УДК 338

О РИСКАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРЕМЕННЫХ С КРИТИЧЕСКИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Севодина В.М.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

В работе изучены ситуации, в которых экономические индикаторы сложных систем моделируются зависимостью общего вида. Оказывается, что использование таких систем при наличии некоторых ограничений на множество значений моделируемой переменной либо на переменные связано со сложностями точной интерпретации полученных результатов. Доказано, что при использовании моделей подобного типа возникает вероятность принятия ошибочного решения (риск), что связано с неправильной информацией, выдаваемой моделью, о нахождении параметров системы в допустимой области или вне ее. Рассмотрены приемы определения границ множеств, соответствующих допустимым значениям индикаторов системы. Установлены формулы для определения риска принятия решения в таких системах. Разобраны различные варианты распределения ошибок моделирования и измерения. Описаны ситуации, в которых возможно аналитическое вычисление указанных вероятностей.

Ключевые слова: риск, модель, ошибочное решение, вероятность, критическое значение.

ABOUT RISKS ARISING IN MODELING VARIABLES WITH CRITICAL VALUES

Sevodina V.M.

Perm National Research Polytechnic University

In this paper situations in which economic indicators of complex systems modeled dependence generic was researched. It turns out that the use of such systems in the presence of certain restrictions on the range of the simulated variable or variables that are associated with the complexities of accurate interpretation of results. Author proved that using models of this type there is the possibility of making a wrong decision (risk) , which is associated with incorrect information issued by the model of finding the parameters of the system in the allowable region or outside of it. Author considered methods of delimitation sets corresponding to the allowed values of the indicators. Formula for determining the risk of decision in such systems was set. Author collated various distribution options modeling errors and measurement. A situation in which it is possible analytical calculation of these probabilities was described.

Keywords: risk, model, wrong decision probability, the critical value.

Сегодня все более широкое применение находит математическое моделирование различных процессов. Построение модели и получение по ней достоверных результатов становится одной из самых актуальных задач. В связи с этим важной является проблема обеспечения высокого качества результатов экономического исследования, одной из сторон которой является точность используемых в моделировании данных по отношению к фактическим величинам. Случайные ошибки в их измерении, не принимаемые во внимание традиционными методами, в сочетании с естественной случайной ошибкой модели, могут оказывать существенное влияние на результат моделирования. В связи с необходимостью ограничивать множество значений участвующих в анализе или исследуемых переменных появляется риск выйти за допустимые значения переменных в результате накопления таких ошибок. Значит, при моделировании необходимо учитывать такой риск.

Ранее, в работах [3-5], описанная проблема рассматривалась в условиях использования в качестве рассматриваемой модели сначала однофакторной, затем многофакторной линейной регрессионной зависимости, а также в предположении, что случайные ошибки имеют нормальное распределение. Однако в общем случае эти предположения не обязательны.

В данной работе расширен предложенный в [3-5] метод количественного описания риска, возникающего при моделировании с переменными, имеющими критические значения, на случай модели произвольного вида, а также на случай распределенных по различным законам распределения случайных ошибок.

Пусть имеет место некоторый смоделированный процесс φ, зависящий от x: $\varphi = \varphi(x)$. При описании эконометрической зависимости между указанными переменными будем считать, что существует случайная ошибка модели. Тогда модель процесса φ примет вид: $\varphi = \varphi(x) + \delta\varphi$. Кроме того, с учетом некоторых внутренних и внешних факторов, выделим фактическое значение $\varphi_ф$, отличающееся от измеренного значения φ на некоторую величину $\Delta\varphi$: $\varphi_ф = \varphi + \Delta\varphi$. Тогда с использованием модели процесса $\varphi_ф$ будет иметь вид:

$$\varphi_ф = \varphi(x) + \delta\varphi + \Delta\varphi \qquad (1)$$

Оценочная величина φ определится следующим образом:

$$\varphi_о = \varphi(x) + \delta\varphi = \varphi_ф - \Delta\varphi \qquad (2)$$

Предположим, что имеется некоторая допустимая область, внутри которой должны находиться фактические значения φ. Примерами ситуаций, в которых появляется такая область, являются, например, следующие: 1) множество, на котором возможно использование построенной модели, ограниченно; 2) имеются некоторые критические значения моделируемой величины, возникающие в силу сущности изучаемых явлений; 3) фиксация момента выхода за границы некоторого рубежного множества. Обозначим такую область через $\Omega^{ф}_{доп} = (\underline{\varphi_{ф.доп}}, \overline{\varphi_{ф.доп}})$. Из-за возникновения в процессе использования модели описанной ранее величины $\Delta\varphi$ выделяется множество $\Omega^{о}_{доп} = (\underline{\varphi_{о.доп}}, \overline{\varphi_{о.доп}})$, отличное от $\Omega^{ф}_{доп}$.

В зависимости от взаимного расположения $x, \varphi_о$ и $\varphi_ф$ относительно допустимых множеств можно выделить несколько ситуаций. Случай $\varphi_ф \in \Omega^{ф}_{доп}$ определим как событие A_1. Если выполняется включение $\varphi_{оц} \in \Omega^{о}_{доп}$, то имеет место событие B_1. Если эти включения не выполняются, то будем считать, что происходят события A_2, B_2 соответственно.

Так как при использовании модели следует рассматривать все допустимые области, всегда будет иметь место какое-нибудь сочетание событий указанных двух групп.

Полученные комбинации ситуаций можно условно разделить на две группы: безопасные, то есть дающие однозначную, верную информацию, и опасные, подразумевающие ошибочные выводы. К первой группе относятся события $A_1 \cap B_1$ и $A_2 \cap B_2$. Ко второй группе, в силу двойственности информации, следует отнести $A_1 \cap B_2$ и $A_2 \cap B_1$.

Безопасные ситуации не влекут за собой получение недостоверных результатов, так как в этом случае всегда можно проверить работу модели. Таким образом, риск, возникающий при применении зависимости $\varphi(x)$, будем понимать как вероятность наступления событий $A_1 \cap B_2$ и $A_2 \cap B_1$.

Вероятность наступления одного из них можно вычислить, используя подход, описанный в [2].

Приведем вывод выражения для вычисления вероятности наступления события $A_1 \cap B_1$.

$$P(A_1 \cap B_1) = P(\underline{\varphi_{ф.доп}} < \varphi_ф < \overline{\varphi_{ф.доп}}; \underline{\varphi_{о.доп}} < \varphi_о < \overline{\varphi_{о.доп}}) =$$

$$= P(\underline{\varphi_{ф.доп}} < \varphi(x) + \delta\varphi + \Delta\varphi < \overline{\varphi_{ф.доп}}; \underline{\varphi_{о.доп}} < \varphi(x) + \delta\varphi < \overline{\varphi_{о.доп}}) =$$

$$= P(\underline{\varphi_{ф.доп}} - \varphi(x) - \delta\varphi < \Delta\varphi < \overline{\varphi_{ф.доп}} - \varphi(x) - \delta\varphi; \underline{\varphi_{о.доп}} - \varphi(x) < \delta\varphi < \overline{\varphi_{о.доп}} -$$
$$-\varphi(x)) =$$

$$= \int_{\underline{\varphi_{о.доп}} - \varphi(x)}^{\overline{\varphi_{о.доп}} - \varphi(x)} d\delta\varphi \int_{\underline{\varphi_{ф.доп}} - \varphi(x) - \delta\varphi}^{\overline{\varphi_{ф.доп}} - \varphi(x) - \delta\varphi} W d\Delta\varphi, \qquad (3)$$

где $W = W(\delta\varphi, \Delta\varphi)$ - совместная плотность распределения отклонений $\delta\varphi, \Delta\varphi$.

Аналогично находятся вероятности остальных событий. Ввиду того что вероятность $A_2 \cap B_2$, как правило, оказывается очень малой, вероятность ошибочного решения можно найти как $P = 1 - P(A_1 \cap B_1)$.

В работе [3-5] рассматривался случай, при котором все учитываемые при вычислении риска отклонения имели нормальное распределение. Однако в общем случае это предположение может не выполняться. Проанализируем, какой вид примет формула (3) в результате работы с различными распределениями ошибок.

В работе [6] рассматриваются различные законы распределения, которым могут подчиняться случайные ошибки. Адаптируем некоторые выкладки из нее для нашего случая. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Распределение $\delta\varphi$	Распределение $\Delta\varphi$
Гаусса $m_{\delta\varphi} >> 3\sigma_{\delta\varphi}$ $f(\delta\varphi) = \frac{1}{\sigma_{\delta\varphi\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(\delta\varphi - m_{\delta\varphi})^2}{2\sigma_{\delta\varphi}^2}}$	Гаусса $m_{\Delta\varphi} >> 3\sigma_{\Delta\varphi}$ $f(\Delta\varphi) = \frac{1}{\sigma_{\Delta\varphi\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(\Delta\varphi - m_{\Delta\varphi})^2}{2\sigma_{\Delta\varphi}^2}}$
Рэлея $f(\delta\varphi) = \frac{\delta\varphi}{\sigma_{\delta\varphi}^2} e^{\frac{\delta\varphi^2}{2\sigma_{\delta\varphi}^2}}$	Рэлея $f(\Delta\varphi) = \frac{\Delta\varphi}{\sigma_{\Delta\varphi}^2} e^{\frac{\Delta\varphi^2}{2\sigma_{\Delta\varphi}^2}}$
Лапласа $f(\delta\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\delta\varphi}} e^{-\sqrt{2}\frac{\lvert\delta\varphi\rvert}{\sigma_{\delta\varphi}}}$	Лапласа $f(\Delta\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\Delta\varphi}} e^{-\sqrt{2}\frac{\lvert\Delta\varphi\rvert}{\sigma_{\delta\varphi}}}$
Вейбулла $f(\delta\varphi) = \alpha_{\delta\varphi}\lambda_{\delta\varphi} q^{\alpha_{\delta\varphi}-1} e^{-\lambda_{\delta\varphi} q^{\alpha_{\delta\varphi}}}$	Вейбулла $f(\Delta\varphi) = \alpha_{\Delta\varphi}\lambda_{\Delta\varphi} q^{\alpha_{\Delta\varphi}-1} e^{-\lambda_{\Delta\varphi} q^{\alpha_{\Delta\varphi}}}$
Логнормальный $\delta\varphi, \sigma > 0$ $f(\delta\varphi) = \frac{1}{\delta\varphi\sigma_{\delta\varphi}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln\delta\varphi - m_{\delta\varphi})^2}{2\sigma_{\delta\varphi}^2}}$	Логнормальный $\Delta\varphi, \sigma > 0$ $f(\Delta\varphi) = \frac{1}{\Delta\varphi\sigma_{\Delta\varphi}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln\Delta\varphi - m_{\Delta\varphi})^2}{2\sigma_{\Delta\varphi}^2}}$
Стьюдента $f(\delta\varphi, n) = \frac{\Gamma(\frac{n_{\delta\varphi}+1}{2})}{\Gamma(\frac{n_{\delta\varphi}}{2})\sqrt{\pi n_{\delta\varphi}}} (1 + \frac{\delta\varphi^2}{n_q})^{-\frac{n_{\delta\varphi}+1}{2}}$	Стьюдента $f(\Delta\varphi, n) = \frac{\Gamma(\frac{n_{\Delta\varphi}+1}{2})}{\Gamma(\frac{n_{\Delta\varphi}}{2})\sqrt{\pi n_{\Delta\varphi}}} (1 + \frac{\Delta\varphi^2}{n_q})^{-\frac{n_{\Delta\varphi}+1}{2}}$

Таким образом, в каждом из представленных случаев, в виде подынтегральной функции $W = W(\delta\varphi, \Delta\varphi)$ будет выступать совместная функция плотности распределений, совпадающая с одной из представленных в таблице 1.

Рассмотрим теперь подсчет вероятности ошибочных выводов при сочетании ошибок, имеющих разные законы распределения.

Пусть Δx и δx имеют лапласовское распределение на бесконечных интервалах. Тогда формула 3 примет вид:

$$P(A_1 \cap B_1) = \int_{\underline{\varphi_{o.доп}}-\varphi(x)}^{\overline{\varphi_{o.доп}}-\varphi(x)} d\delta\varphi \int_{\underline{\varphi_{ф.доп}}-\varphi(x)-\delta\varphi}^{\overline{\varphi_{ф.доп}}-\varphi(x)-\delta\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\delta\varphi}} e^{-\sqrt{2}\frac{|\delta\varphi|}{\sigma_{\delta\varphi}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\Delta\varphi}} e^{-\sqrt{2}\frac{|\Delta\varphi|}{\sigma_{\delta\varphi}}} d\Delta\varphi$$

В отличие от рассмотренного ранее в работах [3-5] случая, когда все учитываемые в модели ошибки распределены по нормальному закону и интеграл приходится вычислять приблизительно с помощью численных методов, в этом случае можно получить точное значение интеграла:

$$P(A_1 \cap B_1) =$$

$$\frac{\sigma_{\Delta\varphi}}{4(\sigma_{\Delta\varphi}-\sigma_{\delta\varphi})}\left(e^{\sqrt{2}(\varphi(x)\sigma_{\Delta\varphi}-\underline{\varphi_{o.доп}}\sigma_{\Delta\varphi}-\underline{\varphi_{ф.доп}}\sigma_{\delta\varphi}+\underline{\varphi_{o.доп}}\sigma_{\delta\varphi})} - e^{\sqrt{2}(\varphi(x)\sigma_{\Delta\varphi}-\underline{\varphi_{o.доп}}\sigma_{\Delta\varphi}-\overline{\varphi_{ф.доп}}\sigma_{\delta\varphi}+\underline{\varphi_{o.доп}}\sigma_{\delta\varphi})} -\right.$$

$$\left.-e^{\sqrt{2}(\varphi(x)\sigma_{\Delta\varphi}-\overline{\varphi_{o.доп}}\sigma_{\Delta\varphi}-\underline{\varphi_{ф.доп}}\sigma_{\delta\varphi}+\overline{\varphi_{o.доп}}\sigma_{\delta\varphi})} - e^{\sqrt{2}(\varphi(x)\sigma_{\Delta\varphi}-\overline{\varphi_{o.доп}}\sigma_{\Delta\varphi}-\overline{\varphi_{ф.доп}}\sigma_{\delta\varphi}+\overline{\varphi_{o.доп}}\sigma_{\delta\varphi})}\right)$$

Таким образом, предложенный ранее в работах [3-5] метод количественной оценки риска, возникающего при моделировании с переменными, имеющими пороговые значения, распространен на случай моделей общего вида. Изучены случаи, в которых случайные ошибки, участвующие в анализе риска, имеют отличное от нормального распределения. Установлено, что предлагаемый метод подходит и для анализа таких ситуаций. Кроме того, показано, что при некоторых вариантах распределений ошибок возможно вычисление точного значения целевого интеграла. С другой стороны, естественно, имеются варианты, в которых необходимо использовать численные методы и с их помощью находить приблизительное значение риска.

Список литературы

1. Живетин В.Б. Риски и безопасность экономических систем (математическое моделирование). - 2-е изд. - М. : Изд-во Института проблем риска, 2005. – 345 с.

2. Живетин В.Б. Научный риск. – Казань : Изд-во Казанского математического общества, 2003. – 355 с.

3. Северин М.А., Севодина В.М. О некоторых рисках, возникающих при использовании линейных регрессионных зависимостей // Управление экономическими системами : электронный научный журнал. - 2013. - № 1. - URL: http://uecs.ru/instrumentalnii-metody-ekonomiki/item/1947-2013-01-25-06-15-40
4. Первадчук В.П., Севодина В.М., Севодин М.А. О рисках, возникающих при моделировании экономических индикаторов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Сер. Экономические науки. - 2013. - № 3 (173). – С. 150-156.
5. Первадчук В.П., Севодина В.М. О влиянии ошибок моделирования на оценку состояния системы // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 2. - URL: http://www.science-education.ru/108-9135
6. Шевченко Е.Н. Математическое моделирование распределения риска при независимых случайных величинах вероятностей исходных событий и ущерба // Фундаментальные исследования. – 2011. - № 12. - С. 604-608. - URL: http://rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=7981780

Рецензенты:

Елохова И.В., д. э. н., профессор, заведующий кафедрой управления финансами Пермского национального исследовательского университета, г. Пермь.

Перский Ю.К., д.э.н., профессор кафедры менеджмента и маркетинга Пермского национального исследовательского университета, г. Пермь.