УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ В НАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПОД ВЛИЯНИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Сираев Р.Р.

Пермский военный институт внутренних войск МВД России (614112, Пермь, ул. Гремячий Лог, д.1), e-mail: pvivvmvd@mail.ru

Рассмотрена задача о фильтрации в канале, заполненном насыщенной пористой средой, при наличии периодического расхода жидкости. Рассматривается случай, когда внешнее периодическое воздействие имеет высокую частоту по сравнению с гидродинамическими временами, что позволяет применить процедуру осреднения к системе. Получены уравнения, описывающие осредненное течение, возникающее на фоне осциллирующего движения. Вторичное движение возникает под действием вибрационной силы, которая представлена в уравнениях слагаемым с градиентом пористости. На основе уравнений осредненного движения проанализирован фильтрационный поток жидкости в плоском канале с изменяющимся коэффициентом пористости. Получено аналитическое решение данной задачи, из которого следует, что вторичное течение может возникнуть даже при отсутствии постоянного перепада давления. Значительное влияние на формирование и интенсивность осредненного течения оказывают проницаемость и градиент пористости среды, амплитуда и частота периодического воздействия.

Ключевые слова: фильтрация, насыщенная пористая, периодическая воздействие на жидкость, осредненное течение.

FILTRATION FLOW IN A SATURATED POROUS MEDIUM UNDER THE PERIODIC INFLUENCE

Siraev R.R.

Perm Military Institute of Internal Troops MIA of Russia

The subject of this work is a filtration in the channel filled with the saturated porous medium in the presence of a periodic flow rate. We considered the case when the external periodic action has a high frequency compared to the hydrodynamic times that allows applying the averaging procedure to the system. Averaged equations describe the drift that occurs on the background of an oscillating motion. The secondary motion is generated by vibrational force, which has the form of the term with porosity gradient. Based on these equations was analyzed filtration flow of fluid in a plane channel with a variable coefficient of porosity. The problem was solved analytically and it was found that the secondary flow can occur even in the absence of a fixed difference of pressure. Significant influence on the formation and intensity of averaged flow has the porosity gradient and permeability of the medium, the amplitude and frequency of the periodic external influence.

Keywords: filtration, saturated porous medium, periodic external influence, average current.

Введение. Известно, что периодическое воздействие на жидкость часто приводит к возникновению осредненного течения. Природа воздействия может быть различной: периодический расход жидкости в канале, колебания полости с неоднородно нагретой жидкостью, вибрации тел, помещенных в жидкость, периодическое внешнее течение и т.д. Имеется большое количество работ, в которых исследуются осредненные течения, возникающие в обычной жидкости. В то же время малоизученным остается вопрос о влиянии периодического воздействия на фильтрацию жидкости в насыщенной пористой среде. В теоретическом плане проблема интересна тем, что уравнение фильтрации имеет более простой вид по сравнению с уравнением Навье-Стокса, что повышает возможности аналитического исследования. Изучение фильтрации при наличии периодического расхода жидкости представляет интерес с точки зрения технических приложений, например, в нефтедобыче при решении задачи о более эффективной разработке месторождений.

В немногочисленных работах по этой проблеме рассматривались в основном простые модельные задачи, в которых определялись условия возникновения осредненного течения. Отметим работу [1], в которой изучалось одномерное установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости в неоднородном пористом скелете при периодическом воздействии. Получено интегральное соотношение для расхода жидкости, которое затем усреднялось по времени. В результате показано, что наличие неоднородности пористости среды по пространству приводит к возникновению осредненного течения жидкости. Следует отметить, что эффект, исследованный в работе [1], получен для частного случая плоскопараллельного течения. В других ситуациях осредненное течение может реализоваться при иных условиях либо отсутствовать. К настоящему времени пока не предложены уравнения осредненного течения в неоднородной пористой среде.

Целью данной работы является исследование вторичных течений жидкости, обусловленных периодическим расходом жидкости в каналах, заполненных насыщенной пористой средой.

Уравнения фильтрации при наличии периодического воздействия. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в канале, заполненном пористым материалом, физические свойства которого, в частности, коэффициент пористости ε, неоднородны по пространству. Движение жидкости в канале возникает под воздействием перепада давления на входе и выходе канала. На входе канала задан переменный расход жидкости через границу, зависящий от времени по гармоническому закону с частотой Ω и амплитудой скорости $\vec{\mathrm{v}}_0$.

Уравнения, описывающие фильтрацию жидкости, представляют собой уточненную для случая неоднородной среды форму уравнения Форцгеймера и имеют вид (см. [4]):

$$\varepsilon^{-1}\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho_{ж}} - \frac{\nu}{K}\vec{\mathrm{v}} - c_F K^{-1/2}|\vec{\mathrm{v}}|\vec{\mathrm{v}} - \mathrm{v}^2\nabla\left(e^{-2}\right), \qquad div\vec{\mathrm{v}} = 0 \tag{1}$$

где $\vec{\mathrm{v}}$ – скорость фильтрации, $\nu, \rho_{ж}$ – кинематическая вязкость и плотность жидкости, K, e – проницаемость и просветность пористой среды. Часто пытаются связать просветность с коэффициентом пористости. Так, с помощью гранулярной модели С. Слихтером установлено $e = 0.603\varepsilon^{1.38}$ (см. [4]). Однако во многих других исследованиях считается, что просветность по величине равна пористости. Поэтому в дальнейшем полагаем $e = \varepsilon$.

Граничные условия сформулируем на твердой стенке Γ для нормальной к границе компоненты скорости, на входе (in) и выходе (out) канала – для давления и скорости

$$\mathrm{v}_n\big|_\Gamma = 0, \qquad \vec{\mathrm{v}}_{in} = \vec{\mathrm{v}}_0\cos(\Omega t), \qquad p_{in} = p_1, \qquad p_{out} = p_2, \tag{2}$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда внешнее периодическое воздействие имеет высокую частоту по сравнению с гидродинамическими временами, что позволяет применить процедуру осреднения к системе (1).

Для получения осредненных уравнений представим скорость, температуру и давление в виде суммы усредненных $\vec{\mathrm{v}}_1, p_1$ и пульсационных $\vec{\mathrm{v}}_0, p_0$ компонент. Выделяя в уравнениях (1) пульсационные компоненты и, оставляя в них главные по амплитуде слагаемые, получим систему

$$\varepsilon^{-1}\frac{d\vec{\mathrm{v}}_0}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho_ж} - \frac{\nu}{K}\vec{\mathrm{v}}_0, \qquad div\vec{\mathrm{v}}_0 = 0$$

Решения можно записать в виде $\vec{\mathrm{v}}_0 = \mathrm{Re}\left(\vec{w}e^{i\Omega t}\right);\ p_0 = \left(qe^{i\Omega t}\right)$. Уравнение для амплитуды пульсационной скорости имеет вид $\dfrac{i\Omega}{\varepsilon}\vec{w} = -\dfrac{\nabla q}{\rho_ж} - \dfrac{\nu}{K}\vec{w}$. Удобно изменить масштаб переменной w, выделив из нее множитель $\varepsilon/\left(\varepsilon + i\Omega K/\nu\right)$

$$\vec{w} = -\frac{K}{\nu}\frac{\nabla q}{\rho_ж}$$

В результате нормировки поле w становится вещественным, так как поле q вещественно вследствие дивергентности w.

Уравнения для усредненных величин выводятся с использованием процедуры осреднения по времени системы уравнений (1). В уравнении фильтрации жидкости не учитывается слагаемое с ускорением ввиду его малости. Среднее от последних двух слагаемых в правой части вычисляется следующим образом

$$\overline{c_F K^{-1/2}\left|\vec{\mathrm{v}}\right|\vec{\mathrm{v}}} = c_F K^{-1/2}\left(\left|\vec{\mathrm{v}}_1\right|\vec{\mathrm{v}}_1 + \overline{\left|\vec{\mathrm{v}}_0\right|\vec{\mathrm{v}}_0}\right) = c_F K^{-1/2}\left|\vec{\mathrm{v}}_1\right|\vec{\mathrm{v}}_1$$

$$\overline{\mathrm{v}^2\nabla\left(\varepsilon^{-2}\right)} = \left(\mathrm{v}_1^{\ 2} + \overline{\mathrm{v}_0^{\ 2}}\right)\nabla\left(\varepsilon^{-2}\right) = \left(\mathrm{v}_1^{\ 2} + \frac{w^2}{2}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\omega^2}\right)\nabla\left(\varepsilon^{-2}\right)$$

где $\omega = \Omega K/\nu$ и черта над выражением означает осреднение по времени. Опустим члены, нелинейные по скорости фильтрации $\vec{\mathrm{v}}_1$, ввиду их малости: предполагаем, что осредненная скорость мала по сравнению с амплитудой пульсационной компоненты скорости $\vec{w}$. В результате получим систему

$$\frac{\nabla p_1}{\rho_ж} = -\frac{\nu}{K}\vec{\mathrm{v}}_1 - \frac{w^2}{2}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\omega^2}\nabla\left(\varepsilon^{-2}\right), \qquad div\vec{\mathrm{v}}_1 = 0 \tag{3}$$

$$\vec{w} = -\frac{K}{\nu}\frac{\nabla q}{\rho_{ж}}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{w} = 0. \tag{4}$$

Уравнения (3)-(4) описывают осредненное течение, возникающее на фоне осциллирующего движения. Вторичное движение возникает под действием вибрационной силы, которая представлена в уравнениях слагаемым с градиентом пористости.

Перейдем к безразмерным переменным. Обозначим характерный размер канала (например, его длину) L. Выберем в качестве единиц измерения расстояния, скорости, давления, а также пульсационных компонент скорости и давления соответственно $L,\ \mathrm{v}_0,\ \rho_{ж}\mathrm{v}_0^2,\ \mathrm{v}_0,\ \rho_{ж}\mathrm{v}_0\dfrac{\nu\cdot L}{K}$. Опустим индекс '1' у величины p_1 и переобозначим v_1 в $\vec{u}$. Уравнения фильтрации примут следующий вид

$$\nabla p = -\frac{\vec{u}}{\mathrm{Re}_m} - \frac{w^2}{2}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\omega^2}\nabla\left(\varepsilon^{-2}\right), \qquad div\vec{u} = 0 \tag{5}$$

$$\vec{w} = -\nabla q, \qquad \mathrm{div}\,\vec{w} = 0 \tag{6}$$

Граничные условия в безразмерных переменных имеют вид

$$u_n\big|_{\Gamma} = 0,\ \ w_{\mathrm{n}}\big|_{\Gamma} = 0,\ \ w_{in} = 1,\ \ p_{in} = p_1,\ \ p_{out} = p_2. \tag{7}$$

Краевая задача (5)-(7) содержит два безразмерных параметра – число Рейнольдса и безразмерную частоту

$$\mathrm{Re}_m = \frac{v_0 K}{\nu L}, \qquad \omega = \frac{\Omega K}{\nu}. \tag{8}$$

Как правило, значения коэффициента проницаемости очень малы: $K \cong 10^{-8} \div 10^{-15}$ м^2. Следовательно, число Рейнольдса – малая величина, и сделанное ранее предположение, что осредненная скорость мала по сравнению со значениями переменной $\vec{w}$, верно.

Помимо указанного ограничения частоты снизу, связанного с применимостью метода осреднения, имеется также ограничение по частоте сверху, обусловленное использованием модели несжимаемой жидкости (длина звуковой волны должна быть намного больше характерного размера). Таким образом, частота вибрации должна удовлетворять неравенствам

$$\mathrm{v}_0/L << \Omega << c/L, \tag{9}$$

где c – скорость звука.

Плоскопараллельный фильтрационный поток. Рассмотрим одномерное движение жидкости – плоскопараллельный поток вдоль оси x декартовой системы координат. Он описывается уравнениями:

$$p' = -\frac{u_x}{\mathrm{Re}_m} - \frac{w_x^2}{2}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\omega^2}\left(\varepsilon^{-2}\right)', \quad w_x = -q', \quad w' = 0, \quad u' = 0 \qquad (10)$$

В уравнениях (10) штрих означает производную по координате x. На входе $x = x_1$ и на выходе $x = x_2$ канала выполняются граничные условия (7). Решение данной задачи имеет вид

$$u_x = \mathrm{Re}_m\left(p_1 - p_2 + \frac{1}{2\omega^2}\ln\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}\frac{\omega^2+\varepsilon_1^2}{\omega^2+\varepsilon_2^2}\right)\right)\Big/\left(x_2 - x_1\right) \qquad (11)$$

Предположим, что рассматриваемый канал состоит из двух частей: прямолинейного участка насыщенной пористой среды между точками $x = x_1$, $x = x_2$ и, замыкающего его, жидкого контура с низким сопротивлением. В этом случае внешний градиент давления отсутствует: $p_1 = p_2$. Тем не менее, если на входе и выходе канала пористость среды различна, возникает осредненное течение жидкости с постоянной скоростью, направленной в сторону увеличения пористости. Величина скорости зависит от проницаемости и градиента пористости среды, амплитуды и частоты периодического воздействия.

Приведем оценку величины осредненной скорости. Допустим канал длиной 10^{-1} м заполнен пористым материалом с постоянной проницаемостью 10^{-8} м^2 и неоднородной пористостью, меняющейся по линейному закону от значения 1/3 на левой границе до значения 2/3 на правой границе. Пористый материал канала насыщен водой при температуре 25°C; амплитуда пульсации скорости на входе в канал 10^{-2} м/с, частота – 1 Гц. В этом случае модифицированное число Рейнольдса равно 10^{-3}. Безразмерная осредненная скорость в отсутствие разности давлений $p_1 - p_2$, согласно выражению (11), равна $3{,}37\cdot10^{-2}$, а размерная скорость – $3{,}37\cdot10^{-4}$ м/с, что составляет примерно 3,4% от амплитуды периодического воздействия. Неравенства (9) дают следующие ограничения на частоту $0.1\,\text{Гц} \ll \Omega \le 3300\,\text{Гц}$. Скорость осредненного течения пропорциональна проницаемости среды и убывает по квадратичному закону с ростом длины канала.

Заключение. Результаты работы свидетельствуют о существенном влиянии неоднородности характеристик пористой среды на ее гидродинамику. При наличии периодического движения жидкости в неоднородной пористой среде возникает вторичное течение, направленное в сторону увеличения пористости. Расчет этого течения можно выполнить с помощью уравнений, полученных в данной работе.

Список литературы

1. Ганиев О.Р. Влияние периодического воздействия на осредненное течение в неоднородной пористой среде, насыщенной жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. – 2006. - №2. – С. 98-104.

2. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород. – Л.: Недра, 1985. – 240 с.

3. Сираев Р.Р. Фильтрация жидкости в неоднородной пористой среде // Труды XVI Зимней школы по механике сплошных сред (механика сплошных сред как основа современных технологий (Электронный ресурс) – Пермь: ИМСС УрО РАН, 2009. – Электрон. оптич. диск. (CD).

4. Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. – N.Y. etc.: Springer, 1992.

5. Siraev R. Theoretical investigation of incompressible fluids and gases in heterogeneous porous medium // Proceedings of the XXXVI Summer School APM'2008. – S.-Peterburg, 2008. – P. 600-606.

Рецензенты:

Тарунин Е.Л., д.ф.-м.н., профессор, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь.

Смородин Б.Л., д.ф.-м.н., профессор, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь.