УДК 517.925.51

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Конашенко А.В. , Родионова Г.С.

ГБОУ ВПО «Смоленский государственный университет», Смоленск, Россия (214000, Смоленск, ул. Пржевальского, 4), e-mail: rectorat@smolgu.ru

В работе рассматриваются квазилинейные системы дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающие построение систем первого приближения. Подробно рассмотрен пример использования критерия для системы с постоянными коэффициентами пятого порядка. В данной статье рассматривается устойчивость и асимптотическая устойчивость решений соответствующих систем по Ляпунову. Получены модифицированные условия устойчивости в терминах коэффициентов матриц данных систем линейных дифференциальных уравнений, причем основные теоремы данной работы содержат необходимые и достаточные условия устойчивости. Кроме того, получены результаты, касающиеся устойчивости соответствующих возмущенных систем. Результаты данной работы могут быть полезны для исследователей, занимающихся математическим моделированием реальных задач, при создании моделей которых используются системы линейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: устойчивость, неустойчивость, возмущения, линейная система дифференциальных уравнений порядка n, условие Рауса – Гурвица.

MODIFIED STABILITY CRITERION OF THE SOLUTIONS OF LINEAR AND QUASILINEAR SYSTEMS OF ARBITRARY ORDER

Konashenko A.V., Rodionova G. S.

Smolensk State University, Smolensk, Russia (214000, Smolensk, Przhevalskogo street, 4), e-mail: rectorat@smolgu.ru

We consider quasilinear system of differential equations of order n, allowing the construction of a first- approximation. Considered in detail an example of using the criterion for a system with constant coefficients of the fifth order. The main issues examined in this article is the question of stability and asymptotic stability of solutions of the corresponding systems of Lyapunov. Obtained modified conditions for stability in terms of the coefficients of the matrices of the systems of linear differential equations, with the main theorem of this work you contain both necessary and sufficient conditions for stability. Also obtained results concerning the stability of the corresponding perturbed systems. The results of this work can be useful for all researchers involved in the mathematical modeling of any real problems in the models.

Keywords: stability, instability, disturbance, the linear system of differential equations of order n, Routh – Hurwitz condition.

Об устойчивости квазилинейной системы дифференциальных уравнений произвольного порядка

Данная работа является непосредственным продолжением работы «Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений второго, третьего и четвертого порядка» [6].

Рассмотрим произвольную квазилинейную систему дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающую построение системы первого приближения.

Пусть система первого приближения данной системы имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dX_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dX_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ – постоянные действительные коэффициенты, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные функции параметра t. Составим соответствующее характеристическое уравнение системы (1):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Далее, раскрывая левую часть (2), получаем уравнения в случаях четного и нечетного *n*:

1) для $n = 2k, k \in N$:

$$\lambda^{2k} - \lambda^{2k-1}B_1 + \lambda^{2k-2}B_2 - \dots + \lambda^2 B_{2k-2} - \lambda B_{2k-1} + \Delta A = 0, \tag{3}$$

2) для $n = 2k+1, k \in N$:

$$-\lambda^{2k+1} + \lambda^{2k}B_1 - \lambda^{2k-1}B_2 + \lambda^{2k-2}B_3 - \dots + \lambda^2 B_{2k-1} - \lambda B_{2k} + \Delta A = 0, \tag{4}$$

где ΔA - определитель матрицы системы первого приближения (1),

$B_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$,

$\dots$

$B_k = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} M_{\alpha_i \beta_j}$, *где* $k \in [1;n]$, α_i, β_j *содержит по* k, *неравных между собой элементов,*

$\dots$

$B_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} M_{\alpha_i \beta_j}$, *где* α_i, β_j *содержит по* $n-1$, *неравных между собой элементов,*

α_i – набор индексов оставляемых строк, содержащих *k* элементов не равных между собой;

β_j – набор индексов оставляемых столбцов, состоящих из *k* элементов, не равных между собой.

Доказательства соотношений (3) и (4) получаются в результате вычисления определителей произвольного порядка методом разложения по строкам и столбцам. Отметим, что достаточным условием асимптотической устойчивости решений линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является отрицательность действительных частей всех корней характеристического уравнения [1,2,5].

Таким образом, необходимым условием устойчивости нулевого решения в рассматриваемой ситуации является отрицательность коэффициентов уравнений (3) и (4), а для получения его достаточных условий используется теорема Рауса – Гурвица [3,4]. Составим матрицу Гурвица в случаях четного и нечетного n:

1) $n = 2k, k \in N$:

$$\begin{pmatrix} -B_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -B_3 & B_2 & -B_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -B_{2k-1} & B_{2k-2} & -B_{2k-3} & \dots & 0 \\ 0 & \Delta A & -B_{2k-1} & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{2k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta A \end{pmatrix}; \qquad (5)$$

2) $n = 2k+1, k \in N$:

$$\begin{pmatrix} -B_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -B_3 & B_2 & -B_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -B_{2k-1} & B_{2k-2} & \dots & \dots & 0 \\ -\Delta A & B_{2k} & -B_{2k-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta A & \dots & -B_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -B_{2k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\Delta A \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Далее для составленных матриц (5), (6) используется критерий Рауса – Гурвица [3,4], который заключается в положительности всех миноров полученных матриц.

Пример использования критерия для квазилинейной системы дифференциальных уравнений пятого порядка

При моделировании реальных задач исследователи получают системы дифференциальных уравнений, порядок которых чаще всего не превосходит пяти. Для систем второго и третьего порядка, используя полученные теоремы [6], достаточно легко оценить устойчивость нулевого решения исходной системы. Для систем дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядка при подсчете определителей, возможно, потребуются системы компьютерной математики.

В качестве примера подробно рассмотрим условие асимптотической устойчивости решений для систем 5-го порядка. Характеристическое уравнение (2) примет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Уравнение (4) в данном случае примет вид:

$$-\lambda^5 + B_1\lambda^4 - B_2\lambda^3 + B_3\lambda^2 - B_4\lambda + B_5 = 0 , \qquad (7)$$

где $B_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{55}$,

$B_2 = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} M_{\alpha_i\beta_j}$, $B_3 = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} M_{\alpha_i\beta_j}$, $B_4 = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} M_{\alpha_i\beta_j}$, $B_5 = \Delta A$, причем α_i, β_j содержит в B_2 по 2 элемента, в B_3 по 3, в B_4 по 4 элемента, не равных между собой.

Необходимым условием устойчивости в рассматриваемой ситуации будет отрицательность коэффициентов уравнения (7): $B_1 < 0,\ B_2 > 0,\ B_3 < 0,\ B_4 > 0,\ B_5 < 0.$

Для получения достаточных условий асимптотической устойчивости нулевого решения исходной системы составим матрицу Гурвица (8):

$$\begin{pmatrix} -B_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -B_3 & B_2 & -B_1 & 1 & 0 \\ -B_5 & B_4 & -B_3 & B_2 & -B_1 \\ 0 & 0 & -B_5 & B_4 & -B_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_5 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

и потребуем положительность всех ее диагональных миноров:

$$\begin{vmatrix} -B_1 & 1 & 0 & 0 \\ -B_3 & B_2 & -B_1 & 1 \\ -B_5 & B_4 & -B_3 & B_2 \\ 0 & 0 & -B_5 & B_4 \end{vmatrix} > 0 ,$$

$$\begin{vmatrix} -B_1 & 1 & 0 \\ -B_3 & B_2 & -B_1 \\ -B_5 & B_4 & -B_3 \end{vmatrix} > 0 ,$$

$$\begin{vmatrix} -B_1 & 1 \\ -B_3 & B_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$-B_1 > 0,$$

$$-B_5 > 0. \tag{9}$$

Примером неустойчивой системы дифференциальных уравнений пятого порядка является система вида (1), матрица коэффициентов которой имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1+0.001 \\ -1 & 0 & -1-0.001 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Запишем соответствующее характеристическое уравнение:

$$-\lambda^5 - 5\lambda^4 - 11,001\lambda^3 - 15,0044999\lambda^2 - 26,019998\lambda - 18,013998 = 0.$$

Несмотря на то, что необходимые условия выполняются: $B_1 < 0, B_2 > 0, B_3 < 0, B_4 > 0, B_5 < 0$, достаточное условие нарушается. Существуют отрицательные диагональные миноры матрицы Гурвица, в частности (с точностью до тысячных):

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 15,004999 & 11,001 & 5 & 1 \\ 18,013998 & 26.019998 & 15,004999 & 11,001 \\ 0 & 0 & 18,013998 & 26.019998 \end{vmatrix} = -4,864 \cdot 10^3 < 0.$$

Данные вычисления были произведены с помощью систем компьютерной математики MatCAD и Mathematica 6.0.

Список литературы

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – М.: Наука и Техника, 1979. – 745 с.
3. Краснов М. Л., Киселев А. И.., Макаренко Г. И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Едиториа УРСС, 2003. – 176 с.

4. Тихонов А.Н., Ильина В.Л., Свешников А.Г. Курс высшей математики и математической физики. Вып. 7. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука,1980. – 231 с.
5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. – М.: Наука, 1969. – 425 с.
6. Конашенко А.В., Родионова Г.С. Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений второго, третьего и четвертого порядка // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 4; URL: http://www.science-education.ru/110-9669.

Рецензенты:

Расулов К.М., д.ф-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета, г. Смоленск.

Евдокимова Г.С., д.п.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Смоленского государственного университета, г. Смоленск.

Криштоп В.В., д.ф.м.н., профессор, заведующий кафедрой «Физика», Дальневосточный государственный университет путей сообщения, г. Хабаровск, профессор Университета Kwangwoon University, Korea.