УДК 372.8:51 (075.8)

СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Воистинова Г.Х.[1], Солощенко М.Ю.[1]

[1]*Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет», Стерлитамак, Россия (453100, Стерлитамак, Пр. Ленина, 37), e-mail: voistinova69@mail.ru*

В данной статье проведен краткий анализ литературы, посвященной актуальной проблеме составления и решения задач, в частности, практических задач. При конструировании задач перед педагогом возникает два важных вопроса: зачем учить составлять задачи и как составлять такие задачи? В ходе проведенного исследования было выявлено, что наибольшую трудность при решении практических задач вызывают задачи, математическими моделями которых являются задачи на построение в силу специфики их решения: использование чертежных инструментов, выделение четырех этапов (анализ, построение, доказательство, исследование) и т.п. Авторами предложен механизм составления геометрических задач на построение с практическим содержанием, раскрытый на конкретных примерах с подробным решением. В статье продемонстрирована замена практической задачи на математическую и обратно – математической задачи на практическую.

Ключевые слова: практическая задача, задача на построение, составление задачи, решение задачи.

DESIGN AND SOLUTION OF PRACTICAL PROBLEMS ON CONSTRUCTION

Voistinova G.H.[1], Soloschenko M.Y.[1]

[1]*Sterlitamak Branch of Federal State Budgetary Educational Institution «Bashkir State University», Sterlitamak Russia (453100, Sterlitamak, Lenin Prospect, 37), e-mail: voistinova69@mail.ru*

In this article the short analysis of the literature devoted to an actual problem of drawing up and the solution of tasks, in particular, practical tasks is carried out. When designing tasks the teacher has two important questions why to learn to design tasks and how to design such tasks? During the research it was revealed that the greatest difficulty in the solution of practical tasks is caused by the tasks mathematical models of which are tasks on construction due to peculiarities of their decision: use of drawing tools, allocation of four stages (analysis, construction, proof and research), etc. Authors offered the mechanism of drawing up geometrical tasks on construction with the practical contents, the mechanism which is shown on precise examples with the detailed decision. In article the change of a practical task into mathematical and a mathematical task into a practical one is shown

Keywords: practical task, task on construction, drawing up a task, the solution of a task.

Введение

Важнейшим средством формирования научного мировоззрения студентов, на наш взгляд, является решение и самостоятельное составление задач. По мнению Р.Г. Хазанкина [3], при решении каждой задачи необходимо: обобщать, анализировать, рассматривать варианты, строить контрпримеры, составлять свои задачи – не только аналогичные разработанным, но и вытекающие из правил, формул, теорем и т.д.

При анализе решения полезно устанавливать возможность обобщения данной задачи, выявлять ее особенности, сопоставлять решение данной задачи с ранее решенными, составлять и решать некоторые другие (в том числе и практические) задачи, «порожденные» разобранной, или, иначе, задачи, развивающие тему данной задачи. Е.С. Канин, в статье «Развитие темы задачи» [4], к ним относит задачи, которые получаются из исходной: заменой части данных в исходной задаче другими данными без замены заключения задачи; при обобщении данных и искомых; путем специализации данных и искомых; добавлением новых заключений при сохранении данных; заменой части данных исходной задачи ее искомыми, то есть путем обобщения задачи; составлением сложных задач из более простых; заменой одних объектов другими без изменения искомых (переформулировка задачи).

В методическом отношении развитие темы, включающее и составление задач, особенно ценно тем, что приучает решающих к конструированию задач, что является одним из основных приемов поиска решения.

Развитие темы задачи в качестве заключительного этапа работы над ней особенно ценно при творческом подходе преподавателя к обучению решению задач.

Приведем примеры аналогичных задач.

Задача 1. (математическая). Провести окружность, касающуюся трех данных несовпадающих прямых ВС, СА, АВ.

Задача 1'. *(практическая). На карте города изображены три пересекающиеся дороги ВС, СА, АВ. Постройте кольцевую дорогу, касающуюся трех данных дорог.*

Задача 2. (математическая). К данной окружности построить касательную, проходящую через данную точку вне окружности.

Задача 2'. *(практическая). Пруд, находящийся неподалеку от деревни, имеет округлую форму. Дорожникам надо построить прямую дорогу к пруду от деревни так, чтобы дорога прилегала к пруду.*

Задача 3. (математическая). Даны прямая а и точка М, не лежащая на ней. Постройте прямую, проходящую через точку М и перпендикулярную к прямой а.

Задача 3'. *(практическая). Через данное село и шоссе, не проходящее через село, построить проселочную дорогу так, чтобы расстояние от населенного пункта до шоссе были минимальными.*

Простое применение аналогии дает задачу, подобную, однопорядковую с исходной. При составлении задач по аналогии может случиться, что формально вычисленный ответ не будет иметь смысла. Поэтому студенты (учащиеся) должны проверять ответы, найденные при решении составленных ими задач. По мнению Е.С. Канина [4], составление таких задач помогает учащимся лучше понять структуру математических задач, т.е. существенно углубляет и расширяет математические представления и знания учащихся.

При замене практической задачи на математическую (и обратно – математической на практическую), решаются важные методические задачи: решающие лучше усваивают структуру задачи; взаимосвязь данных; данных и искомых; усваивают способ решения задачи.

Составление и решение задач, порожденных данной, – это творческая деятельность. Место этой деятельности чаще всего на стадии завершающего, обобщающего обучения. Важно время от времени обращаться к составлению задач, родственных данной математической задаче.

При самостоятельном составлении задачи решающий должен осознанно применять соответствующие математические термины, правила и законы. Ему приходится самому анализировать пройденный материал, т.к. при выполнении упражнения на составление задачи необходимо оперировать фактами и понятиями, которые были изложены в этом материале.

Прежде чем говорить непосредственно о методических рекомендациях по составлению задач практического характера мы остановимся на проблеме составления задач вообще. В рамках этой проблемы перед нами встает ряд вопросов:

1. Зачем учить составлять задачи?
2. Как составлять задачи?

Попытаемся ответить на эти вопросы.

Все рассуждения, приведенные выше, по поводу составления задач, можно отнести к ответу на первый вопрос. Так же самостоятельно составленная задача запоминается полнее и прочнее, чем просто решенная; составленную самим задачу решить легче, нежели готовую, чужую задачу.

Человек только тогда разберется в проблеме, когда он сам научится ее ставить. Дело в том, что составление задач часто требует проведения рассуждений, которые при решении заданных задач не выполняются. Составление задач служит развитию творческого и логического мышления, повышает интерес к учебе.

Перейдем к самому главному вопросу нашего исследования: как составлять задачи?

Составлению задач посвятили свои труды такие ученые, как Д. Пойа, Ю.М. Колягин, П.М. Эрдниев и другие. Однако и у них нет конкретных рекомендаций по составлению задач, даются лишь общие рассуждения, демонстрируемые на частных примерах. Одним из авторов [5] данной монографии разработаны методические рекомендации по составлению задач межпредметного характера на основе графиков и тестов. Таким образом, можно сделать вывод, что проблема составления практических задач на построение не достаточно разработана в научно-методической литературе.

Опираясь на психолого–педагогическую и методическую литературу, и передовой опыт учителей, нами [1, 2], сделана попытка разработать методические рекомендации по составлению задач практического характера, соответствующих задачам на построение.

Механизм составления таких задач может быть описан с помощью следующей последовательности действий:

1. *Выделите геометрические фигуры, о которых идет речь в условии задачи на построение.*
2. *Какую фигуру требуется построить в заключении задачи на построение?*
3. *Определите, как связаны между собой фигуры (отношение, принадлежность и т.п.).*

4. *Поставьте разумные вопросы, связанные с окружающей нас действительностью, в ответах на которые будут использованы данные геометрические фигуры.*
5. *Сформулируйте условие практической задачи.*

Сказанное поясним на примерах.

Возвращаясь к предложенным выше задачам 1–3, рассмотрим, какие геометрические фигуры используются в них, и установим отношения между этими фигурами. В задаче 1 следующие геометрические фигуры: три данные несовпадающие прямые BC, CA, AB и искомая окружность; зависимость – окружность, касающаяся данных прямых. В задаче 2 геометрические фигуры: окружность, точка вне окружности и искомая касательная; зависимость – касательная к окружности, проходящая через данную точку. В задаче 3 геометрические фигуры: прямая a, точка M, не лежащая на ней, и искомая прямая b; зависимость – прямая b, проходящая через точку M перпендикулярно к прямой a.

Например, разумными вопросами к данным задачам могут быть следующие:

– *Образами каких реальных объектов могут служить следующие геометрические фигуры: точки, прямые, окружности?*

– *Какие зависимости между реальными объектами можно заменить отношениями принадлежности, равноудаленности, касания и т.п.?*

Следует отметить, что предложенные вопросы позволяют к одной и той же математической задаче сформулировать несколько практических задач. Например, к задаче 1 можно, кроме предложенной задачи 1', сформулировать еще одну:

Задача 1''. (практическая). *Построить пляж приблизительно круглой формы, прилегающий (касающийся) трех пересекающихся рек.*

Но прежде чем, переходить к составлению и решению задач практического характера, нужно хорошо усвоить тему «Геометрические построения» и научиться решать планиметрические задачи на построение циркулем и линейкой.

Далее приведем задачи практического характера, составленные авторами статьи.

Задача 4. **(математическая).** ***Постройте квадрат, две противоположные вершины которого лежат на прямой p, а две другие – на двух окружностях e и f.***

По условию задачи даны две окружности e, f и прямая p (рис. 1, а).

Анализ: Предположим, что задача решена, искомый квадрат построен (рис. 1, б).

По условию две его вершины A и C лежат на прямой p, а две другие вершины B и D соответственно на окружностях e и f. Так как диагонали квадрата являются его осями симметрии, то вершины B и D симметричны относительно прямой p. Поэтому если найти одну из них, например D, то легко построить точку B.

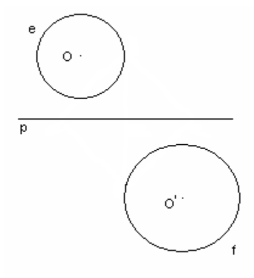


рис. 1, а. Данные окружности

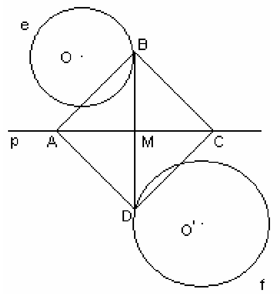


рис. 1, б. Искомый квадрат

Так как точка B лежит на окружности e, то точка D, симметричная точке B, лежит на окружности e_1, симметричной окружности e. Кроме того, точка D по условию лежит на окружности f. Таким образом, точка D – есть точка пересечения двух окружностей e_1 и f. Построив D, можно построить симметричную ей точку B, лежащую на окружности e. Отложив MA=MC=MD (где M – точка пересечения отрезка DB с прямой p), получим искомый квадрат.

Построение:1) Строим окружность, симметричную относительно p (рис. 1, в).

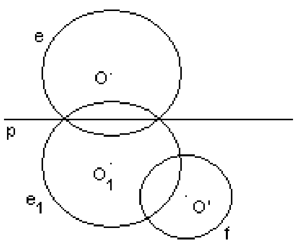


рис. 1, в. Построение симметричной окружности

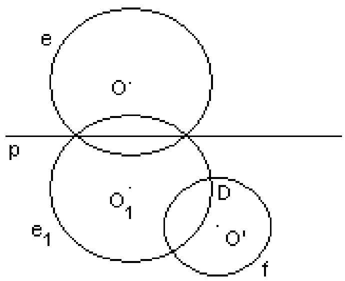


рис. 1, г. Построение точки пересечения

2) Находим точку D пересечения окружностей e_1 и f (рис. 1, г).

3) Проведем DM перпендикулярно p. B – точка пересечения DM с окружностью e (рис. 1, д).

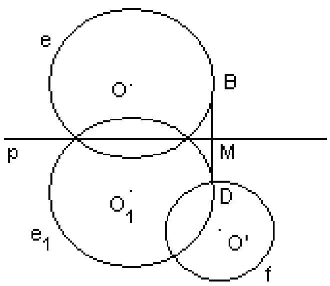


рис. 1, д. Построение перпендикуляра

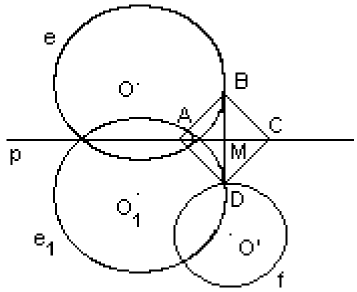
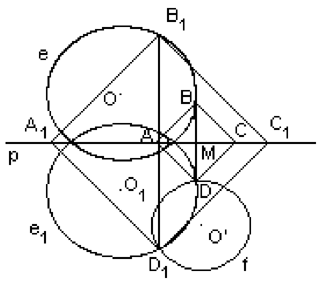


рис. 1, е. Построение искомого квадрата

4) Отложим MA=MC=MD. ABCD – искомый квадрат (рис. 1, е).

5) Взяв вторую точку D_1 пересечения окружностей e_1 и f, аналогично построим второй квадрат $A_1B_1C_1D_1$, удовлетворяющий условию задачи (рис. 1, ж).



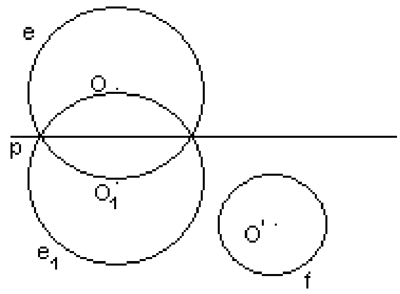


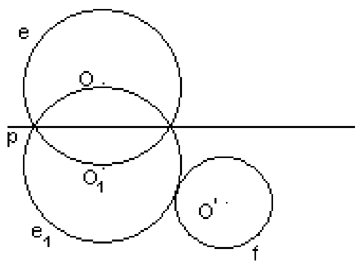
рис. 1, ж. Построение второго квадрата

рис. 1, з. Исследование: нет решений

Доказательство: Диагонали четырехугольника ABCD в точке пересечения делятся пополам. Следовательно, ABCD – параллелограмм. Т.к. AC перпендикулярно BD, то ABCD – ромб. Поскольку AC= BD, то ABCD – прямоугольник. Поэтому ABCD – квадрат. Вершины его удовлетворяют условию задачи. Аналогично $A_1B_1C_1D_1$ – искомый квадрат.

Исследование: а) Окружности e_1 и f общих точек не имеют – решений нет (рис.1, з);

б) Окружности e_1 и f касаются – единственное решение (рис. 1, и).



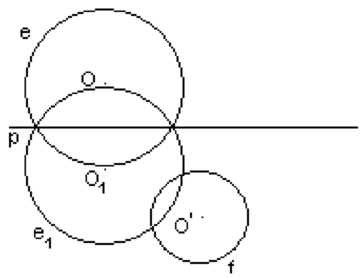


рис. 1, и. Исследование: единственное решение

рис. 1, к. Исследование: два решения

в) Окружности e_1 и f пересекаются – два решения (рис. 1, к).

г) Окружности e_1 и f совпадают (это возможно тогда, когда окружности e и f симметричны относительно p) – искомых квадратов бесконечно много (рис. 1, л).

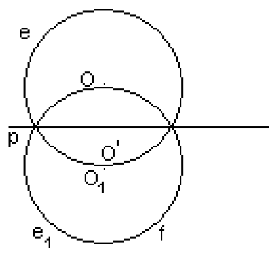


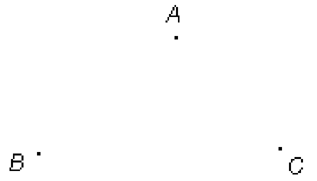
рис. 1, л. Исследование: бесконечное множество решений

К предложенной задаче можно сформулировать аналогичную ей практическую задачу:

Задача 4'. (практическая). *Официанту поручили засервировать стол в ресторане. Между двумя тарелками он положил салфетку ABCD, так что две ее противоположные вершины лежат на прямой, не пересекающей эти тарелки, а две другие – на краях тарелок. Причем точки касания двух вершин салфетки и тарелки известны. Определить местоположение салфетки.*

Задача 5. **(математическая).** ***Построить прямую, равноудаленную от трех данных точек.***

В условии задачи даны три точки A, B, C (рис. 2, а). Требуется построить прямую, равноудаленную от данных точек.



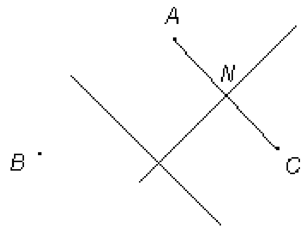


рис. 2, а. Данные точки

рис. 2, б. Искомая прямая

Анализ: Пусть искомая прямая построена. Прямая, равноудаленная от точек A и C, является либо серединным перпендикуляром к AC, либо параллельна прямой AC (рис. 2, б).

Аналогично для точек *A, B* и *B, C*. Прямая равноудаленная от всех точек *A, B, C* или проходит через *P* и *N* – это будет прямая *PN*, или проходит через *P* и параллельна *AC* – это будет прямая *PM*, или проходит через *N* и параллельна *AB* – это будет прямая *NM* (рис. 2, в).

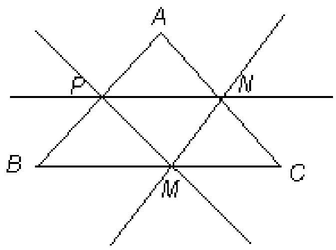


рис. 2, в. Прямые, равноудаленные от данных точек

То есть искомые прямые есть средние линии треугольника *ABC*. Отсюда ясно построение и доказательство.

Исследование: 1) если точки *A, B, C* не лежат на одной прямой, задача имеет три решения; 2) если точки *A, B, C* лежат на одной прямой, то решением будут все прямые, параллельные прямой, содержащей A, B, C, т.е. задача имеет бесконечное множество решений.

К предложенной задаче можно сформулировать аналогичную ей практическую задачу:

Задача 5'. (практическая). *Построить автомобильную трассу так, чтобы путь от трех данных деревень до нее был одинаковым.*

Данного рода работа может идти и в обратном направлении: к предложенной практической задаче сформулировать задачу на построение.

Приведем для примера ряд таких задач без рассмотрения их решения.

Задача 6'. (практическая). *Кукурузное поле имеет квадратную форму. Нужно увеличить посевную площадь в 2 раза под эту культуру, не меняя формы поля.*

Задача 6. **(математическая).** ***Построить квадрат, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата.***

Задача 7'. (практическая). *Нужно построить каркас крыши дома треугольной формы, если известны середины его сторон.*

Задача 7. **(математическая).** ***Построить треугольник, если даны середины его сторон.***

Задача 8'. (практическая). *Две автострады пересекаются под данным углом. На дороге, которая равноудалена от двух шоссе, расположена АЗС. Дорожникам нужно проложить асфальтную дорожку, соединяющую автостраду и проходящую через АЗС, если в плане заранее установлена её длина.*

Задача 8. **(математическая).** ***Дан угол и точка на его биссектрисе. Требуется через данную точку провести прямую так, чтобы точки ее пересечения со сторонами данного угла определили отрезок данной длины.***

В заключении отметим, что предложенный механизм составления геометрических задач на построение с практическим содержанием, способствует лучшему усвоению процесса поиска решения задач в целом и на построение, в частности.

Список литературы

1. Воистинова Г.Х. Обучение решению задач на построение с практическим содержанием: Учебное пособие по курсу теории и методики обучения математике для студентов 4-5 курсов / Г.Х. Воистинова, М.Ю. Солощенко. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2007 – 80 с.
2. Воистинова Г.Х. Решение задач на построение с практическим содержанием: Монография / Г.Х. Воистинова М.Ю. Солощенко. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2013 – 148 с.
3. Из материалов рукописных работ Р.Г. Хазанкина // Математика в школе. – 1987. – № 4. – С. 16.
4. Канин Е.С. Развитие темы задачи // Математика в школе. – 1991. – № 3. – С. 8-12.
5. Солощенко М.Ю. Задачи межпредметного характера в школьном курсе математики: учебное пособие для студ. пед. вузов 3-5-х курсов. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2009. – 171 с.

Рецензенты:

Гусев В.А., д.п.н., профессор, заведующий кафедрой теории и методики обучения математике Московского педагогического государственного университета, г. Москва.

Михайлов П.Н., д.ф.-м.н., профессор, ученый секретарь ГАНУ «Институт прикладных исследований республики Башкортостан», г. Стерлитамак.