

О ПРИМЕНЕНИИ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ РАЗНЕСЕННЫХ СЕТКАХ

Жалнин Р.В.¹, Масыгин В.Ф.¹, Панюшкина Е.Н.¹

¹ФГБОУ ВПО «МГУ им. Н.П. Огарёва», Саранск, Россия (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), e-mail: vmasyagin@gmail.com

В статье рассматривается новый эффективный численный алгоритм решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина, который обладает сходимостью и точностью при использовании явной схемы. В отличие от классического разрывного метода Галёркина, в данном алгоритме не требуется дополнительного способа нахождения потоков на границе элементов основной сетки за счет того, что градиенты ищутся на двойственной сетке, а искомая функция - на основной. В качестве ячеек двойственной сетки используются конечно-медианные ячейки, построенные относительно узлов основной сетки. Исследование метода проводится на примере начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности. Расчеты двумерных модельных задач показывают хорошую точность и сходимость предложенного метода. Показана работоспособность метода на «плохих» сетках.

Ключевые слова: уравнения диффузионного типа, разрывный метод Галёркина, метод конечных элементов, сходимость и точность численного метода.

DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL DIFFUSION PROBLEMS ON UNSTRUCTURAL STAGGERED GRIDS

Zhalnin R.V.¹, Masyagin V.F.¹, Panyushkina E.N.¹

¹Mordovian State University national research university after N. P. Ogarev, Saransk, Russia (430005, Saransk, st. Bolshevistskaya, 68), e-mail: vmasyagin@gmail.com

The new effective solution algorithm for diffusion-type problems on base of discontinuous Galerkin method is offered, which has convergence and accuracy when using the explicit scheme. In contrast to the classical discontinuous Galerkin method, this algorithm does not require an additional way of finding fluxes at the elements of the main grid due to the fact that the gradients are sought on the dual grid, and the desired function – on the main grid. As the dual grid cells are used barycentric volumes constructed relative to the nodes of the main grid. The research method is exemplified by the initial-boundary problem for two-dimensional heat conduction equation. Calculations of two-dimensional modeling problems have shown a good accuracy of offered method. Efficiency of the method on the "bad" grids is shown.

Keywords: diffusion-type problems, discontinuous Galerkin method, finite element method, convergence and accuracy of the method

Введение

При численном решении многомерных уравнений Навье-Стокса требуется аппроксимировать с высоким порядком точности как конвективные, так и диффузионные члены.

В настоящей статье предлагается численный алгоритм решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина [4], который хорошо зарекомендовал себя для решения уравнений Навье-Стокса [5, 6, 8]. Численный алгоритм рассматривается на примере решения начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности. В статье [2] были рассмотрены несколько численных схем, отличающиеся вычислениями на границе расчетной области. В этой работе рассматривается самый оптимальный с точки зрения точности и сходимости вариант. Было введено

масштабирование базисных функций, что увеличивает устойчивость рассматриваемой численной схемы. Рассматриваемый алгоритм сравнивался с хорошо известным методом конечных объемов и хорошо зарекомендовавшим себя методом Галёркина с разрывными базисными функциями. На основе разработанного численного алгоритма находится решение ряда модельных задач.

Описание предлагаемого метода на основе разрывного метода Галёркина для уравнения теплопроводности.

Построение и исследование алгоритма метода решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина [4] проведем на примере двумерного уравнения теплопроводности:

$$\rho C_v \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \cdot \text{grad } u) + f, \quad (x, y) \in G, \quad 0 < t \leq T, \quad (1) \quad \text{с}$$

начальным условием

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y),$$

и граничным условием

$$u(x, y, t) = g(x, y, t) \quad \text{при } (x, y) \in \gamma, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где C_v – коэффициент теплоемкости при постоянном объеме, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности, u – температура в точке (x, y) в момент времени t , f – плотность тепловых источников, γ – граница области расчета, $g(x, y, t)$, $u_0(x, y)$ – заданные функции. Область $G \cup \gamma$ – произвольная односвязная. Для применения метода на основе разрывного метода Галёркина в области $G \cup \gamma$ зададим множество точек $\omega_p = \{P_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N\}$, содержащее внутренние и граничные точки области G . На

ω_p построим триангуляцию Делоне:

$T(\omega_p) = \{T_k = T(T_k^1, T_k^2, T_k^3), T_k^1, T_k^2, T_k^3 \in \omega_p, k = 1, 2, \dots, M\}$. Пусть $T(\omega_p)$ содержит все узлы ω_p ;

все треугольники T_k имеют ненулевую площадь и пересекаются не более чем по образующим их вершинам или ребрам. В каждом из треугольников определим центр и середины сторон. В треугольнике T_k с вершинами в точках $T_k^1 : \{x_1, y_1\}$, $T_k^2 : \{x_2, y_2\}$,

$T_k^3 : \{x_3, y_3\}$ центр (x_c, y_c) определим как: $x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. Также примем

в рассмотрение двойственную сетку, составленную из барицентрических объемов вокруг каждой из точек ω_p , образованных отрезками, соединяющими центры треугольников с

серединами сторон (Рис. 1). Точка из ω_p будет являться центром соответствующей ей ячейки двойственной сетки.

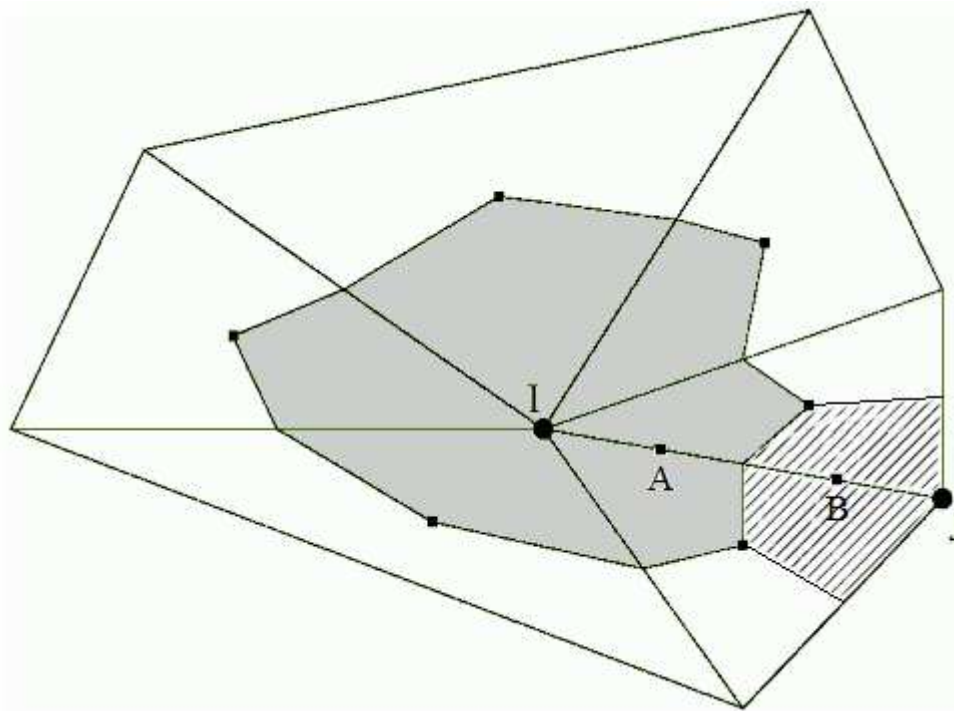


Рис. 1. Барицентрический объем вокруг вершины I (серый цвет) и часть барицентрического объема вокруг вершины J (заштрихован) и две квадратурные точки Гаусса (A и B) на ребре треугольника.

Для аппроксимации уравнения (1) с помощью разрывного метода Галёркина необходимо преобразовать его к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Для этого введем дополнительные переменные [5]: $q_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q_y = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \rho C_v \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k q_x + \frac{\partial}{\partial y} k q_y + f, & (x, y) \in G, \quad 0 < t \leq T, \\ q_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & (x, y) \in G, \quad 0 < t \leq T, \\ q_y = \frac{\partial u}{\partial y}, & (x, y) \in G, \quad 0 < t \leq T, \end{cases}$$

(2)

На каждом треугольнике $T_k \in T(\omega_p)$ приближенное решение (2) будем искать в виде проекции u на пространство полиномов $P^1(x, y)$ степени 1 в базисе $\{\varphi_i\} \in P^1$, $i = 0, 1, 2$,

$\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = \frac{x - x_c}{\Delta x}$, $\varphi_2 = \frac{y - y_c}{\Delta y}$, где (x_c, y_c) – центр треугольника T_k , $\Delta x, \Delta y$ – проекции

треугольника на соответствующие оси.

На каждой ячейке двойственной сетки D_k приближенное решение (2) будем искать в виде проекции q_x, q_y на пространство полиномов $P^1(x, y)$ степени 1 в базисе

$$\{\psi_i\} \in P^1, \quad i = 0, 1, 2, \quad \psi_0 = 1, \psi_1 = \frac{x - x_c^d}{\Delta x_d}, \psi_2 = \frac{y - y_c^d}{\Delta y_d}, \quad \text{где } (x_c^d, y_c^d) - \text{ центр ячейки } D_k,$$

$\Delta x_d, \Delta y_d$ – проекции ячейки двойственной сетки на соответствующие оси.

В каждой ячейке основной и двойственной сетки линейная комбинация базисных функций определяет решение в ячейке:

$$u_k = u_{0k} + u_{1k} \frac{(x - x_c)}{\Delta x} + u_{2k} \frac{(y - y_c)}{\Delta y}, \quad u_{ik} = u_{ik}(t), \quad (x, y) \in T_k, \quad i = \overline{0, 2},$$

$$q_{xk} = q_{x0k} + q_{x1k} \frac{(x - x_c^d)}{\Delta x_d} + q_{x2k} \frac{(y - y_c^d)}{\Delta y_d}, \quad q_{xik} = q_{xik}(t), \quad (x, y) \in D_k, \quad i = \overline{0, 2},$$

$$q_{yk} = q_{y0k} + q_{y1k} \frac{(x - x_c^d)}{\Delta x_d} + q_{y2k} \frac{(y - y_c^d)}{\Delta y_d}, \quad q_{yik} = q_{yik}(t), \quad (x, y) \in D_k, \quad i = \overline{0, 2}.$$

Определим коэффициенты разложения u_k из условия ортогональности невязки всем пробным функциям φ_i на каждом треугольнике T_k [6].

$$(\rho C_v)_k \sum_{i=0}^2 \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} \int_{T_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint_{\partial T_k} n_x k q_x \varphi_m dl + \oint_{\partial T_k} n_y k q_y \varphi_m dl - \int_{T_k} k q_{xk} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} ds - \int_{T_k} k q_{yk} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} ds + \int_{T_k} \Phi_k \varphi_m ds$$

, $m = \overline{0, 2}$.

(3)

Отсюда получаем систему для определения $u_{ik}(t)$.

Определим коэффициенты разложения q_{xk}, q_{yk} из условия ортогональности невязки всем пробным функциям ψ_i на каждой ячейке двойственной сетки D_k .

$$\sum_{i=0}^2 q_{xik} \int_{D_k} \psi_i \psi_m ds = \oint_{\partial D_k} n_x u \psi_m dl - \int_{D_k} u_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x} ds, \quad m = \overline{0, 2}, \quad (4)$$

$$\sum_{i=0}^2 q_{yik} \int_{D_k} \psi_i \psi_m ds = \oint_{\partial D_k} n_y u \psi_m dl - \int_{D_k} u_k \frac{\partial \psi_m}{\partial y} ds, \quad m = \overline{0, 2}, \quad (5)$$

Отсюда получаем систему для определения $q_{xik}(t), q_{yik}(t)$.

Для вычисления интегралов будем использовать квадратурные формулы Гаусса необходимой точности.

Вычисление криволинейного интеграла первого рода по границе треугольника T_k и ячейки двойственной сетки D_k

В случае вычисления интеграла по некоторому отрезку $[a;b]$, т.е. $\int_a^b f(x)dx$, необходимо

сделать замену вида: $t = \frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2}$. В этом случае получаем:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2}\right)dx.$$

В вычислениях мы использовали двухточечный шаблон. При этом значение q_x и q_y в точке A берем из ячейки двойственной сетки вокруг вершины I , а значение q_x и q_y в точке B берем из ячейки двойственной сетки вокруг вершины J (рисунок 1).

Вычисление двойного интеграла по треугольнику T_k и ячейке D_k

Двойной интеграл по ячейке двойственной сетки считаем как сумму двойных интегралов по треугольникам, из которых она состоит.

Следуя работе [7] возьмем три точки на каноническом треугольнике:

$$\tilde{t}_1 : \left(\xi_1 = \frac{2}{3}, \eta_1 = \frac{1}{6} \right), \quad \omega_1 = \frac{1}{3};$$

$$\tilde{t}_2 : \left(\xi_2 = \frac{1}{6}, \eta_2 = \frac{2}{3} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{3};$$

$$\tilde{t}_3 : \left(\xi_3 = \frac{1}{6}, \eta_3 = \frac{1}{6} \right), \quad \omega_3 = \frac{1}{3}.$$

Значение интеграла по треугольнику с вершинами в точках $T_k^1 : \{x_1, y_1\}$, $T_k^2 : \{x_2, y_2\}$, $T_k^3 : \{x_3, y_3\}$ равно

$$\int_{T_k} f(x, y)ds = J \cdot \int_0^{1-\xi} \int_0^\eta f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx J \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \tilde{f}(\xi_i, \eta_i) \omega_i,$$

где $J = |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|$ – якобиан перехода к каноническому треугольнику,

\tilde{f} – значение подынтегральной функции в образах точек \tilde{t}_1 , \tilde{t}_2 , и \tilde{t}_3 в исходном треугольнике $\{T_k^1 T_k^2 T_k^3\}$.

Описание тестовых задач и результаты расчетов

Были выполнены тестовые расчеты двух модельных задач. В качестве первой модельной задачи рассматривалась задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 1, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

точное решение которой $u^T = e^{-2\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Расчет производился до значения $T = 0.0002$ с одним и тем же числом Куранта.

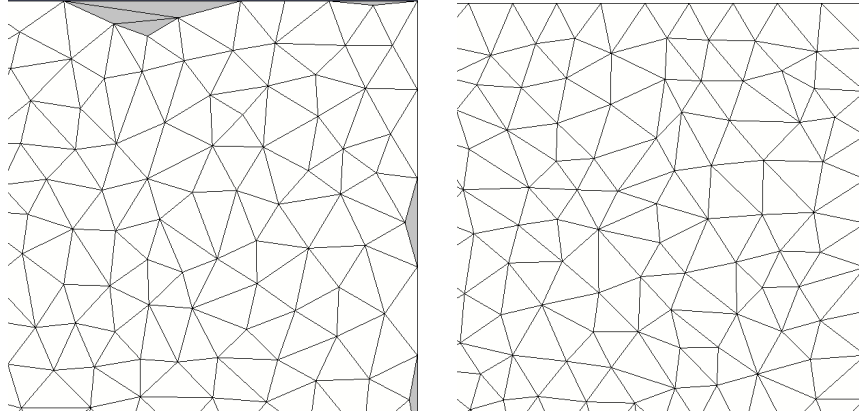


Рис. 2. Пример «плохой» (слева) и «хорошей» (справа) сетки.

Результаты работы предлагаемого метода сравнивались с классическим разрывным методом Галёркина со стабилизационными добавками [8] и хорошо известным методом конечных элементов (FVM). В таблице 1 указано значение погрешности метода $\sum_{i=1}^N (u_i - u^T)^2 S_i$, где S_i – площадь i -го треугольника. В таблице представлены результаты работы предлагаемого метода (DG), классического разрывного метода Галёркина со стабилизационными добавками (CDG) и метода конечных элементов (FVM). Расчеты производились на «хорошей» сетке с минимальным углом треугольника 33° и «плохой» сетке с произвольным углом треугольника (рисунок 2, «плохие» ячейки выделены серым цветом).

Таблица 1. Значения погрешности $\sum_{i=1}^N (u_i - u^T)^2 S_i$, полученные при решении задачи 1.

«Хорошая» сетка

N	CDG		DG		FVM	
	ошибка	порядок	ошибка	порядок	ошибка	порядок
2099	$8.27 \cdot 10^{-7}$		$4.19 \cdot 10^{-6}$		$8.46 \cdot 10^{-6}$	
8453	$3.58 \cdot 10^{-8}$	4.53	$5.81 \cdot 10^{-7}$	2.85	$3.97 \cdot 10^{-6}$	1.09
33975	$1.50 \cdot 10^{-9}$	4.58	$3.58 \cdot 10^{-8}$	4.02	$1.71 \cdot 10^{-6}$	1.22

«Плохая» сетка

N	CDG		DG		FVM	
	ошибка	порядок	ошибка	порядок	ошибка	порядок
1932	-		$3.47 \cdot 10^{-6}$		$9.42 \cdot 10^{-6}$	

7764	-	-	$6.04 \cdot 10^{-7}$	2.52	-	-
31149	-	-	$1.84 \cdot 10^{-7}$	1.72	-	-

В качестве второй модельной задачи рассматривалась задача [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, y, 0) = 1 + x + y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$u(0, y, t) = 1 + y, \quad u(1, y, t) = 2 + y, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0, t) = 1 + x, \quad u(x, 1, t) = 2 + x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $k = 1 + 0.3 \sin(10\pi x)$. Решение сравнивалось с решением u^h , полученным по чисто неявной разностной схеме с помощью метода расщепления [3] на подробной структурированной сетке. Расчет производился до значения $T = 0.0002$ с одним и тем же числом Куранта.

В таблице 2 указано значение погрешности метода $\sum_{i=1}^N (u_i - u^h)^2 S_i$, где S_i – площадь i -го треугольника. В таблице представлены результаты работы предлагаемого метода (DG), классического разрывного метода Галёркина со стабилизационными добавками (CDG) и метода конечных элементов (FVM).

Таблица 2. Значения погрешности $\sum_{i=1}^N (u_i - u^h)^2 S_i$, полученные при решении задачи 2.

«Хорошая» сетка

N	CDG		DG		FVM	
	ошибка	порядок	ошибка	порядок	ошибка	порядок
2099	$2.12 \cdot 10^{-7}$		$9.69 \cdot 10^{-7}$		$3.42 \cdot 10^{-6}$	
8453	$1.12 \cdot 10^{-8}$	4.24	$2.02 \cdot 10^{-7}$	2.26	$1.60 \cdot 10^{-6}$	1.10
33975	$2.10 \cdot 10^{-9}$	2.42	$8.30 \cdot 10^{-8}$	1.28	$6.69 \cdot 10^{-7}$	1.26

«Плохая» сетка

N	CDG		DG		FVM	
	ошибка	порядок	ошибка	порядок	ошибка	порядок
1932	-		$9.19 \cdot 10^{-7}$		$5.60 \cdot 10^{-6}$	
7764	-	-	$2.11 \cdot 10^{-7}$	2.12	-	-
31149	-	-	$7.72 \cdot 10^{-8}$	1.45	-	-

Выводы

Как видно из результатов расчетов, метод конечных объемов и классический метод Галёркина с разрывными базисными функциями сильно зависят от качества сетки, в то время

как предлагаемый метод показывает работоспособность и на «хорошей», и на «плохой» сетках. Предлагаемый алгоритм не теряет работоспособности на «плохой» сетке за счет разнесенной сетки и вычисления градиентов на двойственной сетке, в то время как классический разрывный Галёркин и метод конечных объемов перестают работать из-за погрешности округления на сильно вытянутых ячейках, характерных для «плохой» сетки. При этом следует отметить, что предлагаемый метод на «хорошей» сетке не сильно отличается по точности от классического разрывного метода Галёркина со стабилизационными добавками.

Список литературы

1. Ладонкина М.Е., Милукова О.Ю., Тишкин В.Ф. Консервативные схемы для решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточных методов // Труды Средневолжского математического общества. — 2008. — Т. 10, №2. — С. 21-44.
2. Масыгин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. О применении разрывного конечно-элементного метода Галёркина для решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных сетках // Журнал Средневолжского математического общества. — 2013. — Т. 15, №2. — С. 59-65.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
4. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с английского. – М.: Мир, 1988. – 352 с., ил.
5. Bassi F., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations // J. Comput. Phys. — 1997. Vol. 131. — P. 267-279.
6. Cockburn B., Shu C. W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems // J. Sci. Comp. — 2001. Vol. 3. — P. 173-261.
7. Li B. Q. Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer. Berlin : Springer, 2006. 578 p.
8. Pany A.K., Yadav S. An hp-Local Discontinuous Galerkin method for Parabolic Integro-Differential Equations, OCCAM, Report N 09/30.

Рецензенты:

Малыханов Ю.Б., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры физики и методики обучения физике физико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный педагогический институт имени М.Е. Евсевьева», г. Саранск.

Чаткин М.Н., д.т.н., профессор, ректор ФГБОУ ДПО «Мордовский институт переподготовки кадров агробизнеса», г. Саранск, рп. Ялга.