

## К ВОПРОСУ РАСЧЕТА СЖАТЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ МГНОВЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

<sup>1</sup>Елистратов В.Н.

<sup>1</sup>ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», Россия, 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4. E-mail: [evn.vladimir@gmail.com](mailto:evn.vladimir@gmail.com)

В статье обозначена проблема, связанная с неучетом аналитической зависимости, аппроксимирующей криволинейную диаграмму с ниспадающим участком мгновенного деформирования бетона, при построении уравнений ползучести бетона, а также при расчете сжатых железобетонных элементов на устойчивость при высоких уровнях загрузки, когда проявляются нелинейные деформации ползучести. Установлено, что применение закона Гука для описания связи между мгновенными деформациями и напряжениями в бетоне при уровнях загрузки более  $0,45R$  приводит к несоответствию теоретических выкладок и проведенных экспериментов. В данной научной работе предложен способ по разрешению этой проблемы путем приведения формулы Саржина, описывающей связь « $\sigma_b - \varepsilon_b$ », приведенной в Еврокоде 2, к удобному виду для практического применения (полиному пятой степени) и ее внедрения в существующие уравнения ползучести вместо закона Гука. В дальнейшем это позволило получить аналитическое уравнение для определения коэффициента ползучести бетона, который нормируется в российских и европейских правилах проектирования бетонных и железобетонных конструкций и используется в расчетах сжатых железобетонных элементов на длительно действующие нагрузки.

Ключевые слова: сжатые железобетонные элементы, характеристика ползучести бетона, параметр нелинейной ползучести бетона, критическая сила, касательный модуль полных деформаций.

## CONCERNING THE ISSUE OF CALCULATION OF THE COMPRESSED REINFORCED CONCRETE ELEMENTS WITH REGARD TO THE INSTANTANEOUS NONLINEARITY AND NONLINEAR CREEP BEHAVIOUR OF CONCRETE

<sup>1</sup>Elistratov V.N.

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State University of architecture and civil engineering, Russia, 190005, Saint-Petersburg, street 2-Krasnoarmeyskaya, 4. E-mail: [evn.vladimir@gmail.com](mailto:evn.vladimir@gmail.com)

The article specifies a problem related to the neglect of analytical dependence that approximates a nonlinear diagram with a falling section of the instantaneous deformation of concrete when making the concrete creep equations, as well as the stability calculation of the compressed reinforced concrete elements at high stresses, when the nonlinear creep deformations occur. It was found out that the use of Hooke's law to describe the connection between the instantaneous deformation and stresses inside the concrete at the stress level of more than  $0,45R$  leads to a mismatch of theoretical calculations and the experiments held. This research paper presents a method to resolve this problem by bringing in the Sargin formula to describe the relationship “ $\sigma_b - \varepsilon_b$ ”, given in Eurocode 2, to a convenient form for practical use (quintic polynomial), and integrate them into the existing creep equations instead of Hooke's law. Subsequently, it has enabled the obtaining of analytical equation to determine the coefficient of concrete creep, which is regulated by the Russian and European design codes for concrete and reinforced concrete structures and is used in calculation of compressed concrete elements for continuous stress.

Keywords: compressed reinforced concrete elements, concrete creep characteristic, nonlinear concrete creep parameter, critical force, the tangent modulus of total deformation.

Железобетонные сжатые элементы широко распространены в практике строительства промышленных и гражданских зданий. К ним относятся несущие колонны одноэтажных и многоэтажных зданий различного назначения, опоры-стойки секционных мостов, сжатые элементы ферм (верхние пояса, стойки, некоторые раскосы) и другие элементы конструкций. Форма их поперечного сечения с точки зрения целесообразности и экономичности чаще применяется квадратной или прямоугольной, развитой в плоскости действия момента. При

значительных по величине изгибающих моментах, действующих в одном направлении, поперечное сечение принимается тавровым или двутавровым. В данной научной работе рассматриваются железобетонные элементы, с прямоугольным поперечным сечением.

Сжатые железобетонные элементы рассчитываются по прочности поперечного сечения и устойчивости всего элемента как в плоскости действия момента, так и в другой плоскости, перпендикулярной к ней.

В нелинейной деформационной модели в соответствии с разделом 8 СП 63.13330.2012 используются следующие предпосылки:

- сопротивление бетона растяжению принимают, равным нулю;
- сопротивление бетона сжатию представляется напряжениями, равными призматической прочности  $R_b$  и равномерно распределенными по сжатой зоне бетона;
- деформации (напряжения) в арматуре определяют в зависимости от высоты сжатой зоны бетона;
- растягивающие напряжения в арматуре принимают не более расчетного сопротивления растяжению  $R_s$ ;
- сжимающие напряжения в арматуре принимают не более расчетного сопротивления сжатию  $R_{sc}$ .

Прочность прямоугольных сечений внецентренно сжатых элементов с арматурой, расположенной у противоположных в плоскости изгиба сторон сечения, при эксцентриситете продольной силы  $e_0 \leq \frac{h}{30}$  и гибкости  $\lambda = \frac{l_0}{h} \leq 20$  определяется из условия:

$$N \leq N_{ult} = \varphi (R_b A + R_{sc} A_{sc,tot}), \quad (1)$$

где  $N_{ult}$  – предельное значение продольной силы, которую может воспринять элемент;

$A_{sc,tot}$  – площадь всей продольной арматуры;

$\varphi$  – коэффициент, принимаемый при длительном действии нагрузки в зависимости от гибкости элемента.

Расчет на устойчивость железобетонных элементов связан с определением критической силы, при которой элемент теряет устойчивость:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{l_0^2}, \quad (2)$$

где  $l_0$  – расчетная длина элемента;

$D$  – жесткость железобетонного элемента, равная:

$$D = k_b E_b I + k_s E_s I_s, \quad (3)$$

где  $E_b$  и  $E_s$  – модули упругости бетона и арматуры;

$I$  и  $I_s$  – моменты инерции площадей сечения бетона и всей продольной арматуры относительно оси центра тяжести поперечного сечения элемента;

$k_b$  и  $k_s$  – коэффициенты, равные:

$$k_b = \frac{0,15}{\varphi_l(0,3 + \delta_e)}, \quad k_s = 0,7; \quad (4)$$

$\varphi_l$  – коэффициент, учитывающий влияние длительности действия нагрузки:

$$\varphi_l = 1 + \frac{M_{l1}}{M_1}, \quad (5)$$

$M_{l1}$  и  $M_1$  – моменты относительно центра наиболее растянутого и наименее сжатого (при целиком сжатом сечении) стержня арматуры соответственно от действия полной нагрузки и от действия постоянных и длительных нагрузок.

$\delta_e$  – относительное значение эксцентриситета продольной силы:

$$\delta_e = \frac{e_0}{h}, \quad (6)$$

где  $e_0$  – эксцентриситет приложения продольной силы;

$h$  – высота поперечного сечения.

Для прямоугольного сечения при расположении арматуры симметрично относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно сечению, момент инерции - бетонного сечения

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad (7)$$

- продольной арматуры

$$I_s = (A_s + A'_s) \left( \frac{h}{2} - a \right)^2 = A_{sc,tot} \frac{(h_0 - a)^2}{4}. \quad (8)$$

Коэффициент армирования определяется выражением:

$$\mu = \frac{A_{sc,tot}}{bh}, \quad (9)$$

откуда

$$A_{sc,tot} = \mu bh. \quad (10)$$

Подставляя выражения (4), (7) и (8) в уравнение (3) получаем выражение для жесткости железобетонного элемента прямоугольного поперечного сечения:

$$D = \frac{0,15 E_b b h^3}{12 \varphi_l (0,3 + \delta_e)} + 0,7 E_s A_{sc,tot} \frac{(h_0 - a)^2}{4}. \quad (11)$$

Коэффициент  $\alpha$ , показывающий отношение модуля упругости арматуры к модулю упругости бетона, равен:

$$\alpha = \frac{E_s}{E_b}. \quad (12)$$

Принимая во внимание соотношения (9), (11) и (12) формула для определения критической силы (2) примет вид:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E_b b h^3}{l_0^2} \left[ \frac{0,0125}{\varphi_l (0,3 + \delta_e)} + 0,175 \alpha \mu \left( \frac{h_0 - a}{h} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Особый интерес в уравнении (13) вызывает коэффициент  $\varphi_l$ , стоящий в знаменателе. Чтобы наглядно показать проблему, существующую в действующих нормах, вынесем коэффициент  $\varphi_l$  за скобки и подставим в него выражение (5):

$$N_{cr} = \frac{E_b}{1 + \frac{M_{II}}{M_1}} \cdot \frac{\pi^2 b h^3}{l_0^2} \left[ \frac{0,0125}{0,3 + \delta_e} + 0,175 \varphi_l \alpha \mu \left( \frac{h_0 - a}{h} \right)^2 \right], \quad (14)$$

где полученное соотношение  $\frac{E_b}{1 + \frac{M_{II}}{M_1}}$  идентично выражению по снижению модуля

упругости, которое тоже нормируется при учете продолжительного действия нагрузки:

$$E_{b,\tau} = \frac{E_b}{1 + \varphi_{b,cr}}, \quad (15)$$

где  $\varphi_{b,cr}$  – коэффициент ползучести (характеристика ползучести), принимаемый в зависимости от класса бетона по прочности и относительной влажности воздуха окружающей среды.

В теории ползучести бетона характеристика ползучести  $\varphi(t, \tau)$  показывает отношение деформации ползучести  $\varepsilon_n(t, \tau)$  в наблюдаемый момент времени  $t$  ( $t > \tau$ ) к начальным упругим деформациям бетона  $\varepsilon_y(\tau)$ , возникшим от нагрузки, приложенной в момент времени  $\tau$ :

$$\varphi(t, \tau) = \frac{\varepsilon_n(t, \tau)}{\varepsilon_y(\tau)}. \quad (16)$$

В российских и европейских нормах проектирования содержится предельная величина характеристики ползучести  $\varphi_\infty = \varphi_{b,cr}$ , которая отражает время  $t = \infty$ , когда деформации ползучести уже не проявляются. Следует заметить, что в СП коэффициент ползучести бетона был получен для условий, когда мгновенные деформации  $\varepsilon_m$  удовлетворялись закону Гука и принимались упругими ( $\varepsilon_m = \varepsilon_y$ ), а коэффициент ползучести  $\varphi_l$  по диаграмме Еврокода 2 получен при напряжениях, не превышающих 45 % от прочности бетонного цилиндра в возрасте 28 сут.

Многочисленные экспериментальные исследования второй половины XX века, проведенные как в СССР, так и за рубежом, показали, что зависимость между напряжением бетона и относительной мгновенной деформацией для случая кратковременного сжатия является криволинейной с ниспадающим участком (рис. 1). К числу исследований, направленных на экспериментальное получение диаграммы мгновенного деформирования бетона, и подбор функций, описывающих данную кривую, относятся работы П.А. Лукаша, В.В. Соколовского, А. А. Прокоповича, Л. И. Онищика, А. А. Дыховичного, С.А. Тазехулахова, Г. А. Гениева, С. П. Шаха и Дж. Винтера (*Surendra P. Shah, George Winter*), Г. М. Штурмана (*Gerald M. Sturman*), А. Кабайла (*A. Kabaila*), Л. П. Саенза (*Luis P. Saenz*), Л. Г. Тулина и К. Герстла (*Leonard G. Tulin, Kurt H. Gerstle*), М. Саржина (*Muharrem Sargin*), П. Десая и С. Кришнана (*Prakash Desayi, S. Krishnan*), Ж.М. Смита и Л.Е. Янга (*G. M. Smith, L. E. Young*) и других авторов.

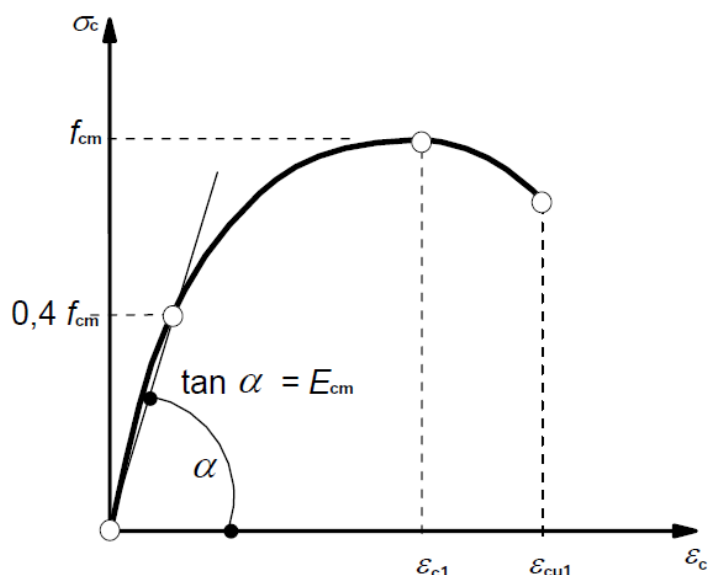


Рис. 1. Диаграмма мгновенного деформирования бетона, нормируемая Еврокодом 2, частью 1-1

Аналитическая зависимость, аппроксимирующая данную кривую, описывается формулой Саржина, нормируемой в части 1-1 Еврокода 2[7]:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \quad (17)$$

где  $k$  и  $\eta$  – коэффициенты, равные:

$$\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}, \quad k = \frac{1,05 E_{cm} \cdot |\epsilon_{c1}|}{f_{cm}};$$

$\sigma_c$  – напряжение бетона в момент наблюдения;  $\epsilon_c$  – относительная деформация бетона;

$\varepsilon_{cl}$  – деформация бетона, соответствующая максимальному напряжению  $f_{cm}$ ;

$\varepsilon_{cul}$  – предельная деформация бетона, соответствующая разрушению образца;

$f_{cm}$  – максимальное напряжение в бетоне (среднее значение прочности бетонного цилиндра при сжатии в возрасте 28 суток);

$E_{cm}$  – касательный модуль упругости бетона, определенный в возрасте 28 суток.

Уравнение (17) можно записать в буквенных обозначениях, принятых в Российских нормах СП:

$$\frac{\sigma_b}{R_b} = \frac{\frac{E_b \cdot \varepsilon_{b0}}{R_b} \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b0}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b0}} \right)^2}{1 + \left( \frac{E_b \cdot \varepsilon_{b0}}{R_b} - 2 \right) \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b0}} \right)}, \quad (18)$$

где  $\varepsilon_{b0}$  – предельная относительная деформация бетона при равномерном осевом сжатии, равная 0,002.

Заметим, что выражение (18) никак не учитывается при определении значения  $N_{cr}$  по формуле (14). Неучет мгновенной нелинейности приводит к искажению конечных результатов в практических расчетах.

Опытным путем установлено, что линейная зависимость от напряжений для мгновенных деформаций и деформаций ползучести характеризует работу бетона при очень малых уровнях загрузки – не более 20 % от призменной прочности бетона. При высоких уровнях загрузки бетона, приближающихся к 80...90 % от предела прочности, существующие уравнения ползучести показывают существенное различие теории и эксперимента. Этот факт свидетельствует о том, что необходимо проведение дальнейших экспериментальных и теоретических исследований в теории железобетона, а именно, выведение уточненных уравнений нелинейных теорий ползучести бетона, получение предельной характеристики ползучести при совместном учете мгновенной нелинейности и нелинейной ползучести бетона, исследование напряженно-деформированного состояния сжатых элементов и совершенствование расчетов по первой и второй группам предельных состояний с учетом мгновенных нелинейных деформаций.

В работах [1, 2, 3] показан способ учета зависимости (17) в уравнениях ползучести нелинейной теории старения бетона. В частности, при описании диаграммы (см. рис. 1) полиномом пятой степени, который предложил известный специалист в теории железобетона – Байков В. Н., получено уточненное уравнение ползучести вида:

$$\dot{\varepsilon} = (a + 2b\sigma_b + 3c\sigma_b^2 + 4d\sigma_b^3 + 5e\sigma_b^4)\dot{\sigma}_b + \frac{1}{E_0}\phi_t[\sigma_b + \Psi\sigma_b^2], \quad (19)$$

где  $E_0$  – начальный модуль упругости бетона;

$\Psi$  – новый параметр нелинейной ползучести, равный:

$$\Psi = \frac{b}{a} + \beta, \quad (20)$$

$\beta$  – коэффициент нелинейной ползучести, принимаемый по таблице Улицкого И.И.;

$a, b, c, d$  и  $e$  – опытные коэффициенты, равные:

$$a = \frac{1}{E_b}, \quad (21)$$

$$b = \frac{1}{E_b^3} \left[ \left( \frac{E_b}{R_b} - \frac{2}{\epsilon_{b0}} \right) E_b + \frac{R_b}{\epsilon_{b0}^2} \right], \quad (22)$$

$$c = \frac{1}{E_b^5} \left[ \left( \frac{E_b}{R_b} - \frac{2}{\epsilon_{b0}} \right)^2 E_b^2 + 3 \left( \frac{E_b}{R_b} - \frac{2}{\epsilon_{b0}} \right) E_b \frac{R_b}{\epsilon_{b0}^2} + 2 \left( \frac{R_b}{\epsilon_{b0}^2} \right)^2 \right], \quad (23)$$

$$d = \frac{1}{E_b^7} \left[ \left( \frac{E_b}{R_b} - \frac{2}{\epsilon_{b0}} \right)^3 E_b^3 + 6 \left( \frac{E_b}{R_b} - \frac{2}{\epsilon_{b0}} \right)^2 E_b^2 \frac{R_b}{\epsilon_{b0}^2} + 10 \left( \frac{E_b}{R_b} - \frac{2}{\epsilon_{b0}} \right) E_b \left( \frac{R_b}{\epsilon_{b0}^2} \right)^2 + 5 \left( \frac{R_b}{\epsilon_{b0}^2} \right)^3 \right], \quad (24)$$

$$e = \frac{1}{E_b^9} \left[ \left( \frac{E_b}{R_b} - \frac{2}{\epsilon_{b0}} \right)^4 E_b^4 + 10 \left( \frac{E_b}{R_b} - \frac{2}{\epsilon_{b0}} \right)^3 E_b^3 \frac{R_b}{\epsilon_{b0}^2} + 30 \left( \frac{E_b}{R_b} - \frac{2}{\epsilon_{b0}} \right)^2 E_b^2 \left( \frac{R_b}{\epsilon_{b0}^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 35 \left( \frac{E_b}{R_b} - \frac{2}{\epsilon_{b0}} \right) E_b \left( \frac{R_b}{\epsilon_{b0}^2} \right)^3 + 14 \left( \frac{R_b}{\epsilon_{b0}^2} \right)^4 \right]. \quad (25)$$

Неоспоримым достоинством теории старения по сравнению с другими теориями ползучести является то, что при ее использовании появляется возможность получить аналитическое выражение для характеристики ползучести бетона с учетом формулы Еврокода 2 (17) и нелинейной ползучести.

Решая совместно уравнение (19) и уравнение равновесия

$$N = A_b \cdot \sigma_b + A_s \cdot E_s \cdot \epsilon, \quad (26)$$

можно прийти к следующим разрешающим уравнениям:

$$\varphi_t = E_0 \left[ -\frac{1+aB}{B} \ln \left| \frac{A-B\epsilon}{A-B\epsilon_0} \right| + \left( \frac{1+aB}{B} - \frac{2b}{\Psi} + \frac{3c}{\Psi^2} - \frac{4d}{\Psi^3} + \frac{5e}{\Psi^4} \right) \ln \left| \frac{\Psi(A-B\epsilon)+1}{\Psi(A-B\epsilon_0)+1} \right| + \right. \\ \left. + \frac{B}{\Psi} \left[ 3c + 4d \left( A - \frac{1}{\Psi} \right) + 5e \left( A^2 - \frac{A}{\Psi} + \frac{1}{\Psi^2} \right) \right] (\epsilon - \epsilon_0) - \right. \\ \left. - \frac{B^2}{\Psi} \left[ 2d + \frac{5e}{2} \left( 2A + \frac{5}{\Psi} \right) \right] (\epsilon^2 - \epsilon_0^2) + \frac{5eB^3}{3\Psi} (\epsilon^3 - \epsilon_0^3); \right. \quad (27)$$

$$\varphi_t = E_0 \left[ (D+a) \ln \left( \frac{\sigma_{b0}}{\sigma_b} \right) - \left( D+a - \frac{2b}{\Psi} + \frac{3c}{\Psi^2} - \frac{4d}{\Psi^3} + \frac{5e}{\Psi^4} \right) \ln \left( \frac{\Psi\sigma_{b0}+1}{\Psi\sigma_b+1} \right) + \right. \quad (28)$$

$$+ \left( \frac{3c}{\Psi} - \frac{4d}{\Psi^2} + \frac{5e}{\Psi^3} \right) (\sigma_{b0} - \sigma_b) + \left( \frac{2d}{\Psi} - \frac{5e}{2\Psi^2} \right) (\sigma_{b0}^2 - \sigma_b^2) + \frac{5e}{3\Psi} (\sigma_{b0}^3 - \sigma_b^3) \Big].$$

где  $\varepsilon$  – продольные деформации центрально-сжатого железобетонного элемента;

$\sigma_{b0}$  – начальное напряжение в бетоне в момент времени  $t = 0$ ;

$\sigma_b$  – напряжение в бетоне в момент наблюдения;

$A, B$  и  $D$  – постоянные коэффициенты, равные  $A = \frac{N}{A_b}$ ,  $B = \frac{A_s E_s}{A_b}$  и  $D = \frac{A_b}{A_s E_s}$ .

Уравнения (27) и (28) позволяют не только изучать процесс изменения характеристики ползучести бетона  $\varphi_t$  во времени с учетом мгновенной нелинейности и нелинейной ползучести бетона (при  $\sigma_b \geq 0,45R$ ), но и одновременно исследовать процессы изменения напряжений в бетоне  $\sigma_b$  и арматуре  $\sigma_s$  с течением времени и устанавливать особенности перераспределения этих напряжений с учетом мгновенной нелинейности бетона.

Чтобы проанализировать влияние ползучести и мгновенной нелинейности бетона на величину критической силы, при которой сжатый железобетонный элемент теряет устойчивость, рассмотрим следующую задачу.

**Условие.** Железобетонная колонна длиной 10,0 м прямоугольного профиля и сплошного сечения высотой  $h = 50$  см и шириной  $b = 40$  см имеет шарнирное опирание на двух концах и загружена продольной постоянной силой  $N$ , приложенной со случайным эксцентриситетом равным нулю. В этом случае коэффициент  $\delta_e = 0$ .

**Найти** прочность сечения  $N_{ult}$  и величину критической силы  $N_{cr}$  по действующим российским нормам СП и по методике, предложенной автором, и сравнить полученные результаты.

#### Исходные материалы:

- бетон тяжелый класса по прочности на сжатие В15:
  - призменная прочность  $R_b = 85$  кгс/см<sup>2</sup>,
  - модуль упругости  $E_b = 240000$  кгс/см<sup>2</sup>,
- арматура класса А400:
  - расчетное сопротивление сжатию  $R_{sc} = 3550$  кгс/см<sup>2</sup>,
  - модуль упругости  $E_s = 2 \cdot 10^6$  кгс/см<sup>2</sup>,
  - защитный слой бетона  $a = a' = 4$  см.

#### Решение

Определим расчетную длину колонны  $l_0$  и ее гибкость  $\lambda$ :

$$l_0 = 1,0H = 10,0 \text{ м}, \quad \lambda = \frac{l_0}{h} = \frac{1000}{50} = 20.$$



В первом приближении принимаем арматуру  $2 \times 2\text{Ø}16\text{A}400$  с площадью сечения стержня  $2,011 \text{ см}^2$  и общей площадью  $A_{sc,tot} = 8,04 \text{ см}^2$ .

Определяем коэффициент армирования  $\mu$  по выражению (9):

$$\mu = \frac{8,04}{40 \cdot 50} = 0,004.$$

Прочность сечения по формуле (1) при гибкости колонны  $\lambda = 20$ :

$$N_{ult} = 0,7 \cdot (85 \cdot 2000 + 3550 \cdot 8,04) = 0,7 \cdot (170000 + 28542) = 138979 \text{ кгс}$$

### 1. Вначале произведем расчет согласно требованиям СП [6].

Принимаем отношение  $\frac{M_{l1}}{M_1} = 1$ , тогда коэффициент  $\varphi_l$ , учитывающий влияние

длительности действия нагрузки:

$$\varphi_l = 1 + \frac{M_{l1}}{M_1} = 1 + 1 = 2,$$

и выражение для критической силы (14) примет вид:

$$N_{cr1} = \frac{E_b}{2} \cdot \frac{\pi^2 b h^3}{l_0^2} \left[ 0,042 + 0,175 \cdot 2 \cdot \alpha \mu \left( \frac{h_0 - a}{h} \right)^2 \right],$$

где коэффициент  $\alpha$  определяется отношением (12):

$$\alpha_1 = \frac{2 \cdot 10^6}{240000} = 8,33.$$

Вычисляем величину критической силы:

$$N_{cr1} = \frac{240000}{2} \cdot \frac{3,14^2 \cdot 40 \cdot 50^3}{1000^2} \left[ 0,042 + 0,175 \cdot 2 \cdot 8,33 \cdot 0,004 \cdot \left( \frac{46 - 4}{50} \right)^2 \right] = 297100 \text{ кгс}$$

### 2. По предложению Байкова В. Н. и рекомендациям Еврокода 2 учтем в расчете касательный модуль полных деформаций (включая ползучесть).

Касательный модуль полных деформаций  $E_{кас}$  является величиной переменной и зависит от уровня нагружения бетона. Для определения касательного модуля нужно знать деформации в железобетонной колонне при заданном уровне нагружения:

$$E_{кас} = \frac{d\sigma_b}{d\varepsilon}.$$

Рассмотрим случай, когда на колонну действует нагрузка  $N$ , составляющая 80 % от предела прочности сечения, характеризующая высокий уровень нагружения и область нелинейной ползучести:

$$N = 0,8 \cdot 138979 = 111183 \text{ кгс}.$$

Преобразуем уравнение (26), учитывая равенство напряжений в арматуре:

$$N = A_b \cdot E_b \cdot \varepsilon + A_s \cdot E_s \cdot \varepsilon,$$

откуда получаем

$$\varepsilon = \frac{N}{E_s A_s + E_b A_b}.$$

Определим продольные деформации от действия силы  $N$

$$\varepsilon = \frac{111183}{2 \cdot 10^6 \cdot 8,04 + 240000 \cdot 2000} = 22 \cdot 10^{-5}.$$

Дифференцируя выражение (18) по переменной  $\varepsilon$  и подставляя в полученное выражение величину деформаций  $\varepsilon$  и исходные данные, получим значение касательного модуля полных деформаций  $E_{\text{кас}} = 116500$  кгс/см<sup>2</sup>.

Тогда коэффициент  $\alpha_2$  по формуле (12):

$$\alpha_2 = \frac{2 \cdot 10^6}{116500} = 17,17.$$

Преобразуем выражение для критической силы с учетом полученных значений:

$$N_{cr2} = \frac{E_{\text{кас}}}{2} \cdot \frac{\pi^2 b h^3}{l_0^2} \left[ 0,042 + 0,175 \cdot 2 \cdot \alpha_2 \mu \left( \frac{h_0 - a}{h} \right)^2 \right],$$

Вычисляем величину критической силы:

$$N_{cr2} = \frac{116500}{2} \cdot \frac{3,14^2 \cdot 40 \cdot 50^3}{1000^2} \left[ 0,042 + 0,175 \cdot 2 \cdot 17,17 \cdot 0,004 \cdot \left( \frac{46 - 4}{50} \right)^2 \right] = 169300 \text{ кгс}.$$

### 3. Расчет с учетом коэффициента ползучести $\varphi_{b,cr}$ в соответствии с формулой (15).

В работах [2, 3] приведены результаты кратковременных и длительных экспериментальных исследований, проведенных автором, и показан способ экспериментального получения предельной величины характеристики ползучести для бетона класса В15 с помощью уравнения (27). В соответствии с рекомендациями Еврокода 2 принимаем коэффициент  $\varphi_{b,cr}$  при влажности от 40 до 75 % равным 3,4.

В этом случае коэффициент  $\varphi_l$ :

$$\varphi_l = 1 + \varphi_{b,cr}, \quad (29)$$

или

$$\varphi_l = 1 + 3,4 = 4,4.$$

Для наглядности сравнения учитывать касательный модуль полных деформаций не будем. Выражение для критической силы записывается следующим образом:

$$N_{cr3} = \frac{E_b}{4,4} \cdot \frac{\pi^2 b h^3}{l_0^2} \left[ 0,042 + 0,175 \cdot 4,4 \cdot \alpha_1 \mu \left( \frac{h_0 - a}{h} \right)^2 \right].$$

Подставляя исходные данные, определяем:

$$N_{cr2} = \frac{240000}{4,4} \cdot \frac{3,14^2 \cdot 40 \cdot 50^3}{1000^2} \left[ 0,042 + 0,175 \cdot 4,4 \cdot 8,33 \cdot 0,004 \cdot \left( \frac{46-4}{50} \right)^2 \right] = 161600 \text{ кгс.}$$

#### 4. Расчет с учетом коэффициента ползучести $\phi_{b,cr}$ и касательного модуля $E_{кас}$ .

Таким образом, имеем выражение для критической силы:

$$N_{cr4} = \frac{E_{кас}}{4,4} \cdot \frac{\pi^2 b h^3}{l_0^2} \left[ 0,042 + 0,175 \cdot 4,4 \cdot \alpha \mu \left( \frac{h_0 - a}{h} \right)^2 \right].$$

Подставляя в формулу для критической силы исходные данные и величины  $\phi_{b,cr}$  и  $E_{кас}$ , получаем:

$$N_{cr4} = \frac{116500}{4,4} \cdot \frac{3,14^2 \cdot 40 \cdot 50^3}{1000^2} \left[ 0,042 + 0,175 \cdot 4,4 \cdot 17,17 \cdot 0,004 \cdot \left( \frac{46-4}{50} \right)^2 \right] = 103500 \text{ кгс.}$$

#### 5. Уточним $N_{cr}$ с учетом параметра нелинейной ползучести $\Psi$ , полученного автором в теоретических разработках.

Коэффициент  $\phi_l$ , учитывающий влияние длительности действия нагрузки:

$$\phi_l = 1 + \Psi \phi_{b,cr}, \quad (30)$$

где  $\Psi$  – параметр нелинейной ползучести, определяемый выражением (20).

Тогда

$$\phi_l = 1 + \left( \frac{b}{a} + \beta \right) \cdot \phi_{b,cr}. \quad (31)$$

Рассмотрим высокий уровень загрузки ( $0,8N_{ult}$ ), создаваемый силой  $N = 111183$  кгс. Параметр нелинейной ползучести  $\beta$  устанавливаем согласно исследованиям Улицкого И. И. – известного специалиста в области теории старения бетона:

$$\beta = 0,005.$$

Определим коэффициенты  $b$  и  $a$  для бетона по выражениям (21) и (22)

$$a = \frac{1}{240000} = 42 \cdot 10^{-7};$$

$$b = \frac{1}{240000^3} \left[ \left( \frac{240000}{85} - \frac{2}{0,002} \right) \cdot 240000 + \frac{85}{0,002^2} \right] = 332 \cdot 10^{-10}.$$

Тогда коэффициент:

$$\phi_l = 1 + \left( \frac{332 \cdot 10^{-10}}{42 \cdot 10^{-7}} + 0,005 \right) \cdot 3,4 = 1,044.$$

По предложению Байкова В. Н. при применении нелинейной зависимости между мгновенными деформациями и напряжениями необходимо использовать величину  $E_{кас}$ .

Преобразуем выражение для критической силы с учетом касательного модуля полных деформаций и полученного значения коэффициента  $\varphi_l = 1,044$ :

$$N_{cr5} = \frac{E_{кас}}{1,044} \cdot \frac{\pi^2 b h^3}{l_0^2} \left[ 0,042 + 0,175 \cdot 1,044 \cdot \alpha_{\mu} \left( \frac{h_0 - a}{h} \right)^2 \right].$$

Подставляя исходные данные, определяем:

$$N_{cr5} = \frac{116500}{1,044} \cdot \frac{3,14^2 \cdot 40 \cdot 50^3}{1000^2} \left[ 0,042 + 0,175 \cdot 1,044 \cdot 17,17 \cdot 0,004 \cdot \left( \frac{46 - 4}{50} \right)^2 \right] = 279800 \text{ кгс}.$$

Таким образом, если взять за основу (100 %) значение критической силы, полученной в варианте № 1 (297100 кгс), то различия в результатах расчета последующих вариантов составят:

- вариант № 2 (169300 кгс) – 43 %;
- вариант № 3 (161600 кгс) – 46 %;
- вариант № 4 (103500 кгс) – 65 %;
- вариант № 5 (279800 кгс) – 6 %.

Полученные результаты указывают на необходимость учета касательного модуля полных деформаций и уточненного значения коэффициента ползучести, полученного с применением формулы (17) в расчетах железобетонных конструкций.

### Список литературы

1. Елистратов, В. Н. Расчет сжатых железобетонных элементов с учетом ползучести бетона / В. Н. Елистратов // Вестник гражданских инженеров СПбГАСУ. – 2013. – № 5 (40). – С. 85-90.
2. Елистратов, В. Н. Учет мгновенной нелинейности бетона в уравнениях ползучести бетона / В. Н. Елистратов // Вестник гражданских инженеров СПбГАСУ. – 2012. – № 3 (32). – С. 115-118.
3. Елистратов, В. Н. Экспериментально-теоретическое получение характеристики ползучести бетона при высоких уровнях загрузки с учетом мгновенной нелинейности / В. Н. Елистратов // Вестник гражданских инженеров СПбГАСУ. – 2013. – № 4 (39). – С. 92-99.
4. Санжаровский, Р. С. Евростандарты и нелинейная теория железобетона: монография / А. Д. Беглов, Р. С. Санжаровский. – СПб., 2011. – 309 с.: ил. – Библиогр. С. 296-306.
5. Санжаровский, Р. С. Проблемы теории ползучести / Р. С. Санжаровский // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – № 3. – С. 28-34.

6. СП 63.13330.2012 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. – Введ. 2013–01–01. – М.: Минрегион России, 2012. – 155 с.
7. EN 1992–1–1:2004 (E). Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1–1: General rules and rules for buildings. – London: BSI, 2004. – 225 p.

**Рецензенты:**

Веселов А.А., д.т.н., профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», г. Санкт-Петербург.

Серов Е.Н., д.т.н., профессор кафедры конструкций из дерева и пластмасс ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», г. Санкт-Петербург.