

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСФОРМАТОРА ПРИ ЕГО ДИАГНОСТИКЕ КРОТКИМ ИМПУЛЬСОМ

Исаев Ю.Н.<sup>1</sup>, Колчанова В.А.<sup>1</sup>, Елгина Г.А.<sup>1</sup>, Лавринович А.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВПО «НИ ТПУ» («Национальный исследовательский Томский политехнический университет»), Томск, Россия (634050, Томск, пр. Ленина, 30), e-mail: ni105@mail.ru

Приводится оригинальный синтез модели обмоток трехфазного двухобмоточного трансформатора. Исходный сигнал входного воздействия в виде импульса короткой длительности раскладывался на составляющие ряда Фурье. Для каждой составляющей в соответствии с принципом суперпозиции рассчитывался переходный процесс. Для определения функций токов и напряжений использовался метод пространства состояний с учётом распределённости параметров схемы замещения, а также влияния скин-эффекта. В работе приведен пример расчета индуктивности и сопротивления витков обмотки трансформатора круглого и прямоугольного сечения с учетом скин-эффекта на основе расчёта поля распределения магнитного потенциала с использованием метода конечных элементов. Для реализации метода конечных элементов был использован пакет COMSOL Multiphysics. Приведены функции переменных состояния при входном воздействии в виде зондирующего импульса короткой длительности. По данным сравнительного анализа, полученные нами характеристики на основе моделирования и характеристики натурального эксперимента совпадают.

Ключевые слова: обмотки трансформатора, диагностика трансформатора, поперечное сечение провода, метод пространства состояний, скин-эффект, уравнения Максвелла, переходные процессы.

## THE MATHEMATICAL MODEL OF TRANSFORMER WHEN ITS DIAGNOSIS BY SHORT DURATION PULS TAKES PLACE

Isaev Y.N.<sup>1</sup>, Kolchanova V.A.<sup>1</sup>, Elgina G.A.<sup>1</sup>, Lavrynovych A. V.

<sup>1</sup>National research Tomsk polytechnic university, Tomsk, Russia (634050, Tomsk, Lenin prospect, 30), e-mail: va-sileva.o.v@mail.ru

The synthesis of the model of winding of a three-phase two-winding transformer has been considered. The original input signal in the form of a short duration pulse into components of the Fourier series has been decomposed. In accordance with the superposition principle for each component of decomposition the transient process has been calculated. To determine the transients of currents and voltages the state space method have been used, the distribution of parameters of the equivalent circuit as well as the influence of the skin effect have been taken in account. The examples of the calculation of inductance and resistance of the transformer windings with circular and rectangular cross section with the skin effect by calculating the distribution of the magnetic field potential using the finite element method have been given. To implement the finite element method the COMSOL Multiphysics soft ware has been used. The functions of the state variables with input action as a probe pulse of short duration are given. According to a comparative analysis, the modeling characteristics obtained by us and the characteristics of a natural experiment have been coincided.

Keywords: transformer, transformer diagnostics, wire cross-section, state space method, skin effect, Maxwell equations, transients.

**Введение.** Для уменьшения затрат на ревизию трансформаторов предлагается исследовать обмотки трансформаторов при подключении импульсного напряжения [1, 2, 5]. Длина импульса – теста составляет 400-500 нс.

**Цель исследования** создать математическую модель трансформатора. Модель можно использовать для моделирования дефектов обмоток, формировать эталонные сигналы при различных повреждениях исследуемого оборудования.

### Вывод основных соотношений

При диагностике трансформатора импульсом короткой длительности, необходимо учитывать два обстоятельства. Первое: обмотке трансформатора следует сопоставлять электротехническую схему замещения с распределенными параметрами. Второе: из-за короткой длительности зондирующего импульса необходимо учитывать *скин-эффект* [4], зависимость параметров схемы замещения от частоты. При рассмотрении двухобмоточного трансформатора схему замещения нужно представлять для каждой обмотки в отдельности. Приведем этапы формирования моделей обмоток трехфазного двухобмоточного трансформатора, приведенного на рисунке 1. На рисунке 1 приведены формы внутренней (низковольтной) и внешней (высоковольтной) обмоток трансформатора и поперечные сечения проводов обмоток соответственно.

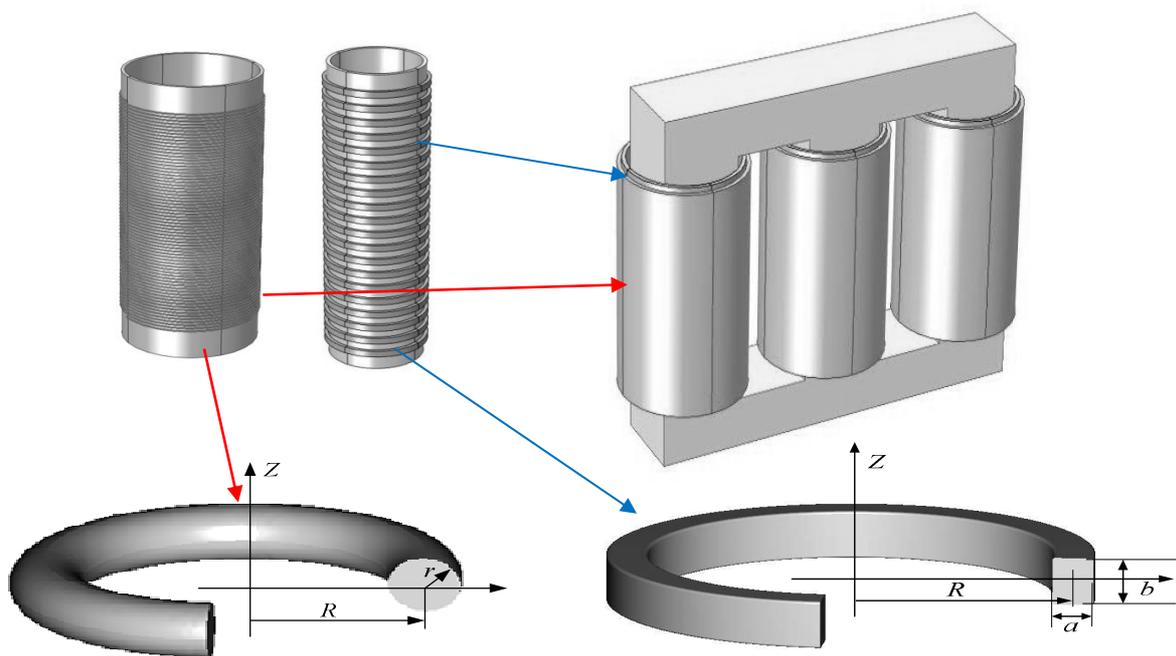


Рис. 1. Обмотки трехфазного двухобмоточного трансформатора и поперечные сечения проводов обмоток,

$a$  – внутренняя обмотка трансформатора (НН);  $b$  – внешняя обмотка трансформатора (ВН);  $v$  – трехфазный трансформатор;  $z$  – поперечное сечение провода обмоток соответственно.

## 1. Электротехническая схема замещения одного витка обмотки

Виток обмотки заменяется электротехническим звеном, состоящим из элементов, приведенных на рисунке 2, а. Здесь  $C_1$  – межвитковая емкость,  $C_2$  – емкость между витком и заземленными частями трансформатора,  $L(\omega)$  – индуктивность рассеяния обмотки с учетом взаимной индуктивности между соседними элементами обмотки,  $R(\omega)$  – активное сопротивление витка соответственно.

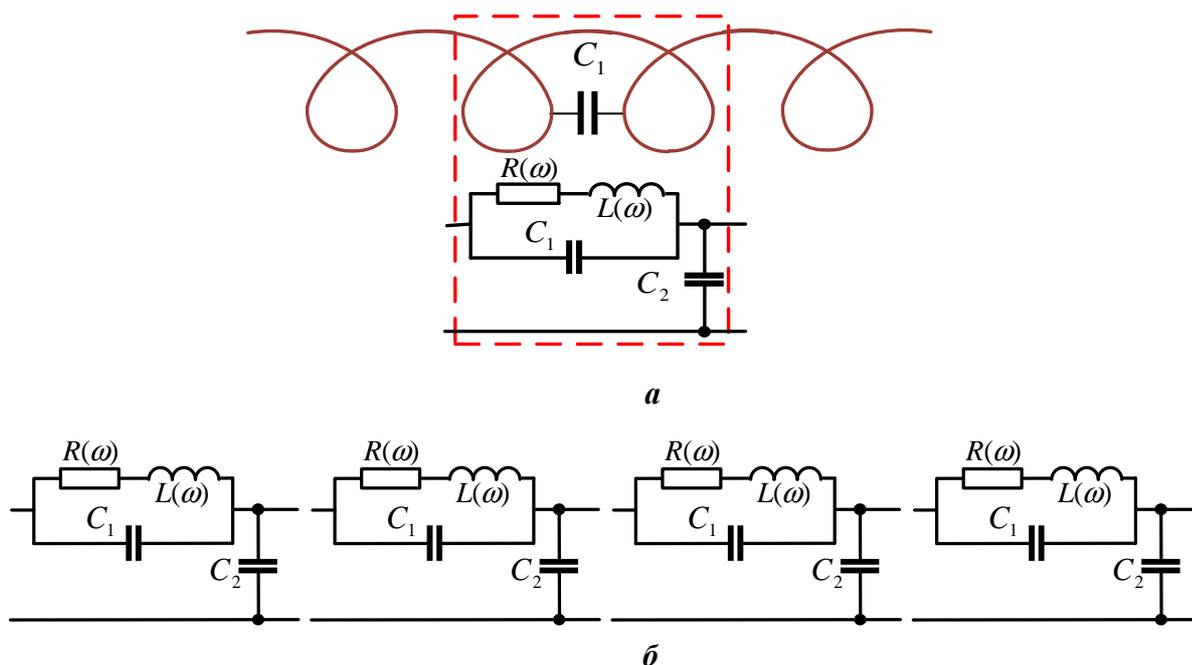


Рис. 2. Электротехническая схема замещения: а – одного витка обмотки трансформатора; б – схема замещения обмотки трансформатора

Все приведенные величины являются погонными, т.е. значения величин отнесены к единице длины. Таким образом, обмотку трансформатора можно заменить последовательно соединенными звеньями (рисунок 2, б).

Относительный вклад высокочастотных компонент в формирование спектра зондирующего импульса короткой длительности достаточно высок. При дальнейшем укорачивании импульса относительный вклад высокочастотных компонент усиливается. Как следствие этого явления, при очень коротких длительностях зондирующего импульса начинает проявляться *скин-эффект* [3, 4]. То есть, при высокочастотном токе в поперечном сечении проводника, ток выталкивается из внутренней области к периферии проводника. При этом начинает проявляться зависимость индуктивности и сопротивления проводника от частоты.

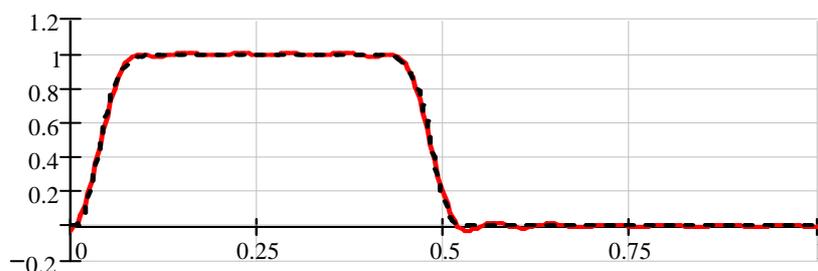
Для определения величин электротехнических элементов, входящих в схему замещения, определим частотный спектр и частотный диапазон зондирующего импульса, а затем приве-

дем расчет индуктивности и сопротивления витков обмотки трансформатора круглого и прямоугольного сечения.

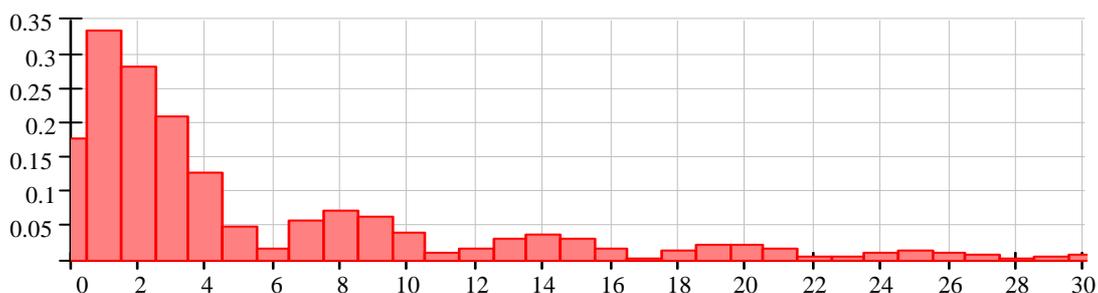
## 2. Частотное разложение зондирующего импульса.

В качестве модельного зондирующего импульса выберем функцию с длительностью  $T = 0,5$  мкс в виде:

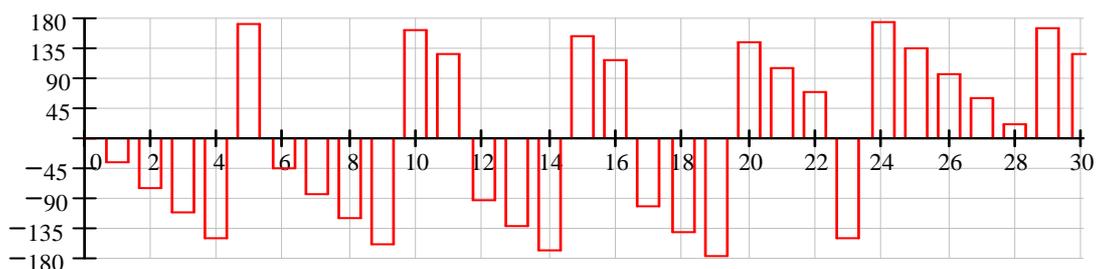
$$U(t) = \exp\left(-(t - 1,5 \cdot 10^{-6})^{14} \alpha\right)$$



*a*



*б*



*в*

Рис. 3. Зондирующий импульс ( $t$  в мкс): *a* – исходный импульс показан сплошной линией, пунктирной показан зондирующий импульс, полученный в среде MathCAD ( $t$  в мкс)); *б* - амплитудно-частотный спектр; *в* – фазо-частотный спектр

Определим частотный спектр импульса. Для этого разложим импульс в ряд Фурье, определив коэффициенты разложения  $A_k, k = 0, \dots, N$ . Для определения коэффициентов использо-

влась стандартная программа быстрого преобразования Фурье (FFT) программно-интегрированной среды **MathCAD**. Далее функция представлялась в виде ряда:

$$U(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^N |A_k| \sin\left(\omega kt + \arg(A_k) + \frac{\pi}{2}\right),$$

где

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2,53 \cdot 10^6 \text{ рад / сек}, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \cos(\omega kt) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \sin(\omega kt) dt, \quad A_k = a_k + jb_k.$$

Спектр и результат восстановления функции по коэффициентам представлены ниже.

Число коэффициентов разложения бралось  $N=30$ . Из спектра импульса видно, что начиная с 10 гармоники, относительный вклад высших гармоник в импульсе не превышает 5%.

### 3. Расчет индуктивности и сопротивления витков круглого и прямоугольного поперечного сечения с учетом скин-эффекта.

Проведем расчет плотности распределения тока в поперечном сечении проводника. Система уравнений Максвелла [3, 4] позволяют получить уравнение для векторного потенциала  $A_\phi$ , позволяющего определить плотность распределения тока по сечению проводника:

$$(j\omega\sigma - \omega^2\varepsilon) A_\phi + \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times A_\phi) = \frac{\sigma V}{2\pi r}, \quad (1)$$

где  $A_\phi$  – векторный магнитный потенциал,  $V$  – напряжения проводника,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость,  $\omega$  – частота,  $\mu$  – магнитная проницаемость,  $\sigma$  – проводимость,  $j$  – мнимая единица.

Плотность тока и ток определяются выражениями [3]:

$$J_\phi = \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times A_\phi), \quad I = \pi \int_0^R J_\phi r^2 dr. \quad (2)$$

Магнитная энергия определяется выражением [4]:

$$W = 2\pi \int_0^R A_\phi r dr, \quad (3)$$

из которого при известном токе определяется индуктивность с помощью соотношения [3]:

$$L = \frac{2W}{|I|^2} \quad (4)$$

При известном напряжении и токе определяем сопротивление проводника, используя формулу:

$$R = \text{Re}(V / I) \quad (5)$$

Для расчета представленных уравнений использовался математический пакет **COMSOL Multiphysics**, основанный на методе конечных элементов (Finite Element Method (FEM)). Результаты расчетов приведены на рисунках 4, 5.

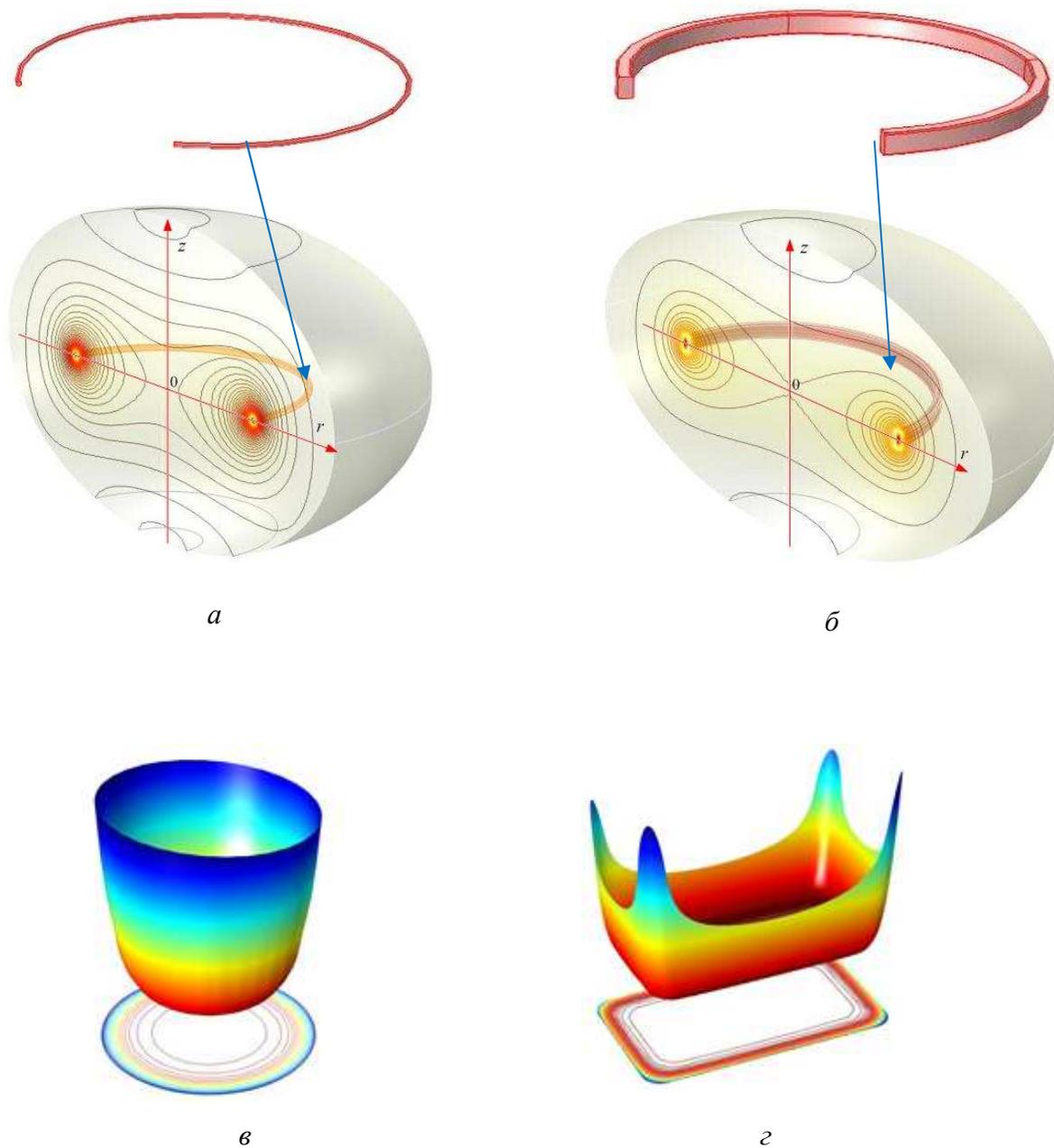
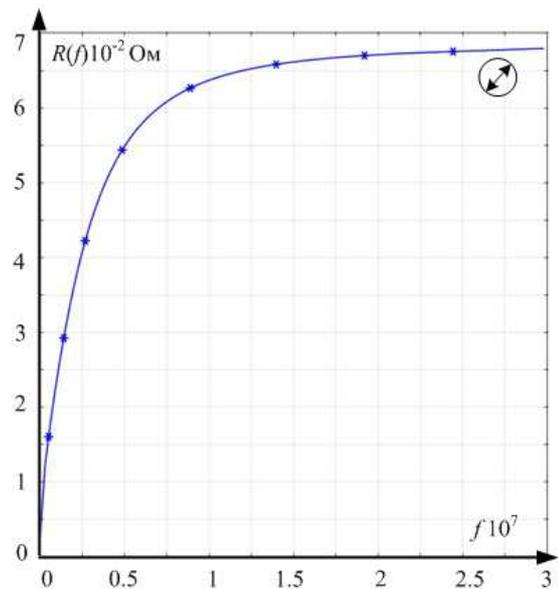
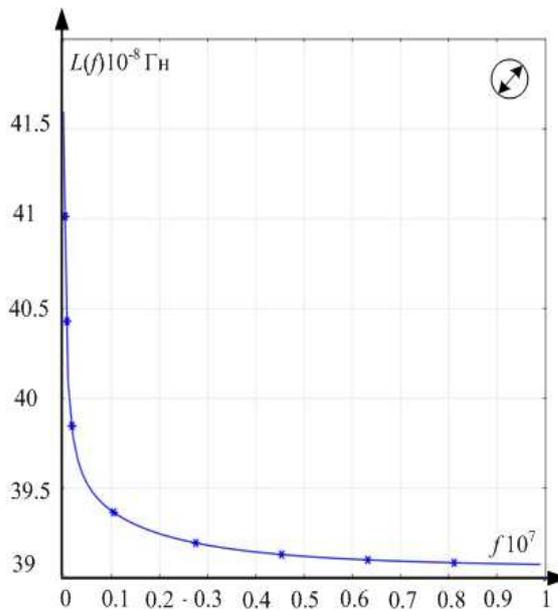


Рис. 4. Поле распределения магнитного потенциала кольцевых проводников:

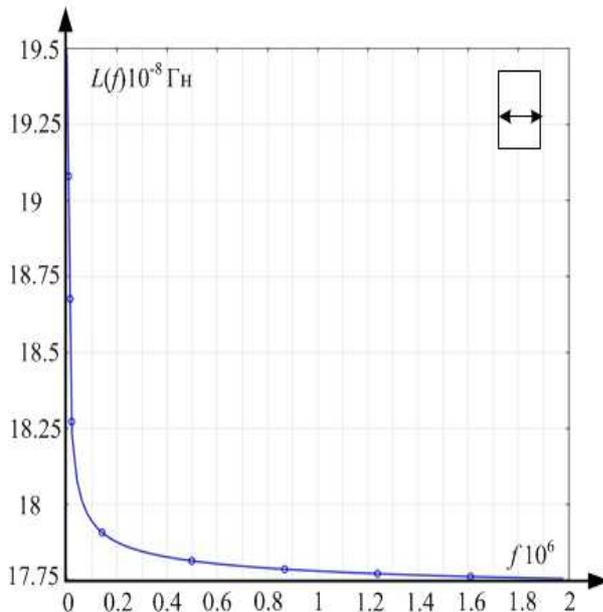
а – круглого и б – прямоугольного сечения при фиксированной частоте.

Распределение плотности тока в поперечном сечении проводника при частоте  $f = 5,4 \cdot 10^5$  Гц,

в – круглого; г – прямоугольного соответственно



a



b

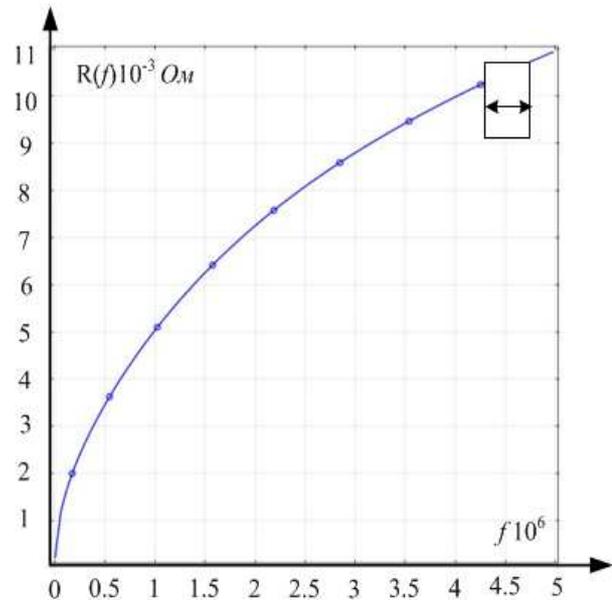


Рис. 5. Частотные зависимости индуктивности  $L(f)$  и сопротивления  $R(f)$  провода:  
 а – с круглым поперечным сечением; б – с прямоугольным поперечным сечением

При известных зависимостях индуктивности и сопротивления от частоты можно определить переходные процессы, происходящие в обмотках трансформатора. Поскольку входной импульс представлен в виде суммы гармоник, расчет проводился с использованием метода наложения. То есть рассчитывались напряжения и токи для каждой гармоники. Затем результаты расчетов токов и напряжений каждой гармоники складывались и получались результирующие токи и напряжения при воздействии зондирующего импульса.

Запишем уравнение дифференциальные уравнения для определения напряжения и токов в реактивных элементах схемы замещения (рисунок б) для одного витка с учетом внутреннего сопротивления источника  $r$ . Для решения дифференциальных уравнений использовался метод пространства состояний, дифференциальное уравнение третьего порядка представлялось в виде системы 3-х уравнений первого порядка. Уравнения рассчитывались численно с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка с фиксированным шагом. Число точек дискретизаций равнялось  $N=10^3$ .

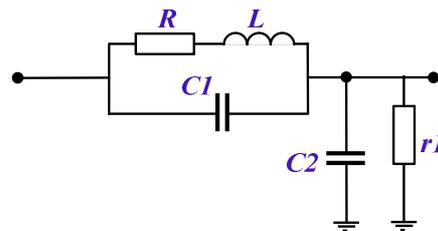
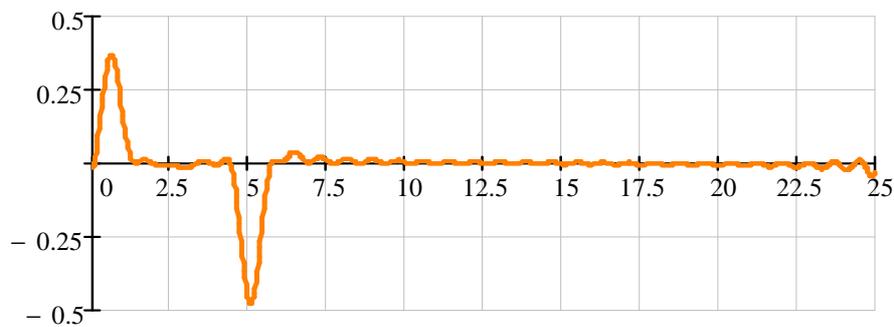
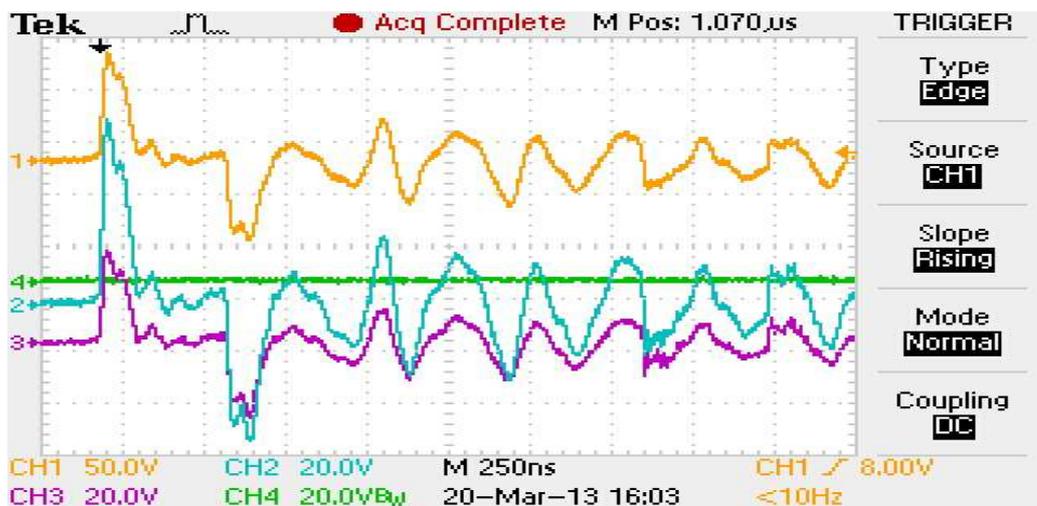


Рис. 6. Электротехническая схема замещения одного витка обмотки трансформатора



a



б

Рис.7. Напряжение на конденсаторе  $U_{C1}(t)$ : а – в результате моделирования;

б – экспериментальные осциллограммы напряжений на витке при зондировании пробным импульсом

$$\begin{pmatrix} \frac{di_L(t, \omega_k)}{dt} \\ \frac{dU_{C1}(t, \omega_k)}{dt} \\ \frac{dU_{C2}(t, \omega_k)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R(\omega_k)}{L(\omega_k)} & \frac{1}{L(\omega_k)} & 0 \\ -\frac{1}{C1} & -\frac{1}{C1 \cdot r} & -\frac{1}{C1r} \\ 0 & -\frac{1}{C2 \cdot r} & -\frac{r+r1}{C2 \cdot r \cdot r1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L(t, \omega_k) \\ U_{C1}(t, \omega_k) \\ U_{C2}(t, \omega_k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E(t, \omega_k)}{C1 \cdot r} \\ \frac{E(t, \omega_k)}{C2 \cdot r} \end{pmatrix}$$

Здесь  $E(t, \omega_k)$  – гармоническая составляющая входного импульса при фиксированной частоте,  $i_L(t, \omega_k)$  – ток индуктивности,  $U_{C1}(t, \omega_k)$ ,  $U_{C2}(t, \omega_k)$  – напряжение на первом и втором конденсаторах. Результирующие токи и напряжения представляются в виде ряда:

$$i_L(t) = \sum_{k=0}^N i_L(t, \omega_k), \quad \omega_k = \omega \cdot k = \frac{2\pi}{T} \cdot k, \quad \omega = 2,53 \cdot 10^6 \text{ рад/сек.}$$

$$U_{C1}(t) = \sum_{k=0}^N U_{C1}(t, \omega_k), \quad U_{C2}(t) = \sum_{k=0}^N U_{C2}(t, \omega_k)$$

Результаты расчетов для провода круглого сечения приведены на рисунке 7, а.

График напряжения на конденсаторе  $C_1$ , рассчитанный теоретически, удовлетворительно совпадает с экспериментом. Что свидетельствует об адекватности модели.

Для провода с прямоугольным поперечным сечением графические зависимости выглядят аналогично.

## Выводы

Полученная математическая модель позволяет определить токи и напряжения с достоверной погрешностью для дальнейших исследований без использования натурального эксперимента. Форма напряжения на катушке, полученная на построенной модели полностью совпала с экспериментальной осциллограммой, следовательно модель можно использовать для моделирования дефектов обмоток, формировать эталонные сигналы при различных повреждениях исследуемого оборудования.

## Список литературы

1. Ильдарханов Р.Г., Усачев А.Е. Контроль состояния обмоток силовых трансформаторов путем спектрального анализа передаточных функций // Известия вузов. Проблемы энергетики. – 2010. – № 3–4. – С. 38–47.
2. Исаев Ю. Н. , Васильева О. В. , Елгина Г. А. Определение деформаций проводов обмотки трансформатора, вызванных током короткого замыкания [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. - 2013 - №. 3. - С. 1-8.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Т. VIII. – М.: Наука, 1982. – 262 с.

4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Физматлит, 2003. – 616 с.
5. Darwin A.W., Sofian D., Wang Z.D., Jarman P.N. Interpretation of frequency response analysis (FRA) results for diagnosing transformer winding deformation // CIGRE 2009 VI<sup>th</sup> Southern Africa Regional Conference. – USA, 2008. – 503 p.

**Рецензенты:**

Усов Ю.П., д.т.н., профессор кафедры ЭСиЭ ЭНИН ФГБОУ ВПО «НИ ТПУ», Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск.

Сивков А.А., д.т.н., профессор кафедры ЭПП ЭНИН ФГБОУ ВПО «НИ ТПУ», Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск.