УДК 510

МОДЕЛЬ ОДНОМЕРНОГО НЕЧЕТКОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Марков Б. Г., Марков О. Б., Воронов Р. В.

ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет», Петрозаводск, Россия (185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33), e-mail: markov@psu.karelia.ru

В статье предлагается модификация проективной геометрии. Рассматриваемая модификация геометрии учитывает представление информации, с одной стороны, как случайных величин, подчиненных нормальному закону распределения ошибок, с другой стороны, как нечетких множеств. Вводятся основные понятия. Описывается одномерная нечеткая проективная геометрия. Основным объектом одномерного проективного пространства является нечеткая точка, основным отношением – принадлежность. Проективная прямая содержит одну несобственную нечеткую точку. Сформулированы определения одномерной нечеткой проективной геометрии. Приводятся примеры. Сформулированные предложения по теории нечеткой проективной геометрии дают возможность разработать ряд алгоритмов решения задач геометрического моделирования утраченных памятников архитектуры по их перспективным изображениям. Применение нечеткой проективной геометрии и статистической обработки результатов опытов при учете неравноточности измерений позволяет увеличить достоверность результатов восстановления.

Ключевые слова: нечеткая проективная геометрия, нечеткая точка, геометрическое моделирование.

THE MODEL OF ONE-DIMENSIONAL FUZZY PROJECTIVE SPACE

Markov B. G., Markov O. B., Voronov R. V.

«Petrozavodsk State University», Petrozavodsk, Russia (33, Lenin Str., 185910, Petrozavodsk, Republic of Karelia, Russia), e-mail: markovob@yandex.ru

The paper proposes a modification of projective geometry. A modification of the geometry allows for the presentation of information on the one hand as random variables, subordinates normal distribution of errors, on the other hand as fuzzy sets. Introduces the basic concepts. Describes a one-dimensional fuzzy projective geometry. The main object of a one-dimensional projective space is a fuzzy point, the basic attitude - an accessory. Projective line contains one improper fuzzy point. Formulated dimensional fuzzy definition of projective geometry. Examples are given. Formulated proposals on the theory of fuzzy projective geometry, give the opportunity to develop a number of algorithms for solving geometric modeling monuments lost their perspective images. Application of fuzzy projective geometry and statistical processing of the experimental results, taking into account unequal measurements can increase the accuracy of the recovery results.

Keywords: fuzzy projective geometry fuzzy point, geometric modeling.

Введение

При геометрическом моделировании часто исходная информация имеет вид случайных величин, подчиненных нормальному закону распределения ошибок. Фиксация и обработка такой информации рассматриваются в теории вероятностей и теории нечетких множеств. Классическая проективная геометрия не учитывает ошибки, отклонения от перпендикулярности, параллельности или прямолинейности. Она использует идеальные точки и прямые. Для повышения точности моделирования требуется учитывать особенности исходной информации. Поэтому требуется модификация проективной геометрии, учитывающая свойства нечеткой геометрической информации.

Основные понятия

Особенностью проективного пространства является [5] то, что для него справедливы следующие утверждения:

а) каждая прямая проективного пространства содержит одну бесконечно удаленную точку;

б) каждая плоскость содержит одну бесконечно удаленную прямую;

в) проективное пространство в целом содержит одну бесконечно удаленную плоскость.

Для краткости бесконечно удаленные элементы будем дальше называть несобственными.

Основные объекты и основные отношения нечеткой проективной геометрии выражаются терминами «нечеткая точка», «нечеткая прямая», «нечеткая плоскость», «принадлежность». Точка представляется эллиптической областью, центр которой является ее номинальным положением, а границей – заданная ошибка (рис 1), описываемая нормальным законом распределения. Собственная двухмерная нечеткая точка изображается в виде эллипса рассеивания, который задается пятью параметрами: центр эллипса – m_x, m_y, угол наклона большой оси эллипса к оси абсцисс (0X) – α, большой и малой полуоси эллипса $-.\sigma_A, \sigma_B$. Этот эллипс представляет собой область, где данная точка может находиться с заданной вероятностью. Прямая – это область, ограниченная ветвями гиперболы, где она может находиться с заданной вероятностью. Номинальное положение прямой – мнимая ось гиперболы [3]. Мнимая ось гиперболы проходит через центры эллиптических областей, представляющих точки. Любой геометрический элемент представлен нечеткой областью. Пересечение нечетких элементов есть нечеткий элемент. Например, точкой пересечения пары прямых является точка-область, где эта точка пересечения может появиться с заданной вероятностью.

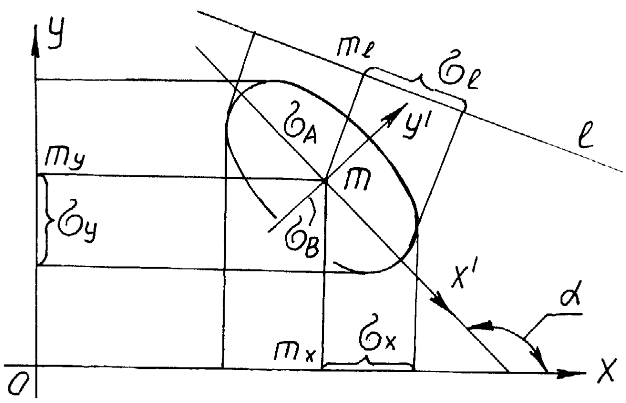

Рис.1. Собственная двухмерная нечеткая точка

Результаты построения точки схода (точки – области) обрабатываются методами математической статистики. Но прежде чем переходить к операциям с двухмерной нечеткой проективной геометрией, следует рассмотреть одномерную.

Одномерная нечеткая проективная геометрия

Это геометрия в пространстве, имеющем одно измерение, например, на прямой линии. Основным объектом одномерного проективного пространства является нечеткая точка, основным отношением – принадлежность. Проективная прямая содержит одну несобственную нечеткую точку.

Пусть T_i^1 – одномерная собственная точка,

$\overline{T}^{1\infty}$ – дополнение одномерной несобственной точки.

Одномерная точка называется собственной, если находится на конечном расстоянии от начала координат, и несобственной, соответственно, если находится в бесконечности. Собственная точка $T^1(m,\sigma)$ задается двумя параметрами: m – математическое ожидание и σ – среднее квадратичное отклонение. Несобственная точка $\overline{T}^{1\infty}(m_0,\sigma_S)$ задается своим дополнением: m_0 – математическим ожиданием в начале координат и σ_S – среднее квадратичное отклонение.

В прикладных задачах, как правило, σ_S – достаточно большое число, выбираемое в зависимости от условий задачи (например, $\sigma_S = \pm 10^5 \, мм$).

Принимаем, что закон распределения координат точки есть нормальный закон распределения (рис. 2), который характеризуется плотностью вероятности вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1)$$

где m – математическое ожидание или центр рассеивания,

σ – среднее квадратичное отклонение.

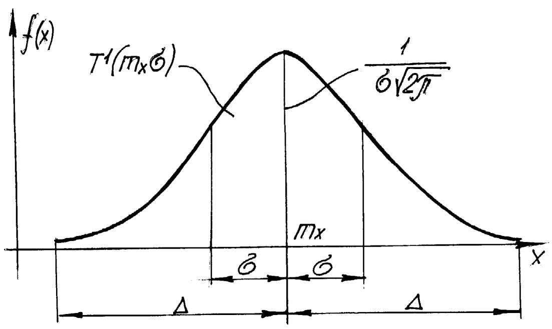

Рис. 2. Нормальный закон распределения координат точки

Учитывая общее требование к точности, в качестве величины математического ожидания принимается номинальное значение точки, а в качестве величины σ принимаем величину $\sigma = \frac{\Delta}{3}$, где Δ – заданный допуск измерения. При этом согласно правилу 3 сигм, только 0.27 % реальных отклонений превысят заданный допуск Δ.

Данная гипотеза является общепринятой в экспериментальных исследованиях [1].

Чтобы применить общий подход теории нечетких множеств, рассмотрим в качестве универсального множества

$$U = \{u : -\infty < u < \infty\}. \quad (2)$$

В качестве функции принадлежности, учитывая нормальный закон распределения рассматриваемых в работе величин, целесообразно выбрать функцию

$$\mu(u) = e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} \; \forall (u \in U). \quad (3)$$

Нечеткой точкой с параметрами (m, σ) на прямой называется подмножество $T^1 \subset U$ такое, что

$$\mu_{T^1}(u) = e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} \geq 0.5, u \in U. \quad (4)$$

Подмножество T^1 также называется нечетким подмножеством, соответствующим нечеткой точке с параметрами (m, σ).

Легко установить, что функция принадлежности изменяется в интервале [0,1] и ставит в соответствие каждому элементу $u \in U$ число $\mu(u)$ из интервала [0,1] (рис. 3).

Рис. 3. Собственная одномерная нечеткая точка

Точками перехода, то есть значениями, u для которых $\mu_{T^1}(u) = 0.5$, являются

$$u_1 = m - 1.15\sigma, \; u_2 = m + 1.15\sigma. \quad (5)$$

Из (2) следует также, что максимальное значение функции принадлежности достигается при u=m, то есть

$$\sup_u \mu_{T^1}(u) = 1. \qquad (6)$$

Из (4) следует простое условие принадлежности

$$u_1 \le u \le u_2, \qquad (7)$$

где u_1, u_2 – точки перехода (5).

Несобственная нечеткая точка $T^{1\infty}$ задается своим дополнением $\overline{T}^{1\infty}(m_0, \sigma_S)$. Принимая это во внимание, сформулируем определение.

Нечеткой несобственной точкой на прямой называется подмножество $T^{1\infty} \subset U$ такое, что

$$\mu_{T^{1\infty}}(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{2S^2}} \ge 0.5 \quad u \in U, \qquad (8)$$

где $\mu_{T^{1\infty}}(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{2S^2}} \forall (u \in U)$ – функция принадлежности нечеткому множеству $T^{1\infty}$ (нечеткая несобственная точка) (рис 4).

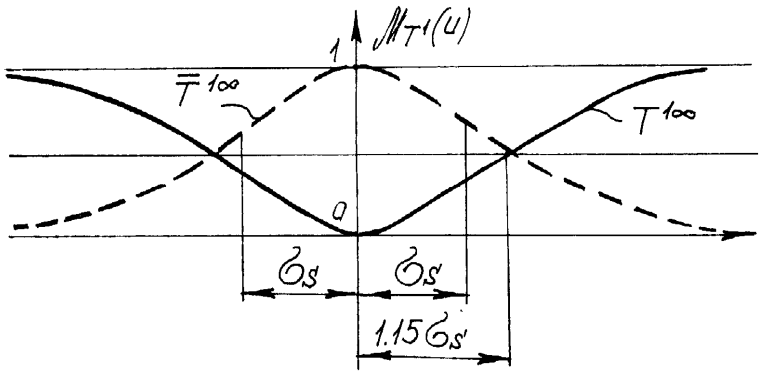

Рис. 4 Несобственная нечеткая одномерная точка и ее дополнение

Точками перехода этого множества является

$$u_{1,2} = \pm 1.15\sigma_S, \qquad (9)$$

высота нечеткого множества равна

$$\sup_u \mu_{T^{1\infty}}(u) = 1 \text{ при } u = \pm\infty.$$

Из (1.8) следует простое условие принадлежности

$$u_1 \ge u \ge u_2, \qquad (10)$$

где u_1, u_2 – точки перехода (9).

Точки в одномерном пространстве в проективной геометрии находятся в некоторой связи, которую принято выражать словами инцидентность [5] или принадлежность. Инцидентность в классической проективной геометрии имеет два значения, 0 (нет) и 1 (да). Например, если расстояние между точками равно нулю, то инцидентность двух точек равна 1(да), во всех остальных случаях инцидентность равна 0 (нет).

Взаимосвязь нечетких точек в одномерном пространстве так же будем обозначать термином, принадлежность или совпадение в нечетком смысле. Однако в отличие от классического случая степень принадлежности может принимать любые значения в интервале [0;1].

Назовем мерой принадлежности двух собственных точек величину.

$$I(T_1^1, T_2^1) == \max\{\mu_{T_1^1}(m_2), \mu_{T_2^1}(m_1)\} \qquad (11)$$

где $\mu_{T_1^1}(u)$ функция принадлежности нечеткому множеству T_1^1,

$\mu_{T_2^1}(u)$ функция принадлежности нечеткому множеству T_2^1.

В соответствии с (3) и (11) принадлежность подсчитывается по формуле

$$I(T_1^1, T_2^1) = \max\{e^{-\frac{(m_2-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}; e^{-\frac{(m_1-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}\}. \qquad (12)$$

Из (12), если положить $(m_2 - m_1)^2 = \ell^2$ (13), следует:

$$I(T_1^1, T_2^1) = \max\{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{\sigma_1}\right)^2}; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{\sigma_2}\right)^2}\}, \qquad (14)$$

где ℓ – расстояние между математическими ожиданиями нечетких точек (см. рис. 5).

Назовем мерой принадлежности собственной и несобственной нечетких точек величину

$$I(T_1^1 T^{1\infty}) = 1 - e^{-\frac{m^2}{2\sigma_S{}^2}}, \qquad (15)$$

где m – математическое ожидание собственной точки,

σ_s – среднее квадратичное отклонение дополнения несобственной ночки $\overline{T}^{1\infty}$.

Две нечеткие точки на прямой назовем принадлежными, если $I(T_1^1, T_2^1) \geq 0.5$, и не принадлежными, если $I(T_1^1, T_2^1) < 0.5$.

Примеры

Пример 1. (Рис. 5). Даны две собственные нечеткие точки:

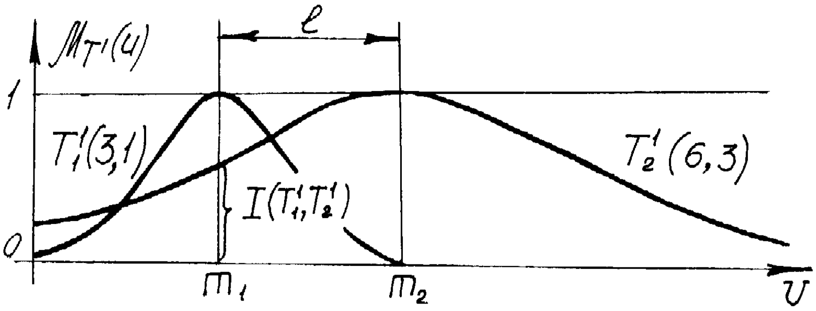

Рис. 5. Принадлежность двух собственных одномерных нечетких точек

$T_1^1(3,1)$ с параметрами $m_1 = 3$, $\sigma_1 = 1$, $T_2^1(6,3)$ с параметрами $m_2 = 6$, $\sigma_2 = 3$.

Требуется определить меру принадлежности этих двух точек, а также определить, принадлежны они или не принадлежны.

Расстояние между математическими ожиданиями $\ell = m_2 - m_1 = 3$. Мера принадлежности двух нечетких точек T_1^1, T_2^1 согласно (14) равна:

$$\mathrm{I}(T_1^1, T_2^1) = \max\{0.01, 0.606\} = 0.606.$$

Нечеткие точки T_1^1, T_2^1 принадлежны потому, что мера принадлежности $\mathrm{I}(T_1^1, T_2^1) > 0.5$.

Пример 2. (Рис. 6). Две нечеткие точки.

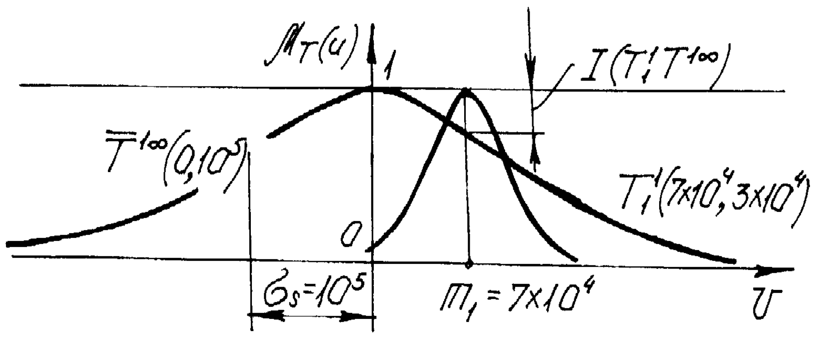

Рис. 6. Принадлежность собственной и несобственной одномерных нечетких точек

$T_1^1(7\times10^4, 3\times10^4)$ собственная точка с параметрами $m_1 = 7\times10^4$, $\sigma_1 = 3\times10^4$, $\overline{T}^{1\infty}(0;10^5)$ несобственная точка с параметрами $m_s = 0$, $\sigma_S = 10^5$.

Требуется определить меру принадлежности этих двух точек, а также определить, принадлежны они или не принадлежны.

Мера принадлежности нечетких собственной и несобственной точек $(T_1^1, T^{1\infty})$ согласно (15) равна $\mathrm{I}(T_1^1, T^{1\infty}) = 1 - 0.782 = 0.218$.

Нечеткие точки $(T_1^1, T^{1\infty})$ не принадлежны потому, что мера принадлежности $\mathrm{I}(T_1^1, T_2^1) > 0.5$.

Заключение

Аналогично можно рассмотреть и двухмерную проективную нечеткую геометрию. Проективная плоскость в двухмерной проективной нечеткой геометрии содержит одну несобственную нечеткую прямую. Две нечеткие прямые на плоскости пересекаются в одной нечеткой точке. Основные объекты этой геометрии будут рассмотрены в следующей статье.

Сформулированные предложения по теории нечеткой проективной геометрии дали возможность разработать ряд алгоритмов решения задач геометрического моделирования утраченных памятников архитектуры по их перспективным изображениям [2]. Применение нечеткой проективной геометрии и статистической обработки результатов опытов при учете неравноточности измерений позволило увеличить достоверность результатов восстановления [4].

Работа выполняется при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 6-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 1999. – 576 с.
2. Воронов Р. В., Степанов П. Д. Алгоритмы оптимизации объемно-планировочных характеристин системы архитектурно-стоительных объектов // Информационные технологии моделирования и управления. – 2008. – № 3 (46). – С. 294-299.
3. Марков Б. Г., Марков О. Б Геометрическая интерпретация нечеткой прямой // Петрозав. гос. ун-т. – Петрозаводск, 2003. – 11 с. – Библиогр.: Деп. в ВНИИТИ 16.07.03 №1401-В2003.
4. Прихода И. Е. Графическая реконструкция церкви Иоанна Предтечи в селе Шуя // Народное зодчество: Межвуз. сб. – Петрозаводск, 1998. – С. 225-233.
5. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. – М.: Просвещение, 1969. – 368 с.

Рецензенты:

Рогов А.А., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и анализа данных математического факультета Петрозаводского государственного университета, г. Петрозаводск.

Колесников Г.Н., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой механики строительного факультета Петрозаводского государственного университета, г. Петрозаводск.