i + \sum \int_{S_1}^{S_2} K_{u\sigma}(l-s)\sigma(s)dS\,.$$

Обозначив

$$-\sigma_n = R_n\,; \quad K_{u\sigma}^{-1}(l)K_{uu}(l) = A^0; \quad K_{u\sigma}^{-1}(l) = B^0\,.$$

Для краевых усилий получим формулу [2]:

$$R_n = A^0 u_n - B^0 u_k + B^0 [U_k],$$

где A^0, B^0 – матрицы динамических жесткостей стержня;

$[U_k]$ – вектор перемещений от местных нагрузок.

Рассмотрим случай соударения стержневой системы с жестким препятствием. Тогда имеем следующие граничные

$$u\big|_{x=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0; \tag{8}$$

и начальные условия

$$u\big|_{t=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=l} = -V_0\,. \tag{9}$$

Преобразуем уравнения (1) и граничные условия (8) по Лапласу при заданных начальных условиях (9). Тогда уравнение (1) и граничные условия (8) для случая продольных колебаний запишутся следующим образом:

$$\mu\, p^2 U - EF\frac{d^2U}{d\,x^2}(1+\gamma\, p) = -\mu V_0\,; \tag{10}$$

$$U\big|_{x=0} = 0; \quad \left.\frac{d\,U}{d\,x}\right|_{x=l} = 0\ ,$$

где $U = U(p)$ – преобразованные по Лапласу перемещения точек стержня; p – параметр преобразования Лапласа.

Для полученного неоднородного дифференциального уравнения решается краевая задача, заключающаяся в нахождении преобразованных по Лапласу краевых продольных сил как функций краевых перемещений.

Для этого рассмотрим однородное уравнение продольных колебаний стержня с учетом рассеяния энергии.

$$\frac{d^2u}{d\,x^2}-\frac{\mu\,p^2}{E\,F\,(1+p\gamma)}u=0. \qquad (11)$$

Обозначая

$$a=-\frac{\mu}{E\,F(1+p\gamma)}\,p^2l^2$$

и переходя к новой переменной $\zeta=\frac{x}{l}$, получим вместо (11)

$$\frac{d^2u}{d\,\zeta^2}+a\,u=0. \qquad (12)$$

Если $p = i\,\omega$, где ω – частотный параметр, то

$$a=\frac{\mu\cdot\omega^2\cdot l^2}{F\cdot E\cdot(1+i\omega\gamma)}.$$

Решение однородного уравнения (69) имеет вид:

$$u=c_1\cos(\alpha\,\zeta)+c_2\sin(\alpha\,\zeta),$$

где $\alpha=\sqrt{a}$.

Постоянные интегрирования c_1 и c_2 находим из начальных условий:

$u = u_0$; $N = N_0$,

где $N=\frac{E\,F}{l}\frac{d\,u}{d\,\zeta}$;

$x=0$: $\zeta=0\Rightarrow c_1=u_0$;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\alpha}{l}c_1\sin(\alpha\zeta)+c_2\frac{\alpha}{l}\cos(\alpha\zeta);$$

$$\frac{N_0}{E\,F}=c_2\frac{\alpha}{l}\quad\Rightarrow\quad c_2=\frac{N_0 l}{\alpha E\,F}.$$

Т.е.

$$u=u_0\cos(\alpha\zeta)+\frac{N_0 l}{E\,F\,\alpha}\sin(\alpha\zeta);$$

$$N=-u_0\frac{E\cdot F}{l}\alpha\sin(\alpha\,\zeta)+N_0\cos(\alpha\,\zeta).$$

Данному решению соответствует следующая матрица переноса:

$$K=\begin{pmatrix}k_{uu} & k_{uN}\\ k_{Nu} & k_{NN}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha\,\zeta) & \dfrac{\sin(\alpha\,\zeta)}{\alpha}\\ -\alpha\sin(\alpha\,\zeta) & \cos(\alpha\,\zeta)\end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Подставив в формулы метода перемещений [1] полученные выражения для элементов матрицы переноса, получим:

$$S_{kn} = S_{nk} = \frac{E_{kn}F_{kn}(1+i\omega\gamma_{kn})\alpha_{kn}}{l_{kn}} \frac{\cos\alpha_{kn}}{\sin\alpha_{kn}}; \tag{14}$$

$$T_{kn} = T_{nk} = \frac{E_{kn}F_{kn}\left(1+i\omega\gamma_{kn}\right)}{l_{kn}} \frac{\alpha_{kn}}{\sin\alpha_{kn}};$$

$$a_{kn} = \omega l_{kn}\sqrt{\frac{\mu_{kn}}{F_{kn}E_{kn}\left(1+i\omega\gamma_{kn}\right)}};$$

$$[u_n] = \frac{-\mu_{kn}V_0 l_{kn}^2}{E_{kn}F_{kn}\left(1+i\omega\gamma_{kn}\right)\alpha_{nj}} \int_0^1 \sin(\alpha_{kn}s)\,ds =$$

$$= -\frac{\mu_{kn}V_0 l_{kn}^2}{E_{kn}F_{kn}\left(1+i\omega\gamma_{kn}\right)} \frac{1-\cos\alpha_{kn}}{\alpha_{kn}^2};$$

$$[u_k] = \frac{-\mu_{kn}V_0 l_{kn}^2}{E_{kn}F_{kn}\left(1+i\omega\gamma_{kn}\right)\alpha_{nj}} \int_0^1 \sin(\alpha_{kn}(1-s))\,ds =$$

$$= -\frac{\mu_{kn}V_0 l_{kn}^2}{E_{kn}F_{kn}\left(1+i\omega\gamma_{kn}\right)} \frac{1-\cos\alpha_{kn}}{\alpha_{kn}^2}.$$

Индексы n и k указывают, соответственно, начало и конец участка стержня. А геометрические и физические константы с индексами nk и kn относятся к конкретному участку стержня.

Разбивая стержень на элементы, пользуясь формулами (14) составляются уравнения динамического равновесия узлов. Эти уравнения представляют собой систему уравнений для неизвестных узловых перемещений. Поскольку соответствующие коэффициенты получаются точным интегрированием, длина участков стержня не ограничена.

Решая полученную систему уравнений при $p = i\omega$, строятся амплитудо-фазо-частотные характеристики для интересующих нас сечений стержня. Эти АФЧХ можно рассматривать как графический образ одностороннего преобразования Фурье, который совпадает с преобразованием Лапласа при импульсных воздействиях. Поскольку все особые точки соответствующих выражений лежат левее мнимой оси, обратное преобразование можно осуществлять, полагая $p = i\omega$, т.е. используя построенные АФЧХ. Задача по построению АФЧХ, где в качестве силового воздействия фигурирует поле начальных скоростей, умноженное на плотность стержня, является вспомогательной. Обычно АФЧХ строятся от воздействия возмущающих сил, затем численным интегрированием или каким-либо иным способом осуществляется обратное преобразование Лапласа.

Применяя аналогичные рассуждения для дифференциального уравнения поперечных колебаний стержня на упругом основании с учетом деформаций сдвига, инерции вращения сечений и продольной силы, которое имеет вид [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E\cdot J\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{G\cdot F}{k}\cdot\left(\chi\cdot\frac{\partial w}{\partial x}-\varphi\right)+N\cdot\frac{\partial w}{\partial x}-J_m\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\xi_m\cdot\varphi+m(x,t)=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{G\cdot F}{k}\cdot\left(\chi\cdot\frac{\partial w}{\partial x}-\varphi\right)\right]-\mu\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\xi\cdot w+p(x,t)=0, \tag{15}$$

где ξ и ξ_m – коэффициенты сопротивления упругого основания линейному перемещению *w* и повороту сечения φ ;

J_m – момент инерции поворота поперечного сечения, м^4;

$E\cdot J$ – жесткость при изгибе;

$\frac{G\cdot F}{k}$ – жесткость при сдвиге;

k – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения и характеризующий распределение касательных напряжений при сдвиге;

$\chi=1-\frac{k\cdot N}{G\cdot F}$;

N – продольная сила, Н;

m(x, t) – распределенный изгибающий момент;

p(x, t) – распределенная поперечная нагрузка, Н.

Получим формулы для тонкого стержня:

$$\begin{gathered}
a_{nk}=(\sin\lambda_{nk}\cdot ch\lambda_{nk}-sh\lambda_{nk}\cdot\cos\lambda_{nk})\cdot\lambda_{nk}\cdot t_{nk};\\
b_{nk}=(sh\lambda_{nk}-\sin\lambda_{nk})\cdot\lambda_{nk}\cdot t_{nk};\\
c_{nk}=sh\lambda_{nk}\cdot\sin\lambda_{nk}\cdot{\lambda_{nk}}^2\cdot t_{nk};\\
d_{nk}=(ch\lambda_{nk}-\cos\lambda_{nk})\cdot{\lambda_{nk}}^2\cdot t_{nk};\\
g_{nk}=(\sin\lambda_{nk}\cdot ch\lambda_{nk}+sh\lambda_{nk}\cdot\cos\lambda_{nk})\cdot{\lambda_{nk}}^3\cdot t_{nk};\\
h_{nk}=(\sin\lambda_{nk}+sh\lambda_{nk})\cdot{\lambda_{nk}}^3\cdot t_{nk};
\end{gathered}\tag{16}$$

где $\frac{1}{t_{nk}}=1-\cos\lambda_{nk}\cdot ch\lambda_{nk}$; $\lambda_{nk}=l_{nk}\cdot\sqrt[4]{\frac{\mu_{nk}\cdot\omega^2}{E_{nk}\cdot J_{nk}}}$.

Найдем величины, зависящие от нагрузки по длине стержня и определяющие правые части разрешающих уравнений:

$$[w_n]=\frac{l_{nk}^4\cdot\mu_{nk}\cdot V_0}{2\cdot\lambda_{nk}^4\cdot E_{nk}\cdot J_{nk}}\cdot(2-ch\lambda_{nk}-\cos\lambda_{nk});$$

$$[\varphi_n] = \frac{l_{nk}^3 \cdot \mu_{nk} \cdot V_0}{2 \cdot \lambda_{nk}^3 \cdot E_{nk} \cdot J_{nk}} \cdot (\sin\lambda_{nk} - sh\lambda_{nk});$$

$$[w_k] = \frac{l_{nk}^4 \cdot \mu_{nk} \cdot V_0}{2 \cdot \lambda_{nk}^4 \cdot E_{nk} \cdot J_{nk}} \cdot (ch\lambda_{nk} + \cos\lambda_{nk} - 2);$$

$$[\varphi_k] = \frac{l_{nk}^3 \cdot \mu_{nk} \cdot V_0}{2 \cdot \lambda_{nk}^3 \cdot E_{nk} \cdot J_{nk}} \cdot (\sin\lambda_{nk} - sh\lambda_{nk}).$$

Данный подход был реализован, аналитически и экспериментально проверен при решении различных задач поперечных и продольных колебаний стержней и стержневых систем, а также при решении задачи динамики ковочного молота как сложной стержневой системы, испытывающей ударные нагрузки в работах [3, 4, 5].

Список литературы

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич; пер.с англ. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
2. Санкин Ю.Н. Динамические характеристики вязко-упругих систем с распределенными параметрами / Ю.Н. Санкин. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1977. – 312 с.
3. Юганова Н.А. Исследование напряженно-деформированного состояния элементов ковочного молота в процессе ударного взаимодействия с заготовкой / Н.А. Юганова. – Ульяновск: УлГПУ, 2013. – 67 с.
4. Юганова Н.А. Частотный метод расчета ковочного молота // Фундаментальные исследования / Н.А. Юганова. – 2012. - № 11 (часть 5) – С. 1210-1213.
5. Sankin Y.N. Longitudinal vibrations of elastic rods of step-variable cross-section colliding with rigid obstacle \ Yu. N. Sankin and N.A. Yuganova, J.Appl. Maths Mechs. – 2001. – Vol.65. - No 3. – PP. 427-433.

Рецензенты:

Лебедев А.М., д.т.н., доцент, профессор Ульяновского высшего авиационного училища (института), г. Ульяновск.

Антонец И.В., д.т.н., профессор Ульяновского государственного технического университета, г. Ульяновск.