УДК 656.02+351.811.12

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СВЕТОФОРНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ В УЗЛОВОЙ ТОЧКЕ, ПРИ СПРАВЕДЛИВОСТИ ГИПОТЕЗЫ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ИНТЕРВАЛОВ ПО ВРЕМЕНИ, ПО ОБОБЩЕННОМУ ЗАКОНУ ЭРЛАНГА

Наумова Н. А., Кирий К. А., Карачанская Т. А.

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет» Министерства образования и науки РФ, Краснодар, Россия (350072, Краснодар, ул. Московская, д.2-А), e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

Задача оптимизации распределения транспортных потоков по сети является актуальной. Авторами ранее была разработана математическая модель распределения транспортных потоков по сети при условии справедливости гипотезы о распределении интервалов по времени между транспортными средствами по обобщенному закону Эрланга. В данной работе приводится исследование возможности оптимизации функционирования узловой точки сети типа «регулируемое пересечение требований» за счет выбора параметров светофорного регулирования. Составлена соответствующая задача математического программирования. Проведено исследование данной задачи. По результатам исследования составлен алгоритм ее численного решения. Исходными данными для решения задачи является распределение интенсивностей движения автотранспортных средств по всем полосам на походах к узловой точке.

Ключевые слова: транспортные потоки, узловая точка, функция транспортных затрат, обобщенное распределение Эрланга, оптимизация.

THE METHOD OF DETERMINING OF OPTIMAL PARAMETERS OF TRAFFIC LIGHTS FOR NODES WHEN JUSTICE OF A HYPOTHESIS ABOUT THE DISTRIBUTION OF INTERVALS OF TIME ON GENERALIZED ERLANG LAW

Naumova N. A., Kiriy K. A., Karachanskaya T. A.

Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia (350072, Krasnodar, street Moskovskaya, 2-A), e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

The problems of modeling and optimization of the distribution of traffic flow on the network is urgent. The authors previously developed a mathematical model of distribution of traffic flow on the network, subject to the justice of a hypothesis about the distribution of intervals of time between vehicles on generalized Erlang law. In this paper the authors provides a survey of the possibilities of optimization of functioning of the node type «unregulated crossing streams requirements» by choosing the parameters of traffic lights. The relevant mathematical programming task was made. The study of this task was conducted. The algorithm of its numerical solution was developed. Initial data for solving the problem is the distribution of intensities of vehicle movement on all lane on trips to the node.

Keywords: traffic flows, the node, function of transport costs, generalized Erlang distribution, optimization.

Задача оптимизации распределения транспортных потоков по сети, несомненно, актуальна, и, несмотря на многочисленные исследования в этой области, по-прежнему еще требует решения [2]. Это связано с многочисленностью и, порой, противоречивостью параметров оптимизации; сложностью определения исходных данных для оптимизации; необходимостью привязки алгоритмов к конкретной транспортной сети и т.п. В данной работе приводятся исследования авторов по вопросу оптимизации параметров светофорного регулирования в узловых точках. Применение этих исследований на стадии проектирования сети или при реорганизации дорожного движения позволит избежать транспортных заторов на перекрестках.

Математическая модель задачи оптимизации параметров светофорного

регулирования в узловой точке

Рассматривая транспортный поток как случайный процесс [1, 4], авторами ранее была разработана математическая модель движения автотранспортных средств по улично-дорожной сети и выведены аналитически функции для определения параметров качества организации движения при справедливости гипотезы о распределении интервалов по времени между транспортными средствами по обобщенному закону Эрланга [3].

Пусть $n1$ – число потоков магистрали № 1; $n2$ – число потоков магистрали № 2;
h – среднее время (в секундах) между пересекающими узловую точку требованиями одного потока;
$H_i(t)$ – функция восстановления для i-го потока магистрали № 1;
$W_i(T_i, \lambda)$ – суммарная задержка всех требований i-го потока за один цикл регулирования;
T_1 – время, в течение которого запрещено движение для потоков магистрали № 1, с;
T_2 – время, в течение которого запрещено движение для потоков магистрали № 2, с;
$T = T_1 + T_2$.

Суммарная задержка всех требований данного потока за единицу времени – один час, выражается следующим образом:

$$W(T_i,\lambda)\cdot\frac{3600}{T}\cdot\frac{1}{3600}=\frac{W(T_i,\lambda)}{T}\ \text{(треб.·ч)}$$

Поставим следующую задачу оптимизации функционирования узловой точки типа «регулируемое пересечение потоков требований»: минимизировать суммарную часовую задержку всех требований в данном узле. Целевая функция:

$$Z=\frac{\sum\limits_i W_i(T_1,\lambda)+\sum\limits_j W_j(T_2,\lambda)}{T}\to\min \qquad (1)$$

В результате следует получить оптимальные значения параметров регулирования T_1, T_2.

При этом для каждого потока должно выполняться условие отсутствия затора (т.е. при движении требований по данной полосе количество требований, прибывающих к УТ за один цикл, не превышает количества требований, пересекающих УТ за то время T_i, когда движение разрешено):

$$H_i(T,\lambda)-\frac{T_2}{h}\le 0,\ i=1,2,\ldots,n1; \qquad (2)$$

$$H_j(T,\lambda)-\frac{T_1}{h}\le 0,\ j=1,2,\ldots,n2. \qquad (3)$$

Кроме этого необходимо выполнение условия:

$$T_1 \geq M, \quad T_2 \geq M, \tag{4}$$

$$T_1 + T_2 = T \tag{5}$$

где M – минимальное время (в секундах), необходимое требованию для пересечения узловой точки типа «регулируемое пересечение потоков требований».

Теорема. Задача математического программирования (1)-(5) не имеет экстремума во внутренних точках области допустимых значений.

Доказательство

С учетом (5) получаем задачу математического (нелинейного) программирования (ЗМП):

$$Z(T_1, T) = \frac{\sum_i W_i(T_1, \lambda) + \sum_j W_j(T - T_1, \lambda)}{T} \to \min$$

$$\Omega : \begin{cases} H_i(T, \lambda) - \dfrac{T - T_1}{h} \leq 0, \; i = 1,2,\ldots,n1 \\ H_j(T, \lambda) - \dfrac{T_1}{h} \leq 0, \; j = 1,2,\ldots,n2 \\ T_1 \geq M, \end{cases}$$

Функция двух переменных задана в замкнутой области Ω. При условии, что область допустимых значений непустая, найдем решение ЗМП.

Критические точки являются решением системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial T_1} = \dfrac{1}{T}\left(\sum_{i=1}^{n1} \dfrac{\partial W_i(T_1)}{\partial T_1} + \sum_{j=1}^{n2} \dfrac{\partial W_j(T - T_1)}{\partial T_1} \right) = 0; \\ \dfrac{\partial Z}{\partial T} = -\dfrac{\sum_{i=1}^{n1} W_i(T_1, \lambda) + \sum_{j=1}^{n2} W_j(T - T_1, \lambda)}{T^2} + \dfrac{1}{T}\left(\sum_{i=1}^{n1} \dfrac{\partial W_i(T_1)}{\partial T} + \sum_{j=1}^{n2} \dfrac{\partial W_j(T - T_1)}{\partial T} \right) = 0 \end{cases}$$

1. Учтем, что $\dfrac{\partial \left(\int_0^T H(t)dt \right)}{\partial T} = H(T)$. Кроме того, $H(t)$ – возрастает, а следовательно – $\int_0^T H(t)dt \leq H(T) \cdot T$. Преобразуем частную производную $\dfrac{\partial Z}{\partial T_1}$:

$$\frac{\partial Z}{\partial T_1} = \frac{1}{T}\left(\sum_{i=1}^{n1} \frac{\partial W_i(T_1)}{\partial T_1} + \sum_{j=1}^{n2} \frac{\partial W_j(T - T_1)}{\partial T_1} \right) =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\sum_{i=1}^{n1} H_i(T_1) - \sum_{j=1}^{n2} H_j(T - T_1) \right)$$

Функция $H(t)$ – возрастающая, тогда $H_i(T_1)$ возрастает по переменной T_1, а $H_j(T-T_1)$ убывает по переменной T_1. Следовательно, $\frac{\partial Z}{\partial T_1}=\frac{1}{T}\left(\sum_{i=1}^{n1}H_i(T_1)-\sum_{j=1}^{n2}H_j(T-T_1)\right)$ монотонно возрастает по T_1. Тогда при фиксированном значении T уравнение

$$\frac{1}{T}\left(\sum_{i=1}^{n1}H_i(T_1)-\sum_{j=1}^{n2}H_j(T-T_1)\right)=0 \tag{6}$$

имеет единственное решение.

2. Оценим значение частной производной $\frac{\partial Z}{\partial T}$:

$$\frac{\partial Z}{\partial T}=-\frac{\sum_{i=1}^{n1}W_i(T_1,\lambda)+\sum_{j=1}^{n2}W_j(T-T_1,\lambda)}{T^2}+\frac{1}{T}\left(\sum_{i=1}^{n1}\frac{\partial W_i(T_1)}{\partial T}+\sum_{j=1}^{n2}\frac{\partial W_j(T-T_1)}{\partial T}\right)=$$

$$=-\frac{\sum_{i=1}^{n1}W_i(T_1,\lambda)+\sum_{j=1}^{n2}W_j(T-T_1,\lambda)}{T^2}+\frac{\sum_{j=1}^{n2}H_j(T-T_1)}{T}=$$

$$=\frac{-\sum_{i=1}^{n1}W_i(T_1,\lambda)-\sum_{j=1}^{n2}W_j(T-T_1,\lambda)+T\cdot\sum_{j=1}^{n2}H_j(T-T_1)}{T^2}\geq$$

$$\geq\frac{-T_1\cdot\left(\sum_{i=1}^{n1}H_i(T_1)-\sum_{j=1}^{n2}H_j(T-T_1)\right)}{T^2}$$

С учетом (6):

$$\frac{\partial Z}{\partial T}\geq\frac{-T_1\cdot\left(\sum_{i=1}^{n1}H_i(T_1)-\sum_{j=1}^{n2}H_j(T-T_1)\right)}{T^2}=0 \tag{7}$$

То есть $\frac{\partial Z}{\partial T}\geq 0$ при всех значениях переменных T и T_1, если выполнено условие (6). Причем равенство нулю возможно только в случае, когда все неравенства:

$$W_i(T_1,\lambda)\leq H_i(T_1)\cdot T_1,\quad i=1,2,...,n1;$$

$$W_j(T_2,\lambda)\leq H_j(T_2)\cdot T_2,\quad i=1,2,...,n2$$

обращаются в равенство, что возможно только в случае регулярного ($H(t)=const$), а не случайного процесса. Следовательно, экстремума во внутренних точках области определения нет.

Ч.Т.Д.

Таким образом, ***алгоритм решения ЗМП (1-5)***:

1) проверяем, что область допустимых значений непустая;

2) исследуем на каждой из границ функцию $Z = Z(T_1, T)$; для этого решаем уравнение $\frac{1}{T}\left(\sum_{i=1}^{n1} H_i(T_1) - \sum_{j=1}^{n2} H_j(T - T_1)\right) = 0$, выразив T через T_1 из уравнения границы;

3) среди всех найденных значений функции $Z = Z(T_1, T)$ выбираем наименьшее.

Алгоритм численного решения задачи оптимизации параметров регулирования в узловой точке

Определим начальную точку для решения задачи (1)-(5) численным методом.

1-й этап. Считая $T - const$, определим начальную точку для решения задачи (*) численным методом.

$$Z = \frac{1}{T}\left[\sum_i\left(\frac{1}{2\mu_i}T_1^2 + \frac{\sigma_i^2 - \mu_i^2}{2\mu_i^2}T_1 + \tilde{R}_{1i}\right) + \sum_j\left(\frac{1}{2\mu_j}T_2^2 + \frac{\sigma_j^2 - \mu_j^2}{2\mu_j^2}T_2 + \tilde{R}_{2j}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left(T_1^2 \cdot \sum_i\left(\frac{1}{2\mu_i}\right) + T_1 \cdot \sum_i \frac{\sigma_i^2 - \mu_i^2}{2\mu_i^2} + \sum_i \tilde{R}_{1i}\right) +$$

$$+ \frac{1}{T}\left((T - T_1)^2 \sum_j\left(\frac{1}{2\mu_j}\right) + (T - T_1)\sum_j \frac{\sigma_j^2 - \mu_j^2}{2\mu_j^2} + \sum_j \tilde{R}_{2j}\right)$$

Здесь имеет место обозначение: $\tilde{R}_{1i} = \int_0^{T_1} R_i(t)dt$, $\tilde{R}_{2j} = \int_0^{T_2} \tilde{R}_j(t)dt$.

Найдем производную по переменной T_1:

$$\frac{\partial Z}{\partial T_1} = \frac{1}{T}\left(T_1 \cdot \sum_i\left(\frac{1}{\mu_i}\right) + \sum_i \frac{\sigma_i^2 - \mu_i^2}{2\mu_i^2} + \sum_i R_i(T_1) - (T - T_1)\cdot\sum_j\left(\frac{1}{\mu_j}\right) - \sum_j \frac{\sigma_j^2 - \mu_j^2}{2\mu_j^2} - \sum_j R_j(T - T_1)\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\left[T_1 \cdot \left(\cdot \sum_i\left(\frac{1}{\mu_i}\right) + \sum_j\left(\frac{1}{\mu_j}\right)\right) - T \cdot \sum_j\left(\frac{1}{\mu_j}\right) + \sum_i \frac{\sigma_i^2 - \mu_i^2}{2\mu_i^2} - \sum_j \frac{\sigma_j^2 - \mu_j^2}{2\mu_j^2} + \sum_i R_i(T_1) - \sum_j R_j(T - T_1)\right]$$

Причем, сумма интенсивностей всех потоков требований в узловой точке равна $\left(\sum_i\left(\frac{1}{\mu_i}\right) + \sum_j\left(\frac{1}{\mu_j}\right)\right)$, а сумма интенсивностей потоков на магистрали № 2 - $\sum_j\left(\frac{1}{\mu_j}\right)$.

$$\frac{\partial Z}{\partial T_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T}\cdot\left(\cdot\sum_i\left(\frac{1}{\mu_i}\right) + \sum_j\left(\frac{1}{\mu_j}\right)\right) - \sum_j\left(\frac{1}{\mu_j}\right) \approx 0$$

Пусть $T_1 = pT$. При численном решении задачи можно взять в качестве начальной точки значение $p^* = \dfrac{\sum_j \left(\dfrac{1}{\mu_j}\right)}{\left(\sum_i \left(\dfrac{1}{\mu_i}\right) + \sum_j \left(\dfrac{1}{\mu_j}\right)\right)}$.

2-й этап. Пусть $T_1 = pT$, тогда $T_2 = (1-p)T$, где $p - const$, T – переменная.

$$Z = \frac{1}{T}\left[\sum_i \left(\frac{1}{2\mu_i}(pT)^2 + \frac{\sigma_i^2 - \mu_i^2}{2\mu_i^2}(pT) + \tilde{R}_{1i}\right) + \sum_j \left(\frac{1}{2\mu_j}\left((1-p)\cdot T\right)^2 + \frac{\sigma_j^2 - \mu_j^2}{2\mu_j^2}(1-p)T + \tilde{R}_{2j}\right)\right] =$$

$$= \sum_i \left(\frac{1}{2\mu_i} p^2 T + \frac{\sigma_i^2 - \mu_i^2}{2\mu_i^2} p + \frac{\tilde{R}_{1i}}{T}\right) + \sum_j \left(\frac{1}{2\mu_j}(1-p)^2 \cdot T + \frac{\sigma_j^2 - \mu_j^2}{2\mu_j^2}(1-p) + \frac{\tilde{R}_{2j}}{T}\right)$$

Найдем производную по переменной T:

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = \sum_i \left(\frac{1}{2\mu_i} p^2 + \left(\frac{\tilde{R}_{1i}(pT)}{T}\right)_T^{/}\right) + \sum_j \left(\frac{1}{2\mu_j}(1-p)^2 + \left(\frac{\tilde{R}_{2j}((1-p)T)}{T}\right)_T^{/}\right) =$$

$$= \sum_i \left(\frac{1}{2\mu_i} p^2 + \frac{p \cdot R_{1i}(pT)}{T} - \frac{\tilde{R}_{1i}(pT)}{T^2}\right) + \sum_j \left(\frac{1}{2\mu_j}(1-p)^2 + \frac{(1-p)\cdot R_{2j}((1-p)T)}{T} - \frac{\tilde{R}_{2j}((1-p)T)}{T^2}\right)$$

3-й этап. Для численного решения задачи математического программирования найдем начальную точку, принадлежащую области определения Ω:

$$\begin{cases} \dfrac{T}{\mu_i} + \dfrac{\sigma_i^2 - \mu_i^2}{2\mu_i^2} + R_{1i}(T,\lambda) \le \dfrac{T_2}{h}, \\ \dfrac{T}{\mu_j} + \dfrac{\sigma_j^2 - \mu_j^2}{2\mu_j^2} + R_{1j}(T,\lambda) \le \dfrac{T_1}{h} \end{cases}$$

В качестве начальной точки можно взять значение:

$$T^* = \min_{i,j}\left\{ -\frac{\dfrac{\sigma_i^2 - \mu_i^2}{2\mu_i^2}}{\left(\dfrac{1}{\mu_i} - \dfrac{1-p}{h}\right)};\ -\frac{\dfrac{\sigma_j^2 - \mu_j^2}{2\mu_j^2}}{\left(\dfrac{1}{\mu_j} - \dfrac{p}{h}\right)};\ 2M \right\}$$

Алгоритм численного решения ЗМП:

1-й шаг. Задаем начальные значения:

$$p^* = \frac{\sum_j \left(\dfrac{1}{\mu_j}\right)}{\left(\sum_i \left(\dfrac{1}{\mu_i}\right) + \sum_j \left(\dfrac{1}{\mu_j}\right)\right)} \quad \text{и} \quad T^* = \min_{i,j}\left\{ -\frac{\dfrac{\sigma_i^2 - \mu_i^2}{2\mu_i^2}}{\left(\dfrac{1}{\mu_i} - \dfrac{1-p}{h}\right)};\ -\frac{\dfrac{\sigma_j^2 - \mu_j^2}{2\mu_j^2}}{\left(\dfrac{1}{\mu_j} - \dfrac{p}{h}\right)};\ 2M \right\};$$

и значения для завершения алгоритма $\varepsilon_p = 0{,}01$; $\varepsilon_T = 0{,}5$; $\varepsilon_Z = 0{,}1$.

2-й шаг. Находим численно (например, методом половинного деления) решение T^{*1} уравнения $H_i(T,\lambda_i)-\frac{(1-p)T}{h}=0$, соответствующего условию $\max_i\left\{\frac{1}{\mu_i}\right\}$;

3-й шаг. Проверяем выполнение остальных неравенств системы ограничений:

$$H_i(T^{*1},\lambda)-\frac{(1-p)T^{*1}}{h}\le 0,\ i=1,2,...,n1;$$

$$H_j(T^{81},\lambda)-\frac{pT^{*1}}{h}\le 0,\ j=1,2,...,n2,.$$

4-й шаг. Если условия шага 3 выполнены, вычисляем $Z^*(p^*;T^{*1})$ и переходим к шагу 5. Если условия шага 3 не выполнены, то находим численно (например, методом половинного деления) решение T^{*1} уравнения $H_j(T,\lambda)-\frac{pT}{h}=0$, соответствующего условию $\max_j\left\{\frac{1}{\mu_j}\right\}$.

Проверяем выполнение остальных неравенств системы ограничений. Затем вычисляем $Z^*(p^*;T^{*1})$ и переходим к шагу 5.

5-й шаг. Приняв $T=T^{*1}$ (начальное значение $T_1^{*0}=p^*\cdot T^{*1}$) находим численно решение T_1^* уравнения:

$$T_1\cdot\left(\cdot\sum_i\left(\frac{1}{\mu_i}\right)+\sum_j\left(\frac{1}{\mu_j}\right)\right)-T\cdot\sum_j\left(\frac{1}{\mu_j}\right)+\sum_i\frac{\sigma_i^2-\mu_i^2}{2\mu_i^2}-\sum_j\frac{\sigma_j^2-\mu_j^2}{2\mu_j^2}+\sum_i R_i(T_1)-\sum_j R_j(T-T_1)=0$$

Тогда новое значение $p^{*1}=\frac{T_1^*}{T^{*!}}$.

6-й шаг. Повторяем шаги 2-4 до тех пор пока $\Delta Z<\varepsilon_z$, $\Delta p<\varepsilon_p$, $\Delta T<\varepsilon_T$.

Заключение

В работе приведен разработанный авторами алгоритм, который позволяет достаточно точно определять параметры светофорного регулирования в узловой точке транспортной сети по известному распределению интенсивностей по полосам движения. По результатам этих исследований разработана компьютерная программа в среде DELPHI. Данная работа является продолжением исследований авторов в этой области [5, 6]. В связи с тем, что математическая модель построена на гипотезе о распределении интервалов по времени по обобщенному закону Эрланга, результаты расчетов дают более точные результаты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект р-юг-а-13-08-96502.

Список литературы

1. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.

2. Гасников А. В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / А. В. Гасников, С. Л. Кленов, Е. А. Нурминский, Я. А. Холодов, Н. Б. Шамрай, под ред. А. В. Гасникова. – М.: МФТИ, 2010. – 362 с.

3. Наумова Н. А. Метод определения функции транспортных затрат в узловых точках сети // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 8 (часть 4). С. 853–857.

4. Cox D. R., Smith W. L. Queues, Methuen, London, 1961.

5. Naumova N. A., Problems of Optimisation of Flows Distribution in the Network // Applied Mathematics.– 2013. – Vol. 3. – №. 1. P. 12–19. doi: 10.5923/j.am.20130301.02.

6. Naumova N., Danovich, L. Modelling and Optimisation of Flows Distribution in the Network // Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 2. – №. 5. P. 171–175. doi: 10.5923/j.am. 20120205. 04.

Рецензенты:

Атрощенко В. А., д.т.н., профессор, декан Факультета компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет» Министерства образования и науки РФ, г.Краснодар.

Видовский Л. А., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой Вычислительной техники и автоматизированных систем управления ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет» Министерства образования и науки РФ, г. Краснодар.