

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ПОДПОЧВЕННОГО РАДОНА В ГРУНТЕ И ЕГО ЭКСХАЛЯЦИИ В ПРИЗЕМНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ

Пестова О.В.<sup>1</sup>, Пестов Д.А.<sup>1</sup>, Шишениа А.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Таганрог, Россия (347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44), e-mail: lisunyk@rambler.ru

---

В работе построена и численно реализована математическая модель процесса массопереноса эманации радона в рыхлых отложениях и в приземном слое атмосферы с учетом диффузии и конвекции. Из физических соображений обоснованы начальные и граничные условия, приведен вывод условий на границе раздела двух сред. Построенная дискретная модель, основывающаяся на сетке с переменными шагами по пространству и по времени, сводится к системе с трехдиагональной матрицей, которая при условии выполнения требований к этому методу об устойчивости и сходимости решается методом прогонки. Построенная математическая модель позволяет в рамках решения одной задачи исследовать пространственно-временные распределения радона в земле и в атмосфере. В работе приведены результаты исследования пространственно-временных распределений радона с учетом различных физических условий.

---

Ключевые слова: моделирование, радон, внутренние граничные условия.

## MODELING OF UNDERGROUND RADON TRANSFER PROCESSES IN SOIL AND ITS EXHALATION INTO THE SURFACE LAYER

Pestova O.V.<sup>1</sup>, Pestov D.A.<sup>1</sup>, Shishenia A.V.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Southern Federal University, Taganrog, Russia (347928, Taganrog, 44, Nekrasovskiy), e-mail: lisunyk@rambler.ru

---

A mathematical model of the radon emanation mass transfer process in the loose sediments and in the surface layer including diffusion and convection is given in the article. The initial and boundary conditions were validated from the physical point of view. There is shown the derivation of boundary conditions on the boundary of two mediums. The built discrete model, based on the grid with variable steps over space and time, is reduced to the system with three diagonal matrix. It is solved by the sweep method under the preceding requirements of stability and convergence to this method. Received mathematical model allows to research space-time radon distribution in soil and atmosphere within the solution of one task. The paper presents the results of a study of space - time distribution of radon in a view of the different physical conditions.

---

Keywords: mathematical modeling, radon, inner boundary conditions.

### Введение

Наиболее значимый путь попадания радона ( $Rn-222$ ) в атмосферу связан с его выделением непосредственно из грунтов, где он распространен крайне неравномерно. Это связано как с тем, что радон накапливается в тектонических неоднородностях, куда он поступает по системам микротрещин из горных пород, так и с их способностью аккумулировать радон и коэффициентом эманирования. Общепринято считать, что в динамике подпочвенного радона находит отражение изменение напряженно-деформированного состояния геосреды на последней стадии подготовки очага землетрясения [5]. Одновременно эксхалация радона в приземный слой атмосферы приводит к его ионизации, которая изменяет проводимость приземного слоя и влияет на его электрические характеристики [8].

Построением математической конвективно-диффузионной модели массопереноса радона в грунте и его эксхалаций в приземный слой атмосферы занимались Паровник Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. [5]. Задача решалась аналитически без учета конвективной составляющей, а коэффициент турбулентной диффузии в атмосфере считался постоянным. Исследования влияния радона на ионизацию атмосферы были проведены Куповых Г.В., Морозовым В.Н., Шварцем Я.М. [1; 2].

**Постановка задачи.** В данной работе построена конвективно-диффузионная модель массопереноса радона в рыхлых отложениях и его стока в приземный слой атмосферы. Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих процессы массопереноса радона, имеют вид [3; 4]:

$$\begin{cases} \eta \frac{\partial N_1(z,t)}{\partial t} + v\eta \frac{\partial N_1(z,t)}{\partial z} = D \frac{\partial^2 N_1(z,t)}{\partial z^2} - \lambda \eta N_1(z,t) + Q, \\ \frac{\partial N_2(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( A(z) \cdot \frac{\partial N_2(z,t)}{\partial z} \right) - \lambda N_2(z,t), \end{cases} \quad (1)$$

Основные параметры системы (1) приведены в таблице 1 [5; 6]. Первое уравнение системы (1) описывает установившийся диффузионно-конвективный процесс массопереноса радона в грунте, а второе уравнение системы (1) диффузионный массоперенос радона в атмосфере.

Таблица 1 – Параметры системы

Параметр	Название	Характерные значения
$N_1$	Концентрация радона в единице объема порового пространства	Бк/см <sup>3</sup>
$\eta$	Пористость горной породы	0,4
$D$	Коэффициент диффузии (в рыхлых отложениях)	(5÷15) см <sup>2</sup> /с
$\lambda$	Постоянная распада эманаций	$2,1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$
$v$	Скорость конвективного переноса	см/с
$Q = \frac{a \cdot Ra \cdot \rho \cdot \lambda}{\eta}$	Скорость выделения эманаций в поровое пространство в единице объема среды	Бк/с.см <sup>3</sup>
$Ra$	Количество радия в породе	Бк/кг
$\rho$	Плотность породы	г/см <sup>3</sup>
$a$	Коэффициент эманирования	
$A(z)$	Коэффициент турбулентной диффузии в атмосфере (функция)	(0,1-0,2) м <sup>2</sup> /с
$N_1(z,t)$	Плотность распределения радона в грунте	
$N_2(z,t)$	Плотность распределения радона в атмосфере	
$N_\infty$	Максимальная концентрация радона в грунте	100 кБк/м <sup>3</sup>

Дополним систему (1) следующими начальными и граничными условиями.

1. Равенство потоков и соотношение для концентраций радона на границе сред

$$z = z^0, \quad N_1(z, t) = N_2(z, t), \quad \frac{D}{\eta} \frac{\partial N_1}{\partial z} - v N_1 = A \frac{\partial N_2}{\partial z}. \quad (2)$$

Здесь  $z^0$  – граница раздела «земля – атмосфера»,  $z$  – вертикальная координата.

2. Постоянная концентрация радона при достижении равновесия с продуктами распада на определенной глубине рыхлых отложений

$$z \rightarrow -\infty, \quad N_1 = N_\infty, \quad z \rightarrow +\infty, \quad N_2 = 0. \quad (3)$$

Здесь ось  $z$  направлена вертикально, ноль находится на границе «земля – атмосфера».

3. Концентрация радона в начальный момент времени максимальна

$$t = 0, \quad N_1 = N_\infty, \quad -\infty < z < z_0, \quad N_2 = N_\infty, \quad z_0 < z < +\infty. \quad (4)$$

**Условия на границе.** Условие (2) было получено следующим образом. Поделим первое уравнение системы (1) на  $\eta$ .  $H = z^0$  – уровень почвы. Для корректной постановки задачи на границе раздела двух сред земли и воздуха поставим задачу в общей области «земля – атмосфера». В таком виде на границе двух сред (поверхности земли) появляется существенное внутреннее граничное условие (2). Для его постановки проинтегрируем первое уравнение системы (1) от  $-\infty$  до  $z^0$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{z^0} N_1 dz + v \int_{-\infty}^{z^0} \frac{\partial N_1}{\partial z} dz = \frac{D}{\eta} \int_{-\infty}^{z^0} \frac{\partial^2 N_1}{\partial z^2} dz - \lambda \int_{-\infty}^{z^0} N_1 dz + \int_{-\infty}^{z^0} \frac{Q}{\eta} dz. \quad (5)$$

Значение направленного внутрь грунта потока массы радона через границу, за счет которого

изменяется масса радона в грунте, примет вид:  $W_1 = -v N_1 + \frac{D}{\eta} \frac{\partial N_1}{\partial z} \Big|_{z_0}$ .

Проинтегрируем второе уравнение (для воздуха) системы (1) от  $z^0$  до  $+\infty$ . Аналогичным

образом запишем поток через границу в воздухе:  $W_2 = -A \frac{\partial N_2}{\partial z}$ .

В результате граничные условия имеют следующий вид:

$$\text{при } z = z^0, \quad N_1(z, t) = N_2(z, t), \quad \frac{D}{\eta} \frac{\partial N_1}{\partial z} - v N_1 = A \frac{\partial N_2}{\partial z};$$

$$\text{при } z \rightarrow -\infty, \quad N_1 = N^\infty; \quad (6)$$

$$\text{при } z \rightarrow +\infty, \quad N_2 = 0.$$

**Построение дискретной модели.** Пусть коэффициент турбулентной диффузии зависит от высоты и имеет вид:  $A(z) = A + v \cdot z$ . Введем функцию концентрации:

$$N = \theta(z - z^0) \cdot N_2 + (1 - \theta(z - z^0)) \cdot N_1,$$

где  $\theta$  – гладкая срезающая функция, такая что:

$$\theta = \begin{cases} 1, & x > \varepsilon \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Концентрацию радона в почве и в воздухе зададим в виде:

$$N = \begin{cases} N_1, & \text{если } z < z^0, \\ N_2, & \text{если } z > z^0. \end{cases}$$

Перепишем уравнения (1) в виде:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{D} \frac{\partial N}{\partial z} \right) - \lambda N + \tilde{Q} \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

концентрация радона:

$$N = \theta(z - z_0) \cdot N_2 + (1 - \theta(z - z_0)) \cdot N_1 = \begin{cases} N_1, & z < z^0, \\ N_2, & z > z^0, \end{cases} \quad (7.1)$$

скорость конвективного переноса:

$$\tilde{v} = (1 - \theta(z - z^0)) \cdot v = \begin{cases} v, & z < z^0 \\ 0, & z > z^0, \end{cases} \quad (7.2)$$

коэффициент диффузии:

$$\tilde{D} = \theta(z - z_0) \cdot A + (1 - \theta(z - z_0)) \cdot \frac{D}{\eta} = \begin{cases} \tilde{D} = A, & z < z^0; \\ \tilde{D} = \frac{D}{\eta}, & z > z^0, \end{cases} \quad (7.3)$$

функция интенсивности ионообразования:

$$\tilde{Q} = (1 - \theta(z - z_0)) \cdot \frac{Q}{\eta} = \begin{cases} 0, & z < z^0, \\ \frac{Q}{\eta}, & z > z^0 \end{cases} \quad (7.4)$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$1) \quad z = z^0, \quad \frac{D}{\eta} \frac{\partial N}{\partial z} \Big|_{z^0-0} - v N \Big|_{z^0-0} = A \frac{\partial N}{\partial z} \Big|_{z^0+0}$$

$$N \Big|_{z=z^0} = \frac{N_1 + N_2}{2}, \quad N_1 \Big|_{z=z^0} = N_2 \Big|_{z=z^0} = N_1 = N_2; \quad (8)$$

- 2)  $z \rightarrow -\infty, \quad N = N^\infty;$   
 3)  $z \rightarrow +\infty, \quad N = 0.$

**Сетка.** Для построения разностной схемы введем сетку в области изменения независимых переменных. Введем равномерную сетку по переменной  $z$  с шагом  $h_z$ , которую обозначим:

$$\omega_h = \{z_i = ih_z, i = 0, 1, 2 \dots N, h_z \cdot N = l\},$$

где  $l$  – длина области,  $N$  – количество отрезков разбиения.

Также введем равномерную сетку по переменной  $t$  с шагом  $h_t$ , которую обозначим:

$$\omega_\tau = \{t_j = n \cdot h_t, n = 0, 1, 2 \dots K, K \cdot h_t = T\}.$$

**Дискретная модель.** Для решения дифференциального уравнения (7) используется интегро-интерполяционный метод, т.к. он сохраняет консервативность модели, а значит и непрерывность потока. Проинтегрируем уравнение (7), разбив его на два. Вначале возьмем интеграл от первого уравнения системы (1) по двум областям от  $z_{i-\frac{1}{2}}$  до  $z_i$  и от  $z_i$  до  $z_{i+\frac{1}{2}}$ .

Рассмотрим первый интеграл:

$$\int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_i} \frac{\partial N_1}{\partial z} dz = N_{1i} - N_{1i-\frac{1}{2}} \cong \left| N_{1i-\frac{1}{2}} = \frac{N_{1i} + N_{1i-1}}{2} \right| = N_{1i} - \frac{N_{1i} + N_{1i-1}}{2}. \quad (9)$$

Аппроксимируем  $\left. \frac{\partial N_1(z, t)}{\partial z} \right|_{z_{i-\frac{1}{2}}}$  центральной разностью:

$$\int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_i} \frac{\partial^2 N_1}{\partial z^2} dz = \left. \frac{\partial N_1}{\partial z} \right|_{z_i} - \left. \frac{\partial N_1}{\partial z} \right|_{z_{i-\frac{1}{2}}} \cong \frac{\partial N_{1i}}{\partial z} - \frac{N_{1i} + N_{1i-1}}{h}. \quad (10)$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\int_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\partial N_2}{\partial z} \right) dz = A \left. \frac{\partial N_2}{\partial z} \right|_{z_{i+\frac{1}{2}}} - A \left. \frac{\partial N_2}{\partial z} \right|_{z_i} = A \frac{N_{2i+1} - N_{2i}}{h} - A \left. \frac{\partial N_2}{\partial z} \right|_{z_i}.$$

Тогда для уравнения (7) получим следующую аппроксимацию уравнения на равномерной сетке по пространственной и временной координатам:

$$\begin{aligned} & \frac{N_{1i}^{n+1} - N_{1i}^n}{h_t} \cdot \frac{h_z}{2} + \frac{N_{2i}^{n+1} - N_{2i}^n}{h_t} \cdot \frac{h_z}{2} + \nu N_{1i} - \nu \frac{N_{1i} + N_{1i+1}}{2} = \\ & = \frac{D}{\eta} \frac{\partial N_1}{\partial z} \Big|_{z_i} - \frac{D}{\eta} \frac{N_{1i} - N_{1i-1}}{h_z} + A_{i+\frac{1}{2}} \frac{N_{2i+1} - N_{2i}}{h_z} - A \frac{\partial N_2}{\partial z} \Big|_{z_i} - \lambda N_{1i} \frac{h_z}{2} - \lambda N_{2i} \frac{h_z}{2} + \frac{Q_i}{\eta} \frac{h_z}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

Применяя условия (8), приходим к следующему уравнению:

$$\frac{N_i^{n+1} - N_i^n}{h_t} \cdot h_z - \nu N_{1i-\frac{1}{2}} = A_{i+\frac{1}{2}} \frac{N_{2i+1} - N_{2i}}{h_z} - \frac{D}{\eta} \frac{N_{1i} - N_{1i-1}}{h_z} - \lambda N_i h_z + \frac{Q_i}{\eta} \frac{h_z}{2}$$

Вычислив потоки на границе, для соответствующих уравнений, и используя известное соотношение (2) на границе «земля – атмосфера», получим уравнение для точек на границе. Как результат, новые условия на границе «земля – атмосфера» имеют следующую аппроксимацию на границе:

$$\frac{N_i^{n+1} - N_i^n}{h_t} - \frac{\nu}{h_z} N_{i-\frac{1}{2}} = A_{i+\frac{1}{2}} \frac{N_{i+1} - N_i}{h_z^2} - \frac{D}{\eta} \frac{N_i - N_{i-1}}{h_z^2} - \lambda N_i + \frac{Q_i}{2\eta}, \quad (12)$$

$$N_{i-\frac{1}{2}} = \frac{N_i + N_{i-1}}{2}$$

**Аппроксимация в остальных точках сетки.** Запишем разностные схемы для аппроксимации уравнений (1) в точках сетки, кроме границы раздела «земля – атмосфера». Рассмотрим уравнение (7), которое в грунте примет следующий вид. Запишем разностную схему для этого уравнения:

$$\frac{N_i^{n+1} - N_i^n}{h_t} + \nu \frac{N_{i+1}^{n+1} - N_{i-1}^{n+1}}{2h_z} = \frac{D}{\eta} \frac{N_{i+1}^{n+1} - 2N_i^{n+1} + N_{i-1}^{n+1}}{h_z^2} - \lambda N_i^{n+1} + \frac{Q}{\eta} \quad (13),$$

В свою очередь разностная схема для уравнения в воздухе (7) будет иметь вид:

$$\frac{N_i^{n+1} - N_i^n}{h_t} = A_{i+\frac{1}{2}} \frac{N_{i+1}^{n+1} - N_i^{n+1}}{h_z^2} - A_{i-\frac{1}{2}} \frac{N_i^{n+1} - N_{i-1}^{n+1}}{h_z^2} - \lambda N_i^{n+1} \quad (14)$$

Численный расчет был проведен при помощи метода прогонки [7]. Модель проверена на устойчивость при помощи метода максимума, получены следующие ограничения:

$$h_t < \frac{h_z}{\nu} \text{ - на шаг по времени,}$$

$$h_z \leq \frac{2D}{|v|\eta} \text{ - на шаг по пространству.}$$

Из данных условий также следует еще одно возможное ограничение на шаг по времени:

$$h_t < \frac{2D}{|v|^2 \eta}.$$

**Моделирование и обсуждение.** На основании уравнений (1) при условии выполнения (2)-(4) и с учетом параметров, приведенных в таблице 1, исследовалось распределение радона в грунте и в атмосфере. Исследования проводились при тестовых значениях в пределах глубин от 10 м до высот порядка 10 м при различных коэффициентах диффузии. Моделирование проводилось при скорости конвективного переноса  $v = 0,1 \text{ м/с}$ . На рисунке 1 приведены графики распределения относительной концентрации радона в почве и в приземном слое атмосферы по тестовым данным.

Анализируя полученные результаты, получаем, что при увеличении коэффициента диффузии в почве концентрация радона уменьшается. Так, при изменении коэффициента диффузии от  $10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$  до  $15 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$  на высоте 1 м концентрация радона уменьшится на 30%. Данные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными в работе [5].

Характерный масштаб распределения радона составляет порядка 2 м. При  $D = 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$  в случае, если концентрация радона составляет порядка  $100 \text{ кБк/м}^3$  на глубине 10 м, то на уровне земли наблюдается выход радона концентрацией, равной  $292 \text{ Бк/м}^3$ . При значениях концентрации радона менее  $300 \text{ Бк/м}^3$  на глубине 10 м выход радона на поверхность практически не наблюдается.

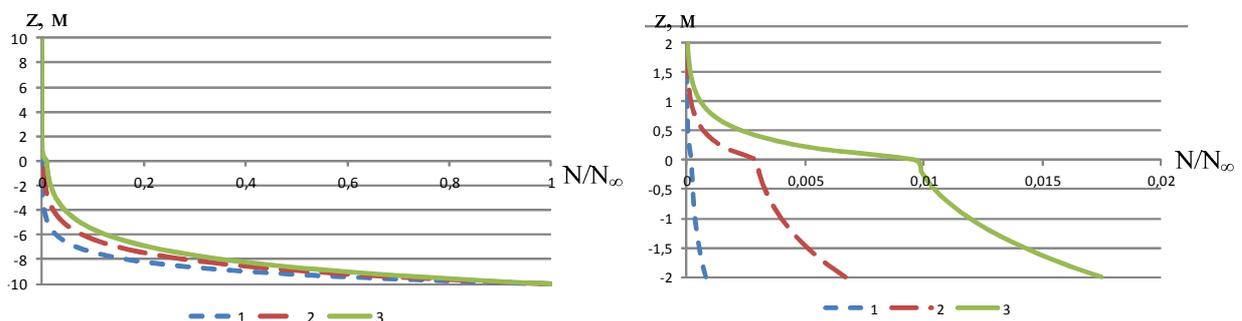


Рисунок 1. Зависимость относительной концентрации радона  $N/N_\infty$  от высоты при различных значениях коэффициента диффузии в почве  $D$ : кривая 1 –  $5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$ ; кривая 2 –  $10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$ ; кривая 3 –  $15 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$ .

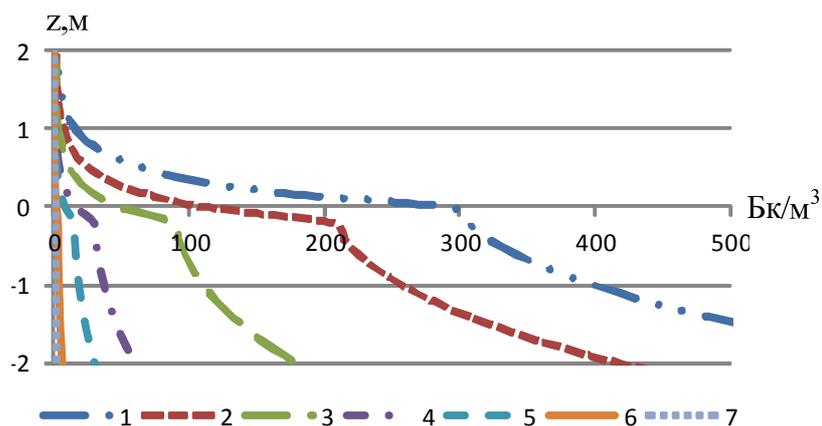


Рисунок 2. Профили концентрации радона в зависимости от максимальной концентрации радона на глубине 10 м: 1 – 100 кБк/м<sup>3</sup>; 2 – 70 кБк/м<sup>3</sup>; 3 – 30 кБк/м<sup>3</sup>; 4 – 10 кБк/м<sup>3</sup>; 5 – 5 кБк/м<sup>3</sup>; 6 – 1 кБк/м<sup>3</sup>; 7 – 300 Бк/м<sup>3</sup>.

Таким образом, в результате работы построена математическая модель массопереноса радона с обоснованием условия на границе раздела двух сред, построена численная схема решения и получены результаты, позволяющие исследовать пространственно-временные распределения радона в различных физических условиях.

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, контракт 14.132.21.1380 от 01.10.2012.*

### Список литературы

1. Куповых Г.В., Морозов В.Н., Шварц Я.М. Теория электродного эффекта в атмосфере : монография. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 1998. – 123 с.
2. Морозов В.Н. Математическое моделирование атмосферно-электрических процессов с учетом влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ : монография / РГГМУ. – СПб., 2011. - 253 с.
3. Новиков Г.Ф. Радиометрическая разведка. - Л. : Недра, 1989. - 407 с.
4. Новикова О.В., Редин А.А., Болдырев А.С., Болдырева К.А., Пестов Д.А. Электродинамическая модель приземного слоя атмосферы с учетом массопереноса радона в грунте и над поверхностью земли // Научная мысль Кавказа. - 2012. - № 4. - С. 98-102.
5. Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. Математическая диффузионная модель массопереноса радона (<sup>222</sup>Rn) в грунте и его эксхалации в приземный слой атмосферы // Вестник Краунс. Сер.: Науки о земле. - 2006. - № 1. – Вып. № 7. – С. 110 – 114.

6. Радиоэкология : учебник для вузов / М.Г. Давыдов [и др.]. – Ростов н/Д : Феникс, 2013. – 635 с. : ил. – (Высшее образование).
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. - 2-е изд. - М. : Научный мир, 2003. - 316 с.
8. Boldyreff A., Kurovykh G., Redin A. Modeling of ionization–recombination processes in the atmospheric surface layer // Journal of Electrostatics. Elsevier. – 2013. – V. 71, Is. 3, June. – P. 305–311.

**Рецензенты:**

Жорник А.И., д.ф.-м.н., профессор, кафедра теоретической, общей физики и технологии Таганрогского государственного педагогического института им. А.П. Чехова, г. Таганрог.

Илюхин А.А., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры математического анализа Таганрогского государственного педагогического института им. А.П. Чехова, г. Таганрог.