УДК 519.86

МОДЕЛЬ НЕЙМАНА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПРОПОРЦИЙ РОСТА ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Севодин М.А.

Пермский Национальный Исследовательский Политехнический Университет

В работе исследуется модель замкнутой экономики неймановского типа. Рассматриваются ситуации, в которых ограничения пропорций роста интенсивностей базовых производственных процессов приводят к сужению производственного множества, что может быть объяснено причинами производственного, экономического, политического характера. Исследуется случай, когда вектор интенсивностей принадлежит выпуклому замкнутому конусу из неотрицательного ортанта пространства. Описываются свойства некоторых характеристик таких экономик. Устанавливается существование невырожденного равновесия и стационарной траектории. Равновесие понимается в модифицированном виде: в некоторых отраслях допускается нарушение правила нулевого дохода. Оказывается, что такая модель равновесия также определяет состояние экономики, которое существенно зависит от принятой схемы распределения интенсивностей производственных процессов, порядка регулирования ценностных переменных и ресурсных потоков.

Ключевые слова: экономика, производственное множество, ограничения роста, равновесие, траектория.

THE MODEL OF NEUMANN CONSTRAIN THE PROPORTIONS OF INCREASING INTENSITY OF PRODUCTION PROCESSES

Sevodin M.A.

Perm National Research Polytechnic University

The subject of this paper is the model of a closed economy Neumann type. We consider situations in which constrain the proportions of the growth of the intensities of the basic production processes lead to a narrowing of the production of the set, which can be explained by reasons of industrial, economic, political type. The case is when the intensity vector belongs to a closed convex cone of non-negative orthant. The properties of some of the characteristics of these economies are described. Establish the existence of a non-degenerate equilibrium and stationary trajectory. Equilibrium is understood in a modified form: in some industries may be violating the rule of zero income. It turns out that this model also determines the equilibrium state of the economy, which depends strongly on the adopted scheme of the intensity distribution of production processes, the order of values of variables and control of resource flows.

Keywords: economy, production set, growth restrictions, balance, traectory.

Введение. Известно [2], [3], что экономика описывается динамической моделью фон Неймана при выполнении следующих условий: постоянство масштаба; возможность воспроизводства в любых количествах первичного фактора производства; соответствие уровня заработной платы уровню прожиточного минимума; инвестирование всего полученного дохода в пределах рассматриваемой экономики и т.д. Особый интерес здесь вызывают требования к производственному процессу. Целью процесса является преобразование уровней запасов некоторых продуктов, имеющихся к началу периода, в некоторые другие уровни запасов к концу этого периода. Для достижения этой цели основные процессы экономики можно комбинировать произвольным образом, добиваясь тем самым повышения эффективности процессов [4]. Это свойство в экономической теории обычно принимается без ограничений, хотя понятно, что в действительности оно должно часто нарушаться. Так происходит и в силу причин технологического характера (например, развитие двух влияющих друг на друга отраслей), и в силу политического устройства экономики (например, решение управляющего органа о приоритетном развитии какой-нибудь отрасли), и в силу, наконец, причин экономического характера (например, влияние отраслей друг на друга в силу действия различных конкурентных сил). Поэтому в исследованиях подобного рода естественно дополнительно накладывать или допускать условия, связанные с ограничениями пропорций основных отраслей экономики. Исследованию сформулированной проблемы и посвящена данная работа. При этом требования к пропорциям между процессами накладываются в виде принадлежности интенсивностей отраслей некоторому конусу. В работе устанавливается, что если определенным образом модифицировать понятие равновесия, то можно доказать, что оно существует и в таких условиях и, кроме того, при этом сохраняются известные свойства характеристик рассматриваемых экономик.

Модель экономики. Напомним сначала основные предположения, используемые в динамических моделях неймановского типа. Рассмотрим экономику (производство), описываемую парой (G,T), где G - пространство товаров, T - множество производственных процессов. Пусть имеющиеся в производстве n типов продуктов-затрат с помощью m технологических процессов превращаются в n типов продуктов-выпусков. Тогда G представляет собой неотрицательный ортант R_+^n n-мерного векторного пространства R^n. Множество T состоит из линейных неотрицательных комбинаций m базисных процессов $Q_1,\dots,Q_m$, функционирование которых описывается парой векторов из множества G: $Q_j=\left(a_j,b_j\right)$. Это значит, что процесс Q_j при единичной интенсивности своей работы затрачивает набор продуктов $a_j=\left(a_{1j},\dots,a_{nj}\right)$ и производит набор товаров $b_j=\left(b_{1j},\dots,b_{nj}\right)$, где a_{ij},b_{ij} - количества продукта с номером i, $j=1,2,\dots,m$. По своему смыслу векторы $a_j,b_j\in R_+^n$, $j=1,2,\dots,m$.

Таким образом, $T=\left\{\tau=\left(x,y\right)\mid x=Az,\ y=Bz,\ z\ge 0\right\}$, где линейные операторы A и B задаются матрицами затрат $A=(a_{ij})$ и выпусков $B=(b_{ij})$, которые определяются равенствами

$$\sum_{j=1}^{m} z_j Q_j=\left(\sum_{j=1}^{m} z_j a_j,\ \sum_{j=1}^{m} z_j b_j\right)=\left(Az,\ Bz\right), \qquad (1)$$

причем $z_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,m,\ z = \left(z_1,\ldots,z_m\right)$. Компоненты z_j векторов z называют интенсивностями, с которыми базисные процессы Q_j участвуют в производственном процессе $\left(Az, Bz\right)$. Будем считать, что вектор интенсивностей z принадлежит некоторому замкнутому выпуклому конусу $Z \subset R_+^n$. Пусть также внутренность конуса Z не является пустым множеством.

Будем говорить (ср. [3]), что рассматриваемая модификация модели фон Неймана находится в состоянии динамического равновесия, описываемого параметрами $\left(\nu, z, \mu, p\right)$, где ν, μ - положительные числа, $z \in Z,\ p \in R_+^n$, если выполнены следующие две группы условий.

1^0. $\left(B - \nu A\right) z \geq 0, \left(B - \mu A\right) z = 0,\ p\left(B - \nu A\right) z = 0.$

2^0. Существует по крайней мере одно $j_0, 1 \leq j_0 \leq m,$, с которым выполняется неравенство $pb_{j_0} - \mu pa_{j_0} \leq 0$.

Здесь операторы A, B определены в (1).

Содержательный смысл параметров ν, z, μ, p заключается в следующем: в состоянии динамического равновесия производство всех продуктов остается в неизменной пропорции, хотя общий объем растет в геометрической прогрессии со знаменателем ν. Цены же на продукты остаются также в неизменной пропорции, но они должны падать также в геометрической прогрессии со знаменателем μ. Пропорции, в которых производятся продукты, определяются вектором z, а пропорции цен – вектором цен p. Отметим здесь также то, что по сравнению с обычной моделью фон Неймана правило нулевого дохода $p'A - \mu p'B \leq 0$ может здесь не выполнятся, требуется (условие 2) его выполнение не глобально в каждой отрасли, а по крайней мере в одной.

Известно, что фон Нейман [6] доказал существование динамического равновесия при определенных условиях на матрицы A, B. Затем эти условия модифицировались различными авторами (см. [3]). С экономической точки зрения самыми подходящими требованиями здесь являются [5] условие неотрицательности матриц A и B и отсутствие в этих матрицах нулевых строк и нулевых столбцов соответственно. В настоящей работе также предполагается выполнение названных свойств у матриц A и B.

Итак, требования к рассматриваемой в данной статье экономике сформулированы. Докажем при таких условиях существование равновесия.

Существование равновесия. Изучим подробнее строение технологического множества T. Прежде всего заметим, что множества T, X, Y являются выпуклыми конусами в силу линейности операторов A, B.

Для того, чтобы сформулировать следующие свойства множества T, приведем модификации некоторых известных понятий [3]. Технологическим темпом роста модели экономики на луче $\lambda z,\, z \in Z,\, z \neq 0$, называется функция $\alpha(z) = \max\limits_{\alpha Az \le Bz} \alpha$. Число $\alpha_M = \sup\limits_{z \in Z} \alpha(z)$ называется технологическим темпом роста модели Неймана. Процесс $c = (x, y),\, x = Az,\, y = Bz,$ является оптимальным, если $\alpha(x, y) = \alpha(z) = \alpha_M$.

Говорят [3], что продукт $g_j\,(\in G)$ перепроизводится процессом $(x, y),\ x = (x_1, \ldots, x_n),\, y = (y_1, \ldots, y_n)$, если $y_j / x_j > \alpha_M$.

Лемма 1. Если какие-либо продукты перепроизводятся некоторыми оптимальными процессами, то существует оптимальный процесс, производящий сразу все такие продукты.

Доказательство. Отметим, что множество оптимальных процессов представляет собой выпуклое множество. В самом деле, если $\alpha(z^1) = \alpha(x^1, y^1) = \alpha_M$, $\alpha(z^2) = \alpha(x^2, y^2) = \alpha_M$, то есть $\alpha_M x^i \le y^i,\, i = 1, 2,$ то в силу выпуклости множеств X и Y получим, что $(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) \in X$, $(\lambda_1 y^1 + \lambda_2 y^2) \in Y$ и $\alpha_M (\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) \le \lambda_1 y^1 + \lambda_2 y^2,\, \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\, \lambda_1, \lambda_2 \ge 0$. Значит, $\alpha(\lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2) \ge \alpha_M$, откуда $\alpha(\lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2) = \alpha_M$ по определению α_M.

Возьмем два оптимальных процесса $(x^i, y^i),\, i = 1, 2$, перепроизводящих продукты g_{j_1} и g_{j2}. В силу выпуклости множества оптимальных процессов середина g_c отрезка $\left[(x^1, y^1), (x^2, y^2)\right]$ также является оптимальным процессом. Проверка того, что процесс g_c перепроизводит продукты g_{j_1} и g_{j2}, тривиальна. Итак, если два оптимальных процесса перепроизводят два продукта, утверждение леммы справедливо. В случае большего числа продуктов вышеприведенные рассуждения нужно повторять соответствующее число раз, последовательно объединяя оптимальные процессы. Лемма 1 доказана.

Пусть φ - проекция пространства R^n на пространство $R^k, k \le n$. Определим проекцию $T\varphi$ равенством $\tau\varphi = (x, y)\varphi = (x\varphi, y\varphi)$.

Лемма 2. Проекция $T\varphi$ множества T является замкнутым выпуклым конусом.

Доказательство. Утверждение следует из линейности операторов A, B и того, что множество Z есть конус.

Лемма 3. В приведенных условиях модели технологический темп роста α_M удовлетворяет условиям $0 < \alpha_M < \infty$ и реализуется на некотором процессе $\overline{\tau} \in T$.

Доказательство. Заметим сначала, что если α_M существует, то оно больше нуля. В самом деле, воспользуемся не пустотой внутренности множества Z. Возьмем положительный вектор $e \in Z$. Для процесса $\tau = (Ae, Be)$ в силу положительности сумм строк матриц A, B имеем $\alpha(e) > 0$; отсюда вытекает $\alpha_M > 0$.

Рассмотрим теперь функцию $\alpha(z)$ на неотрицательном ортанте R_+^n. Она определена в каждой точке $z \ge 0, z \ne 0$, так как в силу свойств оператора A в таких точках $Az \ne 0$. Также как обычно [1], можно показать, что эта функция ограничена и полунепрерывна сверху на $R_+^n \setminus \{0\}$. Отсюда следуют те же свойства для функции $\alpha(z)$, рассматриваемой уже только на множестве Z. Значит, существует процесс τ такой, что $\alpha(\tau) = \alpha_M$. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует существование (по крайней мере одного) характеристического процесса $\tau^* = (x^*, y^*)$ для множества T. Пусть

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*),\ y^* = (y_1^*, \dots, y_k^*, y_{k+1}^*, \dots, y_n^*), \qquad (2)$$

где $\alpha_M x_j^* = y_j^*,\ j = 1, \dots, k;\ \alpha_M x_j^* < y_j^*,\ j \ge k+1.$

Определим проекцию φ пространства R^{2n} на пространство R^{2k}: $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)\varphi = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k)$. В силу лемм 2,3 существует технологический темп роста рассматриваемой модели экономики, определяемый множеством $T\varphi$, который будем обозначать $\alpha_{M\varphi}$.

Лемма 4. Имеет место равенство $\alpha_{M\varphi} = \alpha_M$. Существует такой процесс $\tau^* = (x^*, y^*)$, что $\alpha(\tau^*\varphi) = \alpha_M$, причем на множестве $T\varphi$ у процесса $\tau^*\varphi$ нет перепроизводства, то есть выполняется соотношение $y^*\varphi = \alpha_M x^*\varphi$.

Доказательство леммы получается дословным повторением аналогичного утверждения из [1].

Нужные свойства технологического множества T получены. Докажем существование динамического равновесия. Имеет место

Теорема 1. Пусть α_M - технологический темп роста модели. Тогда существует решение системы условий 1^0, 2^0, обладающее следующими свойствами:

$$p'Bz > 0, \tag{3}$$

$$\nu z a^j < z b^j \Rightarrow p_j = 0, \tag{4}$$

$$\mu a_i p > b_i p \Rightarrow z_i = 0, \tag{5}$$

$$\nu = \mu. \tag{6}$$

Доказательство. По условиям теоремы в силу леммы 3 существует технологический темп модели число α_M. Рассмотрим множество $U = \{u \mid u = \alpha_M x\varphi - y\varphi, (x, y) \in T\}$. Оно, очевидно, является замкнутым выпуклым конусом. Из леммы 4 следует, что множество U может иметь с неотрицательным ортантом R_+^k самое большее одну общую точку $u = 0$. Итак, к множеству U, как к выпуклому и непересекающемуся с R_+^k множеству, можно применить теорему отделимости [3]. По этой теореме получим, что в пространстве R^k существует вектор $p = (p_1, \dots, p_k)$, $p_i > 0, i = 1, \dots, k$, такой, что $(u, p) \geq 0$ для всех векторов u из множества U. Обозначим через p^* n-мерный вектор, который образуется дополнением вектора p нулями до размерности n. Пусть также x^*, y^* векторы, введенные равенствами (2) и образующие характеристический процесс, а $z^*, z^* \in Z$, - соответствующий им вектор интенсивностей. Тогда

$$p^{*\prime} y^* > 0, \alpha_M p^{*\prime} x^* = p^{*\prime}, \alpha_M x^* \leq y^*, (p^*, \alpha_M x - y) \geq 0,$$

где $(x, y)(\in T)$ произвольны. Отсюда следуют следующие соотношения:

$$p^{*\prime}Bz^{*} > 0, \alpha_M p^{*\prime}Az^{*} = p^{*\prime}Bz^{*}, \alpha_M Az^{*} \le Bz^{*}.$$

Положим $\nu = \mu = \alpha_M$. Равенство (6) теперь вытекает из определения α_M, а соотношение

$$p^{*\prime}\left(\alpha_M A - B\right)z^{*} = 0$$

позволяет говорить о справедливости условий (4), (5). Так как при $z \in Z$

$$\left(z, \alpha_M Ap^{*} - Bp^{*}\right) = \left(p^{*}, \alpha_M x - y\right) \ge 0,$$

то в силу $z \in Z \subset R_{+}^{n}$ для всех $j,\ j = 1, 2, \ldots, m,$ не могут выполняться неравенства $pb_j - \mu pa_j \le 0$. Теорема доказана.

Отметим, что равновесие, существование которого доказано в теореме 1, удовлетворяет соотношению $p^{*\prime}Bz^{*} > 0$. В таких случаях [1] равновесие называют невырожденным. Кроме того, выполнение равенства $\alpha_M p^{*\prime}Az^{*} = p^{*\prime}Bz^{*}$ говорит о существовании стационарных траекторий интенсивностей и цен: $z_t^{*} = \alpha_M^{t} z^{*},\ p_{t+1} = p/\alpha_M^{t}$.

Выводы. Модель экономики неймановского типа, описанная выше, является естественным обобщением модели Неймана: обобщение заключается в том, что допускаются ограничения на интенсивности базовых производственных процессов. Последнее является важным ослаблением традиционно используемых в таких моделях требований к технологическим множествам. С точки зрения экономики новые условия позволяют допускать такие, например, эффекты, как наличие управляющего органа в экономике, который ограничивая интенсивности базовых процессов, добивается поставленных целей. Накладывая на матрицы выпуска и затрат фактически те же требования, что и ранее в модели Неймана, при определенных свойствах множества интенсивностей удалось показать, что динамическое невырожденное равновесие в такой модели существует, существуют также стационарные траектории интенсивностей и цен. Необходимо также отметить, что при достижении выше указанного равновесия может нарушаться правило нулевого дохода. Если это происходит, то не во всех сразу отраслях, а только лишь в некоторых.

Список литературы

1. Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике. М.: Изд-во МГУ, 1980. 199 с.

2. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост. М.: Наука, 1972. 280 с.
3. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 519 с.
4. Самуэльсон П. Экономика. М.: Прогресс, 1964. 183 с.
5. Kemeny J.G., Morgenstern O., Thompson G.L. A generalization of the von Neumann model jf an expanding economy // Econometrica. –1956. - V. 24, №2. – P. 115-135.
6. Von Neumann J. A model of general economic equilibrium // Rev. Econ. Studis. – 1945. №13. – P. 1-9.

Рецензенты:
Роговой А.А., д. ф.-м.н., профессор, зам директора Института механики сплошных сред уральского отделения Российской академии наук, г.Пермь.
Перский Ю.К., д.э.н., профессор, профессор кафедры «Менеджмент и маркетинг» Пермского национального исследовательского политехнического университета, г.Пермь.