

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОБИЛЬНОГО ГУСЕНИЧНОГО РОБОТА

Яцун С.Ф., Чжо Пью Вей, Мальчиков А.В., Тарасова Е.С.

*ФГБУВПО Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия (305040 г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94), e-mail: teormeh@inbox.ru*

---

В статье рассматривается гусеничный мобильный робот. Описана конструкция и принцип работы устройства, оснащенного двумя независимыми гусеничными движителями. Разработана математическая модель движения устройства по криволинейной траектории. Проведен анализ кинематики криволинейного перемещения гусеничного мобильного робота и определены основные закономерности его движения при заданном радиусе кривизны траектории. В работе описан процесс взаимодействия опорных катков гусеничных движителей с шероховатой поверхностью. Получены временные диаграммы поперечных проскальзываний. Установлен сложный характер зависимости величины поперечного проскальзывания от радиуса кривизны траектории, что говорит о необходимости учета поперечного проскальзывания при разработке динамических моделей движения устройства. Полученные результаты в дальнейшем будут использоваться при изучении динамики движения робота, в частности, величина проскальзывания и продольная скорость будут учитываться при определении сил сухого трения, действующих в точках контакта робота с поверхностью.

---

Ключевые слова: мобильный гусеничный робот, кинематика, проскальзывание, траектория.

## MATHEMATICAL MODELING OF MOBILE TRACKED ROBOT

Jatsun S.F., Kyaw Phyow Wai, Malchikov A.V., Tarasova E.S.

*Southwest State University, Kursk, Russia (94, 50 let Oktyabrya, Kursk, 305040, Russia), e-mail: teormeh@inbox.ru*

---

The article presents construction of mobile tracked robot, which is equipped electric motor of each track. As well as are developed kinematics analysis of mobile tracked robot's motions and defined the basic laws of motion at a given radius of curvature of the trajectory. In these work are described interaction of robot's track drive with rough surface, are illustrated graphics which can show time influence of slip in robot motion. And also are shown estimation of robot slip modeling and calculation. So received results in these research can used in future study of dynamics of tracked robot, especially, slip value and longitudinal speeds of robot may be used in definition of dry friction force, which will appear at the points of track drive contact with rough surface.

---

Keywords: mobile tracked robot, kinematics, slipping, trajectory.

### Введение

За последние десятилетия мировая робототехника и технологии, связанные с ними, развиваются стремительными темпами, приобретая все большую возможность использования мобильных роботов в различных областях человеческой деятельности. Для решения такого рода задач были разработаны несколько различных типов мобильных роботов, в том числе колесные роботы, гусеничные роботы, шагающие роботы, беспилотные летательные аппараты [1,7]. В данной работе рассматривается мобильный гусеничный робот, предназначенный для проведения поисковых операций. Выбор гусеничного движителя обусловлен рядом преимуществ, среди которых: маневренность, высокая проходимость, надежный контакт с поверхностью.

В данной статье представлен кинематический анализ движения мобильного гусеничного робота, оснащенного двумя независимыми гусеничными движителями.

## Описание конструкции и принципа движения гусеничного робота

Конструкция гусеничного робота показана на рисунке 1.

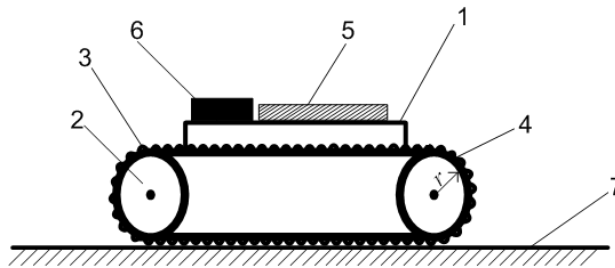


Рис 1. Схема гусеничного робота

Гусеничный робот состоит из следующих основных частей: 1 – корпус, 2 – ведущий каток, 3 – гусеница, 4 – ведомый каток, 5 – система автоматического управления электроприводами устройства, 6 – батареи питания, 7 – поверхность, по которой перемещается робот.

Робот перемещается за счет сил трения, возникающих между опорной поверхностью (грунтом) и гусеничным движителем робота. Ведущий каток соединен посредством редуктора с двигателем постоянного тока, управляемым системой автоматического регулирования. Проскальзывание между ведущими катками и гусеницей отсутствует, поэтому угловые скорости вращения катков (ведущих и ведомых) равны.

В зависимости от алгоритма перемещения и информации с датчиков система автоматического регулирования формирует управляющие напряжения для электроприводов устройства. Для усиления слабых сигналов с контроллера системы управления используются силовые транзисторные ключи – драйверы двигателей.

Для поворота в горизонтальной плоскости система управления формирует различное напряжение питания для каждого из гусеничных движителей. Система навигации робота может включать как ультразвуковые датчики расстояния, оптические линейки для перемещения по контрастной линии, так и контактные датчики препятствий.

### Кинематический анализ движения мобильного гусеничного робота

Положение робота однозначно определяется координатами центра масс корпуса  $C$  и углом поворота корпуса  $\varphi$ . При кинематическом анализе движения гусеничного робота решается задача определения положения, скорости центра масс робота и скорости точек  $C_i$  и  $K_i$ .

В рамках данного исследования были рассмотрены движения робота по окружности и спиралевидной траектории. Для получения численного результата при моделировании движения использовался пакет MathCad.

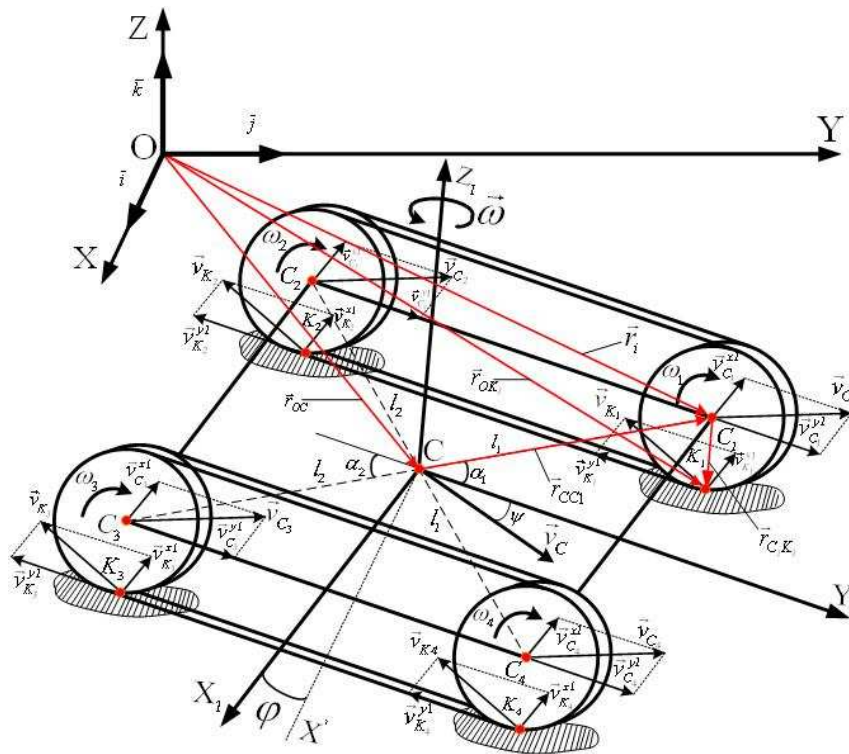


Рис 2. Расчетная схема гусеничного робота

На данной схеме приняты следующие обозначения:  $XOYZ$  – неподвижная система координат,  $CX_1Y_1Z_1$  – подвижная система координат,  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – точки крепления центров опорных катков;  $K_1, K_2, K_3, K_4$  – точки контакта гусениц с поверхностью;  $\vec{v}_{C_1}, \vec{v}_{C_2}, \vec{v}_{C_3}, \vec{v}_{C_4}$  – скорости точек крепления центра опорных катков;  $\vec{v}_{C_1}^{x1}, \vec{v}_{C_2}^{x1}, \vec{v}_{C_3}^{x1}, \vec{v}_{C_4}^{x1}$  – проекции скоростей точек крепления центров опорных катков на ось  $CX_1$ ;  $\vec{v}_{C_1}^{y1}, \vec{v}_{C_2}^{y1}, \vec{v}_{C_3}^{y1}, \vec{v}_{C_4}^{y1}$  – проекции скоростей точек крепления центра опорных катков на ось  $CY_1$ ;  $\vec{v}_{K_1}, \vec{v}_{K_2}, \vec{v}_{K_3}, \vec{v}_{K_4}$  – скорости точек контакта опорных катков с поверхностью;  $\vec{v}_{K_1}^{x1}, \vec{v}_{K_2}^{x1}, \vec{v}_{K_3}^{x1}, \vec{v}_{K_4}^{x1}$  – проекции скоростей точек контакта опорных катков с поверхностью на ось  $CX_1$ ;  $\vec{v}_{K_1}^{y1}, \vec{v}_{K_2}^{y1}, \vec{v}_{K_3}^{y1}, \vec{v}_{K_4}^{y1}$  – проекции скоростей точек контакта опорных катков с поверхностью на ось  $CY_1$ ;  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  – угловые скорости вращения опорных катков,  $l_1$  – расстояние от центра масс до 1-го и 4-го катка,  $l_2$  – расстояние от центра масс до 2-го и 3-го катка,  $\varphi$  – угол поворота корпуса робота вокруг  $CZ_1$ .  $\alpha_1, \alpha_2$  – угол между линией  $CC_1$  и осью  $CY_1$  ( $\alpha_1$  для  $i=1,4$ ;  $\alpha_2$  для  $i=2,3$  соответственно).

Определим радиус-вектор, описывающий движение корпуса робота в неподвижной системе координат:

$$\vec{r}_{oc} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ где } x_c \text{ и } y_c \text{ – проекции радиус вектора в абсолютной системе координат.}$$

Для определения скорости центра масс продифференцируем следующее выражение:

$$\frac{d\vec{r}_{OC}}{dt} = \begin{bmatrix} v_c \cos(\psi) \\ v_c \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_c^x \\ v_c^y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При этом скорость центра масс в системе координат  $CX_1Y_1Z_1$  будет иметь вид:

$$\vec{v}_C^{(1)} = \begin{bmatrix} v_c \cos \psi \\ v_c \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_c^x \\ v_c^y \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ а в системе координат } XOYZ:$$

$$\vec{v}_C^{(0)} = \begin{bmatrix} v_c \cos(\varphi + \psi) \\ v_c \sin(\varphi + \psi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_c^x \\ v_c^y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Угловая скорость корпуса робота  $\vec{\omega}$  определяется следующим образом:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix},$$

Определим радиус-вектор точек закрепления катков гусеничного робота как:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{OC} + \vec{r}_{CC_i}, i = 1..4$$

Скорости для этих точек могут быть получены как:

$$\vec{v}_{C_i} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_{OC}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{CC_i}}{dt} \text{ или } \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_{OC}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CC_i};$$

$$\vec{v}_{C_i} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CC_i};$$

Аналогичным образом можем записать для точек контакта с поверхностью:

$$\vec{r}_{K_i}^{(0)} = \vec{r}_i + \vec{r}_{C_iK_i}; \frac{d\vec{r}_{K_i}}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{d\vec{r}_{C_iK_i}}{dt}; \vec{v}_{K_i}^{(0)} = \vec{v}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{C_iK_i};$$

$$\vec{v}_{K_i}^{(0)} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{K_i} \\ \dot{y}_{K_i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{C_i} \\ \dot{y}_{C_i} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_{1x} & \omega_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & r_{C_iK_i} \end{bmatrix}$$

где  $\vec{v}_{K_i}^{(0)}$  – скорость точек  $K_i$  в абсолютной системе координат.

$$T_{10} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_{10}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_{K_i}^{(1)} = T_{10}^{-1} \vec{v}_{K_i}^{(0)}$$

где  $\vec{v}_{K_i}^{(1)}$  – скорость точек  $K_i$  в относительной системе координат.

Положение точек центров катков робота задается следующими проекциями:

$$\begin{cases} x_{C_1} = x_c + l_1 \cos(\varphi + \alpha_1) \\ y_{C_1} = y_c + l_1 \sin(\varphi + \alpha_1) \end{cases}; \begin{cases} x_{C_2} = x_c + l_1 \cos(\varphi - \alpha_1) \\ y_{C_2} = y_c + l_1 \sin(\varphi - \alpha_1) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_{C_3} = x_c - l_2 \cos(\varphi + \alpha_2) \\ y_{C_3} = y_c - l_2 \sin(\varphi + \alpha_2) \end{cases}; \begin{cases} x_{C_4} = x_c - l_2 \cos(\varphi - \alpha_2) \\ y_{C_4} = y_c - l_2 \sin(\varphi - \alpha_2) \end{cases};$$

где,  $x_{C_i}, y_{C_i}$  – координаты центра  $i$ -того катка ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $x_C, y_C$  – координаты центра масс гусеничного робота.

Пусть центр масс корпуса робота движется по окружности, координаты которого задаются уравнениями:  $\begin{cases} x_C = R \cos(\omega t) \\ y_C = R \sin(\omega t) \end{cases}$ , где  $R$  – радиус кривизны окружности, по которому движется центр масс робота,  $\omega$  – угловая скорость корпуса робота. Будем считать, что когда  $\omega = \dot{\varphi}$ , подвижная ось  $CY_I$  всегда направлена по касательной к траектории, и угол  $\varphi$  изменяется по заданному закону, то есть  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  – начальный угол, определяющий положение корпуса робота на траектории.

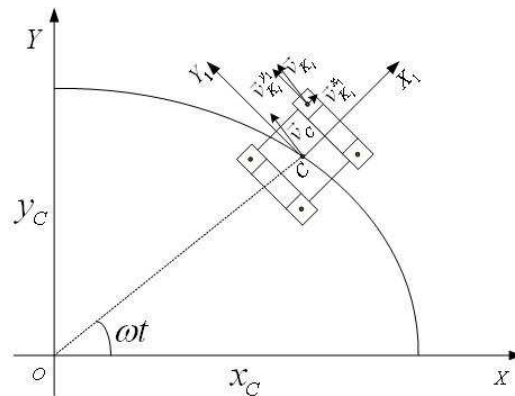


Рис 3. Схема движения робота по траектории

Проведем моделирование движения робота и определим траекторию. Результаты моделирования представлены на рис. 4–5.

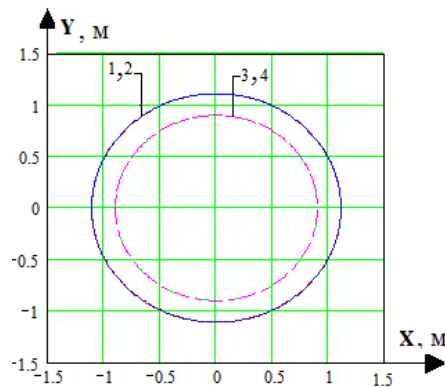


Рис. 4. Траектория движения робота при движении по окружности: 1, 2 – скорости катков забегающей гусеницы; 3, 4 – скорости катков отстающей гусеницы

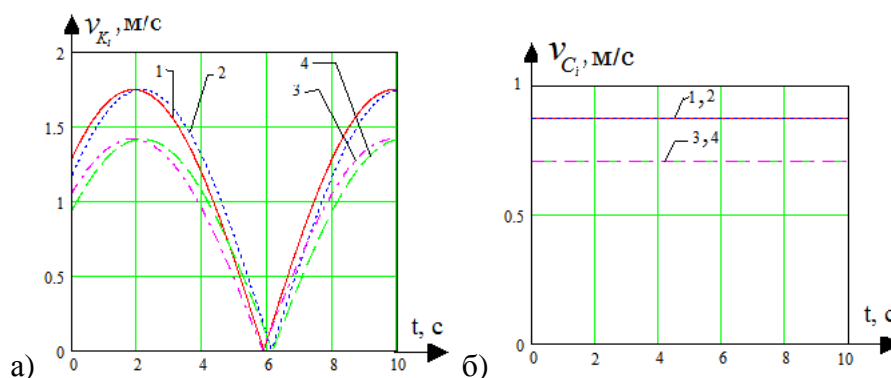


Рис 5. Временные диаграммы параметров движения робота по окружности 1, 2 – скорости катков забегающей гусеницы; 3, 4 – скорости катков отстающей гусеницы; а – зависимость скорости точек контакта робота с поверхностью от времени; б – зависимость скорости точек центров катков робота от времени

Отметим, что при движении по криволинейной траектории в точке контакта опорных катков с поверхностью возникает продольное проскальзывание. Для оценки величины проскальзывания осуществим моделирование движения гусеничного робота по спиралевидной траектории, при которой радиус окружности будет изменяться во времени, т.е.  $R = R(t)$ .

В данном случае, координаты центра масс будут задаваться уравнениями:

$$\begin{cases} x_C = R(t) \cos(\omega t) \\ y_C = R(t) \sin(\omega t) \end{cases}$$

Выполним численный расчет движения робота в MathCAD и получим график траектории движения робота. Также, построим графики зависимости скоростей точек контакта с поверхностью от времени. Результаты моделирования представлены на рис. 6–7.

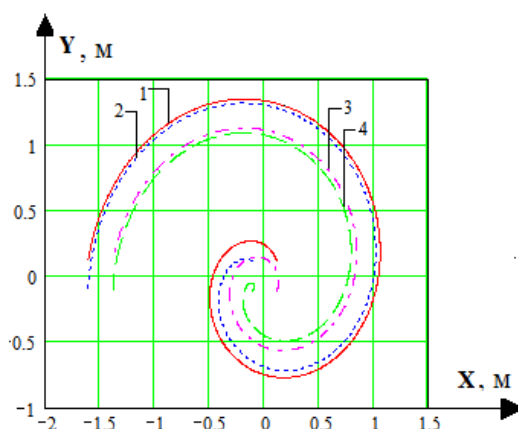


Рис. 6. Траектория движения катков робота при спиральном движении: 1, 2 – скорости катков забегающей гусеницы; 3, 4 – скорости катков отстающей гусеницы

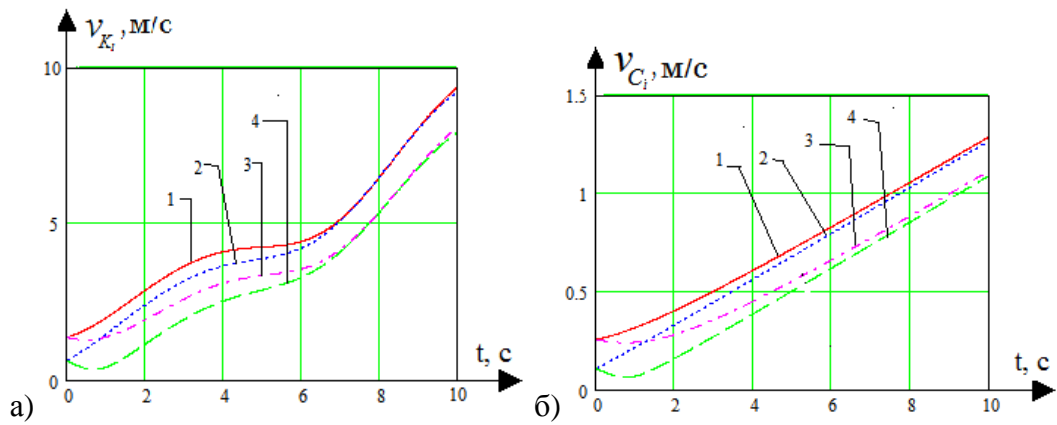


Рис 7. Временные диаграммы параметров спирального движения робота: 1, 2 – скорости катков забегающей гусеницы; 3, 4 – скорости катков отстающей гусеницы; а – зависимость скорости точек контакта робота с поверхностью от времени; б – зависимость скорости точек центров катков робота от времени

Определим величину продольного скольжения катков робота. Для этого вычислим нормальную составляющую скорости каждого катка, воспользовавшись формулой:

$$v_{K_i}^{x_l}(t) = v_{C_i}(t) \cdot \cos(\alpha)$$

Произведя необходимые вычисления в MathCad, получим графики проскальзывания каждого из катков робота.

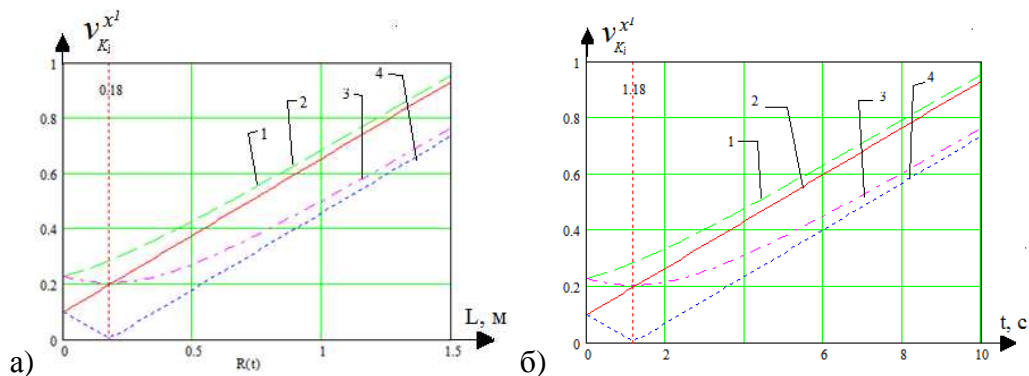


Рис. 8. Зависимость проскальзывания от радиуса кривизны:

1, 2 – скорости катков забегающей гусеницы; 3, 4 – скорости катков отстающей гусеницы

Как видно из графика, величина продольного проскальзывания нелинейно зависит от радиуса кривизны криволинейной траектории. Характерной является точка, обозначенная на рис. 8, где  $R=0,18$  м, а  $t=1,18$  с. В данном случае скорость второго опорного катка робота, являющегося ведомым во внешней гусеничной паре, становится равной нулю. По сути, в этот момент времени робот начинает вращаться относительно этого катка. После этого момента, когда  $R>0,18$  м, скорость всех катков имеет вид возрастающей прямой, так как радиус кривизны линейно изменяется во времени.

## **Заключение**

В данной работе проведен анализ кинематики движения гусеничного мобильного робота, определены основные закономерности его движения при заданном радиусе кривизны траектории, полученные результаты в дальнейшем будут использоваться при изучении динамики движения робота, в частности, величина проскальзывания и скорость вдоль оси  $SY_1$  будут учитываться при определении сил сухого трения, действующих в точках контакта робота с поверхностью.

## **Список литературы**

1. Туладхар Д., Тарасова Е.С. Исследование процесса торможения двухколесного транспортного средства в сложных дорожных условиях // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2010. – Т.12, № 4–3. – С.634-636.
2. Туладхар Д., Лупехина И.В., Яцун С.Ф. Исследование динамики движения двухколесного транспортного средства (ДТС) в фазе торможения переднего колеса // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2011. – № 1 (34). – С.10-17.
3. Туладхар Д., Лупехина И.В., Яцун С.Ф., Политов Е.Н. Математическое моделирование динамики движения двухколесного транспортного средства (ДТС) в фазе торможения переднего колеса // Естественные и технические науки. – 2010. – № 6. – С.578-581.
4. Ali.A. Moosavian, Arash Kalantari Experimental Estimation for Exact Kinematics Modelling and Control of a Tracked Mobile Robot // International Conference on Intelligent Robots and Systems. – 2008. – P.95-100.
5. Guarnieri M., Kurazume R., Masuda H, Inoh T., Takita K., Debenest P. A Team of Tracked Robots for Special Urban Search and Rescue Operations // International Conference on Intelligent Robots and Systems. – 2009. – P.2795-2800.
6. Roland S., Nourbakhsh R. Introduction to Autonomous Mobile Robots // Massachusetts Institute of Technology. – 2004. – P.336.
7. Varun K. Raj, Sharschchandra V., Bidargaddi K.N., Krishnanand D. Ghose A Tracked Mobile Robot with Vision-based Obstacle Avoidance // International Conferences on Mechanisms and machines. – 2007. – P. 141-147.

## **Рецензенты:**

Савин Л.А., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Мехатроника и МИ», ФГОУ ВПО «Госунiversитет УНПК», г. Орел.

Кобелев Н.С., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой теплогазоснабжения и вентиляции, ЮЗГУ, г. Курск.