УДК 517.929

О СПЕКТРЕ ОДНОГО ОПЕРАТОРА ВНУТРЕННЕЙ СУПЕРПОЗИЦИИ

Брагина Н.А.[1]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь, Россия (614990, Пермский край, г. Пермь –ГСП, Комсомольский проспект, д. 29), e-mail: bragnat@mail.ru.*

Рассматривается оператор внутренней суперпозиции $S: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, определенный равенством: $(Sy)(t) = a(t)\,y(kt^{\gamma})$, где k, γ - положительные параметры, $a(t):[0,1] \to R^1$ - суммируемая функция. Операторы такого вида возникают при исследовании некоторых классов функционально-дифференциальных уравнений. В работе получено достаточное условие ограниченности оператора S и приведено представление сопряженного оператора. Основные результаты работы состоят в следующем: для оператора $S: L_2 \to L_2$, заданного равенством: $(Sy)(t) = t^{\frac{\gamma-1}{2}} y(t^{\gamma})$ действительная часть спектра $\operatorname{Re}\sigma(S)$ принадлежит окружности $\operatorname{Re}\sigma(S) \subset \{\lambda / |\lambda| = \gamma^{-1/2}\}$. Кроме того доказано, что для сюрьективного спектра этого оператора $\sigma_0(S)$ (то есть для таких $\lambda \in$, для которых оператор $(\lambda I - S)$ не является сюрьективным) справедливо вложение $\operatorname{Re}\sigma_0(S) \subset \{\lambda / |\lambda| = \gamma^{-1/2}\}$. Результаты работы могут быть использованы при исследовании краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа.

Ключевые слова: оператор внутренней суперпозиции, спектр, сюрьективный спектр.

ON THE SPECTRUM OF ONE COMPOSITION OPERATOR

Bragina N. A.[1]

[1] *Perm National Research Polytechnic University, 614990 Russia, Perm, 29, Komsomolsky Ave., e-mail: bragnat@mail.ru.*

We consider the composition operator $S: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ determined by the equation: $(Sy)(t) = a(t)\,y(kt^{\gamma})$, where k, γ - positive parameters, $a(t):[0,1] \to R^1$ - summable function. Operators of this kind appear when some classes of functional differential equations are investigated. In this paper sufficient boundedness condition of S operator is obtained and representation of adjoint operator is given. Main results of the paper are the following: for S operator $S: L_2 \to L_2$, defined by the equation: $(Sy)(t) = t^{\frac{\gamma-1}{2}} y(t^{\gamma})$ real part of spectrum $\operatorname{Re}\sigma(S)$ belongs to the circumference $\operatorname{Re}\sigma(S) \subset \{\lambda / |\lambda| = \gamma^{-1/2}\}$. Besides it is proved that for the surjective spectrum of this operator $\sigma_0(S)$ (i.e. for these $\lambda \in$, for which operator $(\lambda I - S)$ is surjective) the correct is $\operatorname{Re}\sigma_0(S) \subset \{\lambda / |\lambda| = \gamma^{-1/2}\}$. The results obtained in this paper can be used in the investigation of boundary-value problems for functional differential equations of neutral type.

Keywords: the composition operator, spectrum, surjective spectrum.

Пусть $L_2 = L_2[0;1]$ - банахово пространство измеримых и суммируемых с квадратом функций $y:[0;1] \to R^1$. Рассмотрим оператор внутренней суперпозиции $S: L_2 \to L_2$, определенный равенством (1)

$$(Sy)(t) = a(t)\,y(kt^{\gamma}), \qquad (1)$$

где функция $a:[0;1] \to R^1$ измерима и k, γ - положительные фиксированные параметры. При $\gamma = 1$ этот оператор исследовался многими авторами. В частности известно, что если функция $a(t)$ ограничена в существенном, то оператор S определен на всем пространстве и ограничен [3]. Кроме того, если $a(t)\equiv 1$, $\gamma=1$ и $k<1$ то спектр оператора S определяется равенством [1] $\sigma(S)=\left\{\lambda\in \quad / |\lambda|\le\frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$.

В предлагаемой работе оператор S рассматривается в предположении, что $0<\gamma\le 1$. Предварительно рассмотрим вспомогательные утверждения.

Положим

$$a_0 = vrai\sup_{S\in[0,1]}\left|a\left(\left(\frac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right)s^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}\right|.$$

Лемма 1. Если $a_0<+\infty$, то оператор S определен на всем пространстве L_2 (то есть $D(S)=L_2$) и ограничен, причем $\|S\|\le\gamma^{-1/2}k^{-1/2\gamma}a_0$.

Доказательство. Имеем для произвольного $y\in L_2$

$$\|Sy\|^2=\int_0^1 a^2(t)\,y^2\left(kt^\gamma\right)dt.$$

Произведя соответствующую замену переменных в интеграле

$$\|Sy\|^2=\int_0^k a^2\left(\left(\frac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right)y^2(s)\frac{1}{\gamma k}\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}ds.$$

Применим неравенство Гельдера

$$\|Sy\|^2\le\frac{1}{\gamma k^{1/\gamma}}\int_0^1 a^2\left(\left(\frac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right)y^2(s)\,s^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}ds\le\frac{1}{\gamma k^{1/\gamma}}a_0^2\|y\|^2.$$

Это и означает, что оператор S определен на всем пространстве и ограничен. Кроме того, получена требуемая оценка нормы $\|S\|\le\sqrt{\frac{1}{\gamma k^{1/\gamma}}}a_0$.

Отметим, что если функция $a(t)$ является константой или степенной функцией, то полученная оценка является точной, то есть совпадает с нормой оператора S.

Лемма 2. Оператор, сопряженный к оператору $S:L_2\to L_2$ имеет вид

$$(S^*z)(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma k^{1/\gamma}}a\left(\left(\dfrac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right)s^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}z\left(\left(\dfrac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right), & 0\le s<k;\\ 0, & k\le s\le 1.\end{cases}$$

Доказательство. Для произвольных $y, z \in L_2$ рассмотрим

$$(Sy, z) = \int_0^1 a(t)\, y\left(kt^{\gamma}\right) z(t)\, dt.$$

Произведем замену переменной в интеграле, полагая $s = kt^{\gamma}$. Получим

$$(Sy, z) = \int_0^k a\left(\left(\frac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right) y(s)\, z\left(\left(\frac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right) \frac{1}{\gamma k}\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} ds =$$

$$= \frac{1}{\gamma k^{1/\gamma}} \int_0^k y(s)\, a\left(\left(\frac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right) s^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} z\left(\left(\frac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right) ds =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma k^{1/\gamma}} \displaystyle\int_0^k y(s)\, a\left(\left(\frac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right) s^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} z\left(\left(\frac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right) ds, & 0 \le s \le k; \\ 0, & k \le s \le 1. \end{cases}$$

Следовательно $$(S^* z)(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma k^{1/\gamma}}\, a\left(\left(\frac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right) s^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} z\left(\left(\frac{s}{k}\right)^{1/\gamma}\right), & 0 \le s < k; \\ 0, & k \le s \le 1. \end{cases}$$

Следующее утверждение, содержащее информацию о действительной части спектра оператора *S*, найдет применение в теории функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа.

Теорема 1. Пусть $a(t) = t^{\frac{\gamma-1}{2}}$ и $k = 1$. Тогда

$$\operatorname{Re}\sigma(S) \subset \left\{ \lambda \,/\, |\lambda| = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right\}.$$

Доказательство. Как известно [5], для обратимости линейного оператора $A: X \to Y$, где *X*,*Y* – (B) – пространства, необходимо и достаточно выполнение в совокупности следующих двух неравенств:

$$m\|z\| \le \|Az\|,$$

$$q\|\omega\| \le \|A^*\omega\|,$$

где $z \in X$, $\omega \in Y^*$ и *m*, *q* – положительные константы.

Для доказательства утверждения теоремы мы установим справедливость неравенств.

$$\begin{cases} \|\lambda z - Sz\|^2 \geq \left(|\lambda| - \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 \|z\|^2; \\ \|\lambda z - S * z\|^2 \geq \left(|\lambda| - \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 \|z\|^2; \end{cases}$$

Для произвольного $\lambda \in R^1$. Докажем первое из этих неравенств. Квадрат нормы представим в виде скалярного произведения и преобразуем его.

$$\|\lambda z - Sz\|^2 \geq \lambda^2 \|z\|^2 - 2|\lambda|\|S\|\|z\|^2 + \int_0^1 \left[(Sz)(s) \right]^2 ds \qquad (2)$$

Нетрудно доказать, что $\|S\| = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$.

Преобразуем третье слагаемое в правой части (2)

$$\int_0^1 s^{1-\gamma} z^2 \left(s^\gamma \right) ds = \left| \begin{matrix} s^\gamma = t;\ s = t^{1/\gamma}; \\ ds = \dfrac{1}{\gamma} t^{\frac{1}{\gamma}-1} dt \end{matrix} \right| = \int_0^1 t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} z^2(t) \frac{1}{\gamma} t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} dt = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 z^2(t) dt = \frac{1}{\gamma} \|z\|^2.$$

Теперь первое неравенство следует из оценок

$$\|\lambda z - Sz\| \geq \lambda^2 \|z\|^2 - 2|\lambda| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|z\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|z\|^2 =$$

$$= \left(\lambda^2 - 2|\lambda| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\gamma} \right) \|z\|^2 = \left(|\lambda| - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 \|z\|^2.$$

Аналогичным образом доказываем второе неравенство

$$\|\lambda z - S * z\| \geq \lambda^2 \|z\|^2 - 2|\lambda|\|S\|\|z\|^2 + \int_0^1 \left[(S * z)(s) \right]^2 ds \geq$$

$$\geq \lambda^2 \|y\|^2 - 2|\lambda| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|y\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y\|^2 = \left(|\lambda| - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 \|y\|^2.$$

Теорема доказана.

Для исследования квазилинейных операторных уравнений важное значение имеет оценка коэффициента сюрьективности линейного оператора. Напомним, что для линейного оператора $A: X \to Y$, где X,Y – (B) – пространства, рассмотрим числовую характеристику

$$q(A) = \inf_{z \neq 0} \frac{\|A * y\|}{\|y\|},$$

называемую коэффициентом сюръективности. $A^*: Y^* \to X^*$ оператор сопряженный с A. Воспользуемся свойствами коэффициента сюръективности, приведенными в работе [2].

Определим сюръективный спектр оператора A, как множество всех $\lambda \in$, при которых оператор перестает быть сюръективным. Иными словами, полагаем $\sigma_0(A) = \{\lambda \in \quad / \, q(\lambda I - A) = 0\}$.

Лемма 3. Пусть X – гильбертово пространство, оператор $A: X \to X$ удовлетворяет условию $AA^* = M_a$, где M_a - оператор умножения $M_a = aI$, $a = const$, I - единичный оператор. Тогда $q(A) = \sqrt{a}$.

Доказательство. Так как $AA^* \geq 0$, то очевидно что a – неотрицательная константа.

Спектр положительного оператора AA^* состоит из одной точки, то есть $\sigma(AA^*) = \{a\}$. Теперь используем теорему [4, стр. 440, т. 2].

$$q(A) = \sqrt{\inf\{\lambda / \lambda \in \sigma(AA^*)\}} = \sqrt{a}.$$

Теорема 2. Пусть $a(t) = t^{\frac{\gamma-1}{2}}$. Тогда $\mathrm{Re}\,\sigma_0(S) \subset \{\lambda / |\lambda| = \gamma^{-1/2}\}$.

Доказательство. Таким образом рассматриваем оператор $(Sy)(t) = t^{\frac{\gamma-1}{2}} y(t^\gamma)$ $S: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$. Кроме того оператор $S^*: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ имеет вид $(S^*\omega)(t) = \frac{1}{\gamma} t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \omega\left(t^{\frac{1}{\gamma}}\right)$. Тогда

$$(SS^*\omega)(t) = t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \omega(t) = \frac{1}{\gamma}\omega(t).$$

В силу леммы 3. Справедливо утверждение теоремы.

Список литературы

1. Абдуллаев А.Р. К вопросу о спектре оператора внутренней суперпозиции//Деп. в ВИНИТИ 15.10.81. - №4796-81.
2. Абдуллаев А.Р., Брагина Н.А. Операторы Грина с минимальной нормой// Известия вузов. Математика. – 2003. – № 4.– С. 3-7.
3. Драхлин М.Е. Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций//Известия вузов. Математика. – 1986. – №5 – С. 17-24.
4. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

5. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

Рецензенты:

Плехов О.А., д.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, г. Пермь.

Гитман М.Б., д.ф.-м.н., профессор кафедры математического моделирования систем и процессов Пермского национального исследовательского политехнического университета, г.Пермь.

Криштоп В.В., д.ф.м.н., профессор, заведующий кафедрой «Физика», Дальневосточный государственный университет путей сообщения, г. Хабаровск, профессор Университета Kwangwoon University, Korea.