

НЕЗАВИСИМОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯМИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

Туктамышев В.С., Лохов В.А.

ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь, Россия (614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29), e-mail: helpinvader@list.ru

В данной работе алгоритм независимого управления напряжениями в системах с собственными (неупругими) деформациями реализован в рамках задачи понижения эксплуатационных нагрузок во вращающемся диске с неравномерным распределением поля температур. При этом под независимым управлением напряжениями подразумевается создание в диске заданных напряжений без изменения его полных деформаций. Соответствующее целевое напряжённое состояние определяется из отдельной оптимизационной задачи. Поиск собственных деформаций, обеспечивающих достижение решения поставленной задачи, осуществляется с помощью ранее разработанной методики независимого управления напряжениями, которая, в свою очередь, основывается на теореме о декомпозиции собственной деформации. В качестве собственных деформаций в представленной работе выбраны деформации фазовых переходов, возникающих в материалах с эффектом памяти формы, для диска, нагруженного поверхностным давлением. В предыдущих исследованиях показано, что распределение таких деформаций вычисляется с помощью простых соотношений. Однако это распределение оказывается свободным от напряжений, что не соответствует условию задачи. Одним из решений данной проблемы является создание составного диска, в каждой из частей которого может быть реализован эффект памяти формы. В работе показано, что увеличение количества составных элементов в диске лучше приближает его напряжённое состояние к требуемому при условии отсутствия полных деформаций.

Ключевые слова: собственные деформации, независимое управление напряжениями, эффект памяти формы, вращающийся диск.

INDEPENDENT STRESS CONTROL IN THE ROTATING DISC

Tuktamyshev V.S., Lokhov V.A.

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia (614990, Perm, Komsomolsky st., 29), e-mail: helpinvader@list.ru

In this paper, an algorithm independent stress control in systems with imposed eigenstrain is implemented within the frame of the problem lowering operational loads in a rotating disk with a non-uniform distribution of temperature field. In this case, under the independent stress control means the creation of a disk desired stress field without changing the total strains. Corresponding target stress state is determined from the individual optimization problem. Search the eigenstrain that will promote the solution of the problem, by using the previously developed method of independent stress control, which in turn is based on a theorem of decomposition of the eigenstrain. As the eigenstrain in the present study selected strain of phase transitions that occur in materials with shape memory for the disc loaded with a surface strength. Previous studies have shown that the distribution of such deformations is calculated using the simple relations. However, this distribution is free of stress that does not meet the conditions of the problem. One solution to this problem is to provide a composite disc, in which each of the parts may be implemented shape memory effect. It is shown that an increase in the number of elements in the disk, it is better approximates the desired stress, in the absence of total strains.

Keywords: eigenstrain, independent stress control, shape memory effect, rotating disk.

Введение

Возможность эффективной эксплуатации отдельных элементов современных технических систем требует разработки новых алгоритмов управления напряжённо-деформированным состоянием. Одной из актуальных проблем в данном направлении является создание методики независимого управления напряжениями в системах с неупругими деформациями. При этом под независимым управлением напряжениями

подразумевается создание в системе заданного поля напряжений с сохранением её деформированного состояния. Достижение цели в такой задаче осуществляется за счёт возможности создания в рассматриваемом теле неупругих деформаций, в качестве которых могут выступать деформации фазовых переходов, температурные деформации, пьезоэлектрические, ростовые и т.д.

В работе [5] представлен алгоритм независимого управления напряжениями, основанный на использовании теоремы о декомпозиции собственной деформации [7], которая утверждает, что любую собственную деформацию, существующую в теле, можно разложить на две составляющие: свободную от напряжений и свободную от полных деформаций. Теорема о декомпозиции, в свою очередь, является продолжением исследований о разложении гильбертовых пространств в задачах механики [3, 4, 9].

В представленной работе приведена демонстрация методики независимого управления напряжениями, где в качестве решения модельной задачи, приближённой к реальной технической проблеме, рассматривается вопрос понижения уровня механических напряжений во вращающемся диске с неравномерным по радиусу распределением температурного поля. Подобная задача может быть актуальной, например, при проектировании диска авиационной турбины.

Постановка задачи

Однородный диск постоянной толщины с радиусом R_1 , выполненный из изотропного материала с эффектом памяти формы, имеет отверстие радиуса R_0 . В процессе эксплуатации диск вращается с постоянной угловой скоростью ω , при воздействии стационарного неоднородного температурного поля, вызванного перепадом температур $T_0 - T_1$ между

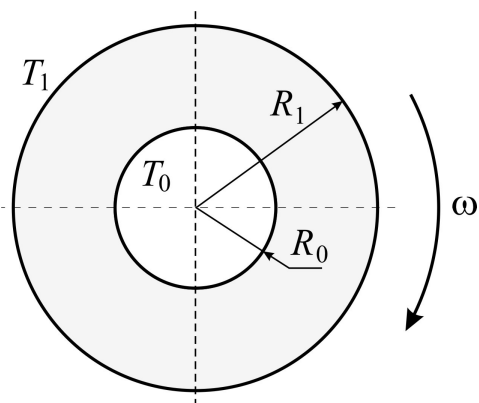


Рис. 1. Вращающийся диск под воздействием неоднородного температурного поля.

внутренним и внешним контурами диска (рис. 1).

В целях повышения рабочих характеристик при помощи собственных деформаций требуется создать такие преднапряжения в диске, которые, во-первых, позволили бы максимально снизить уровень эксплуатационных термоупругих напряжений и, во-вторых, не оказывали бы влияния на первоначальные размеры диска.

Рассматриваемую задачу можно разбить на три части:

- 1) задача определения «рабочих» напряжений $\tilde{\sigma}^F$ в диске;

2) поиск оптимального поля собственных напряжений $\tilde{\rho}^0$, необходимого для требуемого снижения напряжений $\tilde{\sigma}^F$;

3) создание в диске собственных деформаций, свободных от полных деформаций, которые, с учётом технологических ограничений, соответствуют напряжениям $\tilde{\rho}^0$.

1. Решение первой части производится в рамках теории термоупругости. В полярных координатах при условии осесимметричного плоско-напряжённого состояния, распределения компонент тензора напряжений будет иметь вид [10]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^F &= \sigma_{rr}^\omega + \sigma_{rr}^T, \\ \sigma_{\theta\theta}^F &= \sigma_{\theta\theta}^\omega + \sigma_{\theta\theta}^T,\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^\omega &= \frac{(3+\nu)\rho\omega^2}{8r^2}(r^2 - R_0^2)(R_1^2 - r^2), \\ \sigma_{\theta\theta}^\omega &= \frac{\rho\omega^2}{8r^2}\left(R_0^2(R_1^2 + r^2)(3+\nu) + r^2(R_1^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu))\right),\end{aligned}\quad (2)$$

вклад напряжений, вызванных центробежными силами инерции.

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^T &= \alpha E(T_0 - T_1) \left(\frac{\ln(R_0/r)}{\ln(R_0/R_1)} + \frac{R_1^2(R_0^2 - r^2)}{r^2(R_1^2 - R_0^2)} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^T &= \alpha E(T_0 - T_1) \left(\frac{\ln(R_0/r)}{\ln(R_0/R_1)} - \frac{R_1^2(R_0^2 + r^2)}{r^2(R_1^2 - R_0^2)} - \frac{1}{\ln(R_0/R_1)} \right),\end{aligned}\quad (3)$$

температурные напряжения (рис. 2а).

2. Необходимые собственные напряжения можно найти, исходя из следующих соображений.

С учётом собственных напряжений, суммарные радиальные и окружные напряжения в диске будут складываться из составляющих от центробежных сил при неоднородном нагреве и от собственных напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{rr}^F + \rho_{rr}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta}^F + \rho_{\theta\theta},\end{aligned}\quad (4)$$

где ρ_{rr} , $\rho_{\theta\theta}$ – собственные напряжения. Эти напряжения могут быть представлены с помощью следующей функции напряжений Эйри $\varphi(r)$:

$$\rho_{rr}(r) = \frac{1}{r}\varphi(r), \quad \rho_{\theta\theta}(r) = \frac{d\varphi(r)}{dr}.\quad (5)$$

Вид функции $\varphi(r)$ подбирается в соответствии с граничными условиями для ρ_{rr} , $\rho_{\theta\theta}$:

$$\varphi(r) = r(r - R_0)(r - R_1)\zeta(r), \quad \zeta(r) \in C^1[R_0, R_1],\quad (6)$$

где $\zeta(r)$ – произвольная гладкая функция с непрерывной производной на отрезке $[R_0, R_1]$.

Представим функцию $\zeta(r)$ в виде следующего разложения:

$$\zeta(r) = k_0 + \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2}. \quad (7)$$

Тогда соотношения (5) переписуются:

$$\begin{aligned} \rho_{rr}(r) &= (r - R_0)(r - R_1) \left(k_0 + \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2} \right), \\ \rho_{\theta\theta}(r) &= (3r^2 - 2(R_0 + R_1)r + R_0R_1) \left(k_0 + \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2} \right) + r(r - R_0)(r - R_1) \left(-\frac{k_1}{r^2} - 2\frac{k_2}{r^3} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Перепишем напряжения (4) в виде следующих зависимостей:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, k_0, k_1, k_2) &= \sigma_{rr}^F(r) + \rho_{rr}(r, k_0, k_1, k_2), \\ \sigma_{\theta\theta}(r, k_0, k_1, k_2) &= \sigma_{\theta\theta}^F(r) + \rho_{\theta\theta}(r, k_0, k_1, k_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, для получения окончательной формы компонент ρ_{rr} , $\rho_{\theta\theta}$ и σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ требуется определить коэффициенты k_0 , k_1 , k_2 .

Как уже упоминалось выше, собственные напряжения в диске должны максимально понижать уровень эксплуатационных напряжений, т.е. необходимо решить следующую задачу минимизации:

$$f(k_0, k_1, k_2) = \max_{R_0 \leq r \leq R_1} (\sigma_{rr}(r, k_0, k_1, k_2), \sigma_{\theta\theta}(r, k_0, k_1, k_2)) \rightarrow \inf (k_1, k_2, k_3 \in \square), \quad (10)$$

Решение (10) позволит определить коэффициенты k_0, k_1, k_2 , соответствующие оптимальному полю собственных напряжений $\tilde{\rho}^0$, вычисляемых по формуле (8).

3. После определения собственных напряжений $\tilde{\rho}^0$ необходимо перейти к алгоритму решения задачи о независимом управлении напряжениями. Данная методика предполагает учёт природы собственной деформации создаваемой в диске, а также технологических ограничений, имеющих место в процессе реализации этих деформаций.

Реально существующая собственная деформация должна быть записана в форме выражения:

$$\tilde{\varepsilon}^* = \sum_{k=1}^K a_k \tilde{\xi}_k. \quad (11)$$

Определение элементов $\tilde{\xi}_k$ ($k = 1..K$) будет производиться позже.

Согласно теореме о декомпозиции, необходимая для создания напряжений $\tilde{\rho}^0$ собственная деформация, свободная от полных деформаций, имеет вид [7]

$$\tilde{\varepsilon}_\sigma^0 = -\tilde{C}^{-1} \cdot \tilde{\rho}^0. \quad (12)$$

Тогда задача независимого управления напряжениями сводится к поиску минимума следующего функционала:

$$\Psi = \|\tilde{\varepsilon}^* - \tilde{\varepsilon}_\sigma^0\|_H^2 \rightarrow \inf(\bar{a}), \text{ при условии } \tilde{\varepsilon}^* \in H_\sigma. \quad (13)$$

Решение

Как уже отмечалось ранее, диск должен быть выполнен из материала с эффектом памяти формы. Таким эффектом обладает, например, сплав никелида титана (TiNi, нитинол), для одной из разновидностей которого в работе [6] (Ti – 49.16%, Ni – 49.75%) приведены следующие физико-механические свойства:

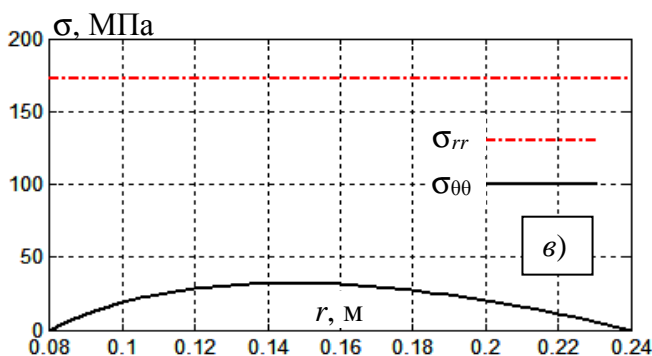
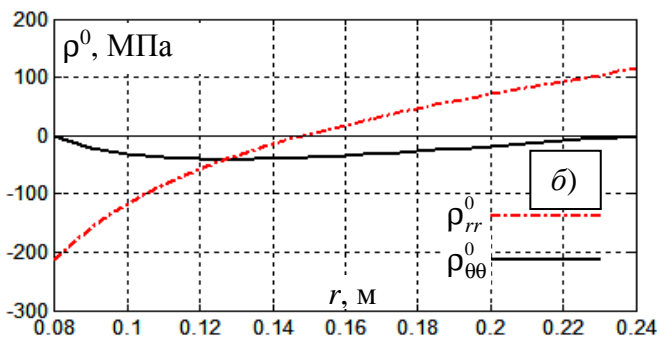
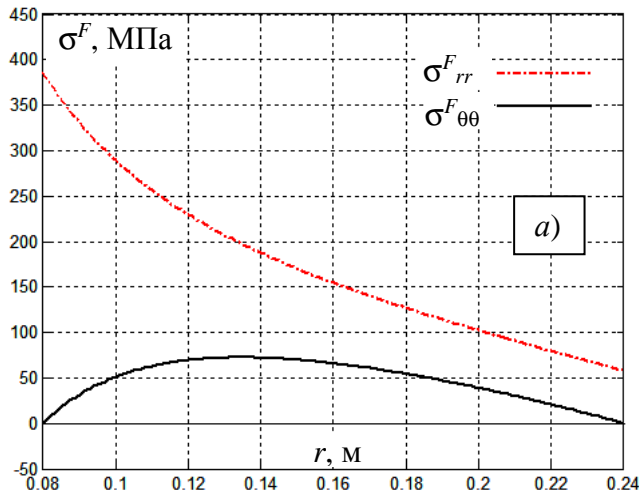


Рис. 2. Распределение эксплуатационных (а), остаточных (б) и суммарных (в) напряжений.

диска $T_1 = 200 \text{ }^\circ\text{C}$,

- температура на внутренней поверхности диска $T_0 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$,
- частота вращения диска $n = 10000 \text{ об/мин}$.

- плотность материала $\gamma = 4450 \text{ кг/м}^3$,
- модуль упругости $E = 75 \text{ ГПа}$ ($T = 20 - 200^\circ\text{C}$),
- коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$,
- коэффициент температурного расширения $\alpha = 11 \times 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$,
- предел текучести $\sigma_y = 450 - 800 \text{ МПа}$ ($T = 0 - 200^\circ\text{C}$),
- температурный интервал прямого мартенситного перехода:
 $M_s = -92^\circ\text{C}$ (в начале),
 $M_f = -106^\circ\text{C}$ (в конце),
- температурный интервал обратного мартенситного перехода:
 $A_s = -44^\circ\text{C}$ (в начале),
 $A_f = -26^\circ\text{C}$ (в конце).

Для оставшихся параметров, входящих в соотношения (2, 3, 8), приняты следующие значения [8]:

- радиус диска $R_1 = 240 \text{ мм}$,
- радиус отверстия $R_0 = 80 \text{ мм}$,
- температура на внешней поверхности

Численное решение (10) методом Нелдера-Мида определяет оптимальные значения искомых коэффициентов:

$$k_0 = 1.06 \times 10^8 \text{ Па/м}^2, \quad k_1 = 3.74 \times 10^8 \text{ Па/м}, \quad k_2 = 0.76 \times 10^8 \text{ Па}.$$

Соответствующее этим значениям распределение оптимальных собственных напряжений, а также поле суммарных напряжений в диске приведены на рис. 2. При этом поле деформаций фазовых переходов, соответствующее собственным напряжениям $\tilde{\rho}^0$, вычисляется по формуле (12).

В современной литературе существует достаточно большое количество математических моделей, описывающих эффект памяти формы. Среди них одной из наиболее простых и в то же время хорошо согласующихся с экспериментальными данными является модель, описанная Мовчаном в работе [1].

Пусть деформации, вызванные эффектом памяти формы, реализуются за счёт поверхностных давлений p_1 и p_2 , приложенных к внутреннему и внешнему контурам диска соответственно. Такие деформации исследованы в работе [2] и определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon_{rr}^* = \frac{c_0}{a_0} (e^{a_0} - 1) s_{rr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^* = \frac{c_0}{a_0} (e^{a_0} - 1) s_{\theta\theta}, \quad (14)$$

где s_{rr} и $s_{\theta\theta}$ – компоненты девиатора тензора напряжений

$$\begin{aligned} s_{rr} &= p_1 \frac{r_1^2 (r^2 - 3r_2^2)}{3r^2 (r_2^2 - r_1^2)} + p_2 \frac{r_2^2 (3r_1^2 - r^2)}{3r^2 (r_2^2 - r_1^2)}, \\ s_{\theta\theta} &= p_1 \frac{r_1^2 (r^2 + 3r_2^2)}{3r^2 (r_2^2 - r_1^2)} + p_2 \frac{r_2^2 (3r_1^2 + r^2)}{3r^2 (r_1^2 - r_2^2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Однако деформации (14) оказываются свободными от напряжений, что, вообще говоря, нежелательно, согласно условию задачи.

Одним из решений данной проблемы является создание составного диска, в каждой из частей которого за счёт поверхностного давления реализуется эффект памяти формы. Под воздействием этого нагружения элементы охлаждаются до температуры более низкой, чем конечная температура прямого мартенситного перехода [1]. При этом в составных частях накапливаются собственные (фазовые) деформации. После снятия нагрузки упругие деформации становятся равными нулю, и элементы вставляются друг в друга без натяга. При нагревании составного диска до температуры более высокой, чем конечная температура обратного мартенситного перехода, существующие собственные деформации исчезают, следовательно, составные части будут стремиться к восстановлению первоначальных размеров, что в свою очередь приведёт к появлению собственных напряжений.

С учётом формул (14) и (15) деформации фазовых переходов для составных частей диска можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{lrr}^* &= p_{l1}^* \frac{r_{l1}^2 (r_l^2 - 3r_{l2}^2)}{3r_l^2 (r_{l2}^2 - r_{l1}^2)} + p_{l2}^* \frac{r_{l2}^2 (3r_{l1}^2 - r_l^2)}{3r_l^2 (r_{l2}^2 - r_{l1}^2)}, \quad l=1..Q, \\ \varepsilon_{l\theta\theta}^* &= p_{l1}^* \frac{r_{l1}^2 (r_l^2 + 3r_{l2}^2)}{3r_l^2 (r_{l2}^2 - r_{l1}^2)} + p_{l2}^* \frac{r_{l2}^2 (3r_{l1}^2 + r_l^2)}{3r_l^2 (r_{l2}^2 - r_{l1}^2)}, \quad l=1..Q,\end{aligned}\tag{16}$$

где Q – количество составных элементов, r_l – радиальная координата составного элемента с номером l , r_{l1} , r_{l2} – внутренний и внешний радиусы этого элемента ($r_{l1} \leq r_l \leq r_{l2}$),

$$p_{l1}^* = p_{l1} \frac{c_0}{a_0} (e^{a_0} - 1), \quad p_{l2}^* = p_{l2} \frac{c_0}{a_0} (e^{a_0} - 1), \quad l=1..Q,$$

p_{l1} – давление на внутреннюю поверхность элемента с номером l , p_{l2} – давление на внешнюю поверхность того же элемента ($l=1..Q$).

В системе существует Q подобластей, в которых могут быть созданы независимые друг от друга собственные деформации, тогда согласно формуле (11)

$$\tilde{\varepsilon}^* = \sum_{l=1}^Q \tilde{\varepsilon}_l^*, \tag{17}$$

где $\tilde{\varepsilon}_l^*$ – собственные деформации в соответствующей подобласти. Тензор $\tilde{\varepsilon}_l^*$ ($l=1..Q$) можно представить в виде вектора-столбца, поскольку в данной задаче ненулевыми являются лишь две его компоненты (индекс « T » означает транспонирование):

$$\tilde{\varepsilon}_l^* = \{\varepsilon_{lrr}^*, \quad \varepsilon_{l\theta\theta}^*\}^T, \quad l=1..Q. \tag{18}$$

Из соотношений (16) видно, что величинами собственных деформаций можно управлять посредством изменения давлений p_{l1} и p_{l2} $l=1..Q$, которые входят в параметры p_{l1}^* и p_{l2}^* соответственно. Таким образом, в каждой подобласти существует два независимых параметра управления. Введём следующее обозначение:

$$p_{11}^* = p_1^*, \quad p_{12}^* = p_2^*, \quad p_{21}^* = p_3^*, \quad p_{22}^* = p_4^*, \dots$$

Элементы p_k^* ($k=1..2Q$) с нечётным номером k соответствуют внутреннему давлению, элементы с чётным номером – внешнему давлению.

В связи с этим выражение (17) можно переписать следующим образом

$$\tilde{\varepsilon}^* = \sum_{k=1}^{2Q} p_k^* \tilde{\xi}_k, \tag{4.40}$$

где согласно (16) и (18)

$$\tilde{\xi}_k = \left\{ \frac{r_{k1}^2 (r_k^2 - 3r_{k2}^2)}{3r_k^2 (r_{k2}^2 - r_{k1}^2)}, \frac{r_{k1}^2 (r_k^2 + 3r_{k2}^2)}{3r_k^2 (r_{k2}^2 - r_{k1}^2)} \right\}^T \quad \text{и} \quad \tilde{\xi}_k = \left\{ \frac{r_{k2}^2 (3r_{k1}^2 - r_k^2)}{3r_k^2 (r_{k2}^2 - r_{k1}^2)}, \frac{r_{k2}^2 (3r_{k1}^2 + r_k^2)}{3r_k^2 (r_{k2}^2 - r_{k1}^2)} \right\}^T,$$

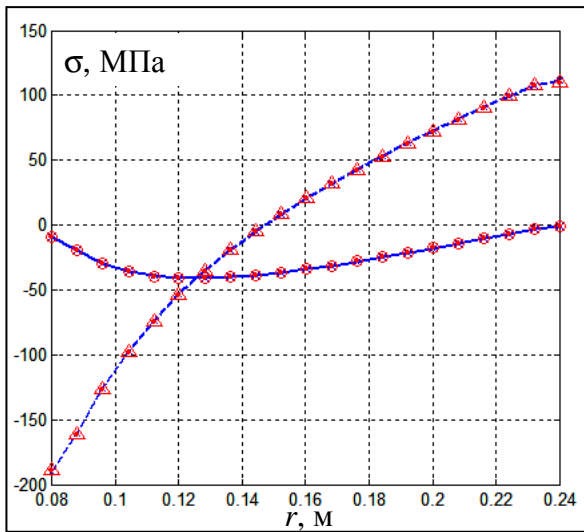


Рис. 3. Распределение собственных напряжений.

для чётных и нечётных номеров k соответственно.

Распределение требуемых собственных напряжений и получаемых в результате управления зависит от количества Q составных элементов диска. При этом для любого числа Q полные деформации остаются равными нулю, так как поиск оптимального решения производится среди собственных деформаций, свободных от полных деформаций.

На рис. 3. представлены распределения собственных напряжений для диска, состоящего

из двадцати равных по толщине составных элементов. Собственные напряжения, получаемые в результате вычислений (о – радиальные напряжения, Δ – окружные), практически полностью совпадают с распределением $\tilde{\rho}^0$ (рис. 2б). Однако использование большого количества составных частей несёт в себе существенный недостаток, заключающийся в сложности изготовления таких дисков.

Заключение

Теорема о декомпозиции собственной деформации открывает возможность независимого управления напряжениями, что является актуальным для некоторых прикладных задач. В данной работе приведён пример использования алгоритма независимого управления напряжениями в задаче понижения эксплуатационных нагрузок вращающегося диска, находящегося под действием неоднородного поля температур. В рамках представленной проблемы показаны возможности достижения требуемого поля напряжений при условии отсутствия полных деформаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31404_мол_а).

Список литературы

1. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1994. - № 6. – С. 47–53.

2. Лохов В.А., Туктамышев В.С. Исследование условий отсутствия механических напряжений в системах с собственными деформациями // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. - № 2. – С. 198–207.
3. Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В. Остаточные напряжения: теория и приложения. – М.: Наука, 1982. – 112 с.
4. Соколов А.Г, Стружанов В.В. Об одной задаче оптимизации напряженного состояния в упругом теле // Прикл. мат. и механика. – 2001. – Т. 65. - № 2. – С. 317–322.
5. Туктамышев В.С., Лохов В.А., Няшин Ю.И. Независимое управление напряжениями в неоднородных системах с собственными деформациями // Математические методы и физико-механические поля. – 2012. - № 4. – С. 131–142.
6. Cubela D. The research of technological parameters influence on the process of nitinol fabrication and plastic deformation // Metalurgija. – 2006. – Vol. 45. - № 1. – P. 61–66.
7. Nyashin Y, Lokhov V, Ziegler F. Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain // ZAMM – Z. Angew. Math. Mech. – 2005. – Vol. 85. - № 8. – P. 557–570.
8. Nyashin Y., Shishlyaev V. Analytic creep durability of rotating uniform disks // International Journal of Rotating Machinery. – 1998. – Vol. 4. - № 4. – P. 249–256.
9. Rafalski P. Orthogonal projection method. II. Thermoelastic problem // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Tech. - 1969. – Vol. 17. - № 2. – P. 69–74.
10. Ziegler F. Mechanics of Solids and Fluids, 2nd ed. – New York, Springer, 1995. – 911 p.

Рецензенты:

Акулич Ю.В., д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической механики, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», г. Пермь.

Кротов Л.Н., д.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой прикладной физики, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», г. Пермь.