

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Романенкова Ю.С.¹

¹ГБОУ ВПО «Смоленский государственный университет», Смоленск, Россия (214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, 4), e-mail: rectorat@smolgu.ru

В работе рассматривается устойчивость дифференциальных уравнений с параметром на комплексной плоскости. Основным вопросом, изучаемым в данной статье, является вопрос устойчивости и асимптотической устойчивости решений соответствующих дифференциальных уравнений с параметром, а также вопрос существования и единственности решения задачи Коши. В работе сформулированы теоремы о существовании и единственности решения, а также о непрерывности и дифференцируемости решения по параметру и начальным данным. Определяются два типа устойчивости. Первый является переносом классического определения устойчивости на случай уравнения в комплексной области. Второй обобщает классическое определение. Сформулирована теорема об устойчивости, которая относится и к первому, и ко второму типу устойчивости. Данная теорема проиллюстрирована конкретным примером.

Ключевые слова: устойчивость, асимптотическая устойчивость, неустойчивость, условие Липшица, существование, непрерывность, дифференцируемость решений.

ABOUT STABILITY FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A PARAMETER ON THE COMPLEX PLANE

Romanenkova Y.S.¹

¹Smolensk State University, Smolensk, Russia (214000, Smolensk, Przhevalskogo street, 4), e-mail: rectorat@smolgu.ru

This paper considers the stability of differential equations with a parameter in the complex plane. The main issues examined in this article is the question of stability and asymptotic stability of solutions of the corresponding differential equations with a parameter, as well as the question of the existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem. We formulate the theorem on the existence and uniqueness of solutions, as well as the continuity and differentiability of solutions to the parameter and the initial data. Defines two types of stability. The first is the transfer of the classical definition of stability in case of equations in the complex domain. The second generalizes the classical definition. Formulated the theorem on stability, which refers to the first and second type of stability. This theorem is illustrated by a specific example.

Keywords: stability, asymptotic stability, instability, Lipschitz condition, existence, continuity, differentiability of solutions.

Введение

Пусть дано дифференциальное уравнение I порядка:

$$\frac{df}{dz} = F(f, z). \quad (1)$$

Рассмотрим более общую постановку задачи, когда правая часть $F(f, z)$ уравнения (1) зависит от некоторого параметра t ,

$$\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t),$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$,

причем для любого t выполняются условия теоремы существования и единственности и

$f(z(t), t) = u(t) + iv(t)$ –

решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию:

$$f(z_0) = u_0 + i v_0,$$

где $f(z_0)$ некоторая функция параметра t ($z_0 = z(t_0)$).

Замечание 1. Параметр t может возникнуть либо из-за изменения начальных данных в задаче, либо может играть роль времени, если дифференциальное уравнение возникло в процессе описания какого-либо динамического процесса. К тому же параметр t может быть как действительным, так и комплексным.

1. Теория устойчивости дифференциальных уравнений с параметром на комплексной плоскости

Определение 1. Решение $f(z(t), t)$ дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $f(z_0) = f_0$, называется устойчивым при $t \in [a; +\infty)$ ($a \in R$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при любом $t > a$ для любого $f^1(z(t), t)$, удовлетворяющего условию: $f^1(z_0) = f_0^1 = u_0^1 + i v_0^1$ выполняется неравенство:

$|f(z(t), t) - f^1(z(t), t)| < \varepsilon$, если $|f_0 - f_0^1| < \delta$, где $f(z(t), t)$ – решение, соответствующее начальному условию $f(z_0) = f_0$, $f^1(z(t), t)$ – решение, соответствующее начальному условию $f(z_0) = f_0^1$ [3].

2. Асимптотическая устойчивость

Определение 2. Решение $f(z(t), t)$ дифференциального уравнения (1) называется асимптотически устойчивым, если:

1) оно устойчиво по параметру, т. е.:

для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при любом $t \geq a$ для любого $f^1(z(t), t)$ удовлетворяющего условию: $f^1(z_0) = f_0^1 = u_0^1 + i v_0^1$ выполняется неравенство:

$$|f(z(t), t) - f^1(z(t), t)| < \varepsilon, \text{ если } |f_0 - f_0^1| < \delta;$$

2) разность между исходным решением и решением с возмущенными начальными данными стремится к 0, при $t \in [a; +\infty)$ ($a \in R$): $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(z(t), t) - f^1(z(t), t)| = 0$.

Замечание 2. В случае асимптотически устойчивого решения при отклонении начальных данных $f^1(z_0) = f_0^1$ на достаточно малую величину δ амплитуда отклонения неограниченно убывает (стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$).

Определение 3. Если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного из решений $f(z(t), t)$ неравенства $|f(z(t), t) - f^1(z(t), t)| < \varepsilon$ не выполняется, то решение $f^1(z(t), t)$ называется неустойчивым.

Замечание 3. Это первый тип устойчивости дифференциальных уравнений с параметром на

комплексной плоскости, он аналогичен устойчивости по Ляпунову для дифференциальных уравнений в действительной области.

Рассмотрим второй тип устойчивости. Рассмотрим ситуацию, когда $z(t_0) = z_0^1$, $z(t_0) = z_0^2$ аргумент z принимает близкие, но не совпадающие значения $|z_0^1 - z_0^2| < \delta$ [1; 6].

Определение 4. Решение $f^1(z(t), t)$ дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $f^1(z_0^1) = f_0^1$ и $f^2(z_0^2) = f_0^2$ называется устойчивым при $t \in [a; +\infty)$

($a \in R$), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ и $\delta_2 = \delta_2(\delta_1(\varepsilon)) > 0$, такие, что при любом z_0^2 , если $|z_0^1 - z_0^2| < \delta_2$, то $|f(z_0^1) - f(z_0^2)| < \delta_1$ и для любого $t > a$ выполняется неравенство: $|f^1(z(t), t) - f^2(z(t), t)| < \varepsilon$, где $f^1(z(t), t)$ – решение, соответствующее начальному условию $f(z_0^1) = f_0^1$, $f^2(z(t), t)$ – решение, соответствующее начальному условию $f(z_0^2) = f_0^2$.

Определение 5. Решение $f^1(z(t), t)$ дифференциального уравнения (1) называется асимптотически устойчивым, если:

1) оно устойчиво по параметру, т. е.:

для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ и $\delta_2 = \delta_2(\delta_1(\varepsilon)) > 0$, такие, что при любом z_0^2 , если $|z_0^1 - z_0^2| < \delta_2$, то $|f(z_0^1) - f(z_0^2)| < \delta_1$ и для любого $t \geq a$ выполняется неравенство:

$$|f^1(z(t), t) - f^2(z(t), t)| < \varepsilon;$$

2) разность между исходным решением и решением с возмущенными начальными данными стремится к 0, при $t \rightarrow +\infty$ ($a \in R$): $\lim_{t \rightarrow \infty} |f^1(z(t), t) - f^2(z(t), t)| = 0$.

Замечание 4. В момент времени $t = t_0 = a$ аргумент $z(t_0)$ принимает разные значения z_0^1, z_0^2 , но при этом может совпадать $z(a) = z_0^1 = z_0^2$. При совпадении $z_0^1 = z_0^2$ получаем первый тип устойчивости дифференциального уравнения, и решение f_0^2 будет находиться в ε — окрестности f_0^1 .

Для того чтобы найти решение хотя бы приближенно, надо знать, что оно существует и при данном начальном условии единственно. Для формулировки условия существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка введем ещё одно понятие.

Условие Липшица.

Пусть в области $D: \{ |z_0(t) - z_0^1(t)| \leq a; |f_0(z) - f_0^1(z)| \leq b; |t - t_0| \leq T \}$ задана функция $F(f, z(t), t)$, такая, что $z_0(t), z_0^1(t) \in D$ и существует некоторая константа $K > 0$, то

$$|f_0(z(t), t) - f_0^1(z(t), t)| \leq K |z_0(t) - z_0^1(t)|.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. О существовании и единственности решения дифференциального уравнения

$$\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t) \text{ с параметром.}$$

Пусть правая часть $F(f, z(t), t)$ дифференциального уравнения $\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t)$ является непрерывной функцией и удовлетворяет условию Липшица по $f(z(t), t)$, тогда дифференциальное уравнение $\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t)$ в некоторой области $D: \{ |z_0(t) - z_0^1(t)| \leq a; |f_0(z) - f_0^1(z)| \leq b; |t - t_0| \leq T \}$ допускает единственное решение $f = f(z(t), t)$, аналитическое внутри круга $|z - z_0| = h$, которое приводит к f_0 при $z = z_0$.

Предположение о единственности решения влечет за собой непрерывность и дифференцируемость общего решения $f = f(z(t), t)$ уравнения $\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t)$.

Теорема 2. О зависимости решения дифференциального уравнения $\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t)$ от параметра.

Правая часть $F(f, z(t), t)$ дифференциального уравнения (1) непрерывна по всем аргументам в области $D: \{ |z_0(t) - z_0^1(t)| \leq a; |f_0(z) - f_0^1(z)| \leq b; |t - t_0| \leq T \}$, и функция $F(f, z(t), t)$ удовлетворяет условию Липшица по $f(z(t), t)$, а $f = f(z(t), t)$ – решение дифференциального уравнения (1) с начальными условиями $f(z_0) = f_0$, определено при $|z_0(t) - z_0^1(t)| \leq a$ и выполняется условие $|f_0(z) - f_0^1(z)| \leq b$, тогда решение $f = f(z(t), t)$ непрерывно зависит от t .

Теорема 3. О дифференцируемости решения дифференциального уравнения

$$\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t) \text{ по параметру.}$$

Если дано дифференциальное уравнение $\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t)$, в котором правая часть $F(f, z(t), t)$ определена в области $D: \{ |z_0(t) - z_0^1(t)| \leq a; |f_0(z) - f_0^1(z)| \leq b; |t - t_0| \leq T \}$ и функция F и ее производные $\frac{\partial F}{\partial z}$ по z и $\frac{\partial F}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^p F}{\partial t^p}$ по t до p -го порядка ($p \geq 1$) непрерывны по совокупности z, f, t и ограничены, то решение $f(z(t), t)$, такое, что $f(z_0) = f_0$ и $|f_0(z) - f_0^1(z)| \leq b$ при $|z_0(t) - z_0^1(t)| \leq a, |t - t_0| \leq T$, будет непрерывно дифференцируемо по t до p -го порядка

включительно, то есть, $\frac{\partial f}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^p f}{\partial t^p}$ непрерывные в D [4].

Следствие. Решение дифференциального уравнения $\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t)$ непрерывно дифференцируемо по начальным данным.

Далее введем необходимое и достаточное условие устойчивости дифференциального уравнения $\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t)$.

Теорема 4. Об устойчивости дифференциального уравнения $\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t)$ по параметру.

Решение $f(z(t), t)$ дифференциального уравнения $\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t)$ устойчиво тогда и только тогда, когда для всякого $t \geq a$ в некоторой окрестности точки z_0 решение $f(z(t))$ удовлетворяет неравенству $|\frac{df}{dz}| < 1 \Leftrightarrow |F(f, z(t), t)| < 1$.

В качестве **примера** рассмотрим уравнение:

$$\frac{df}{dz} - f \cdot \operatorname{ctg} z = \frac{2}{t} \cdot \sin z;$$

$$\frac{df}{dz} - f \cdot \operatorname{ctg} z = 0;$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{\cos z}{\sin z} dz;$$

$$\ln |f| = \ln |\sin z| + \ln c;$$

$$f = c \cdot \sin z.$$

Варьируем постоянную

$$f = c(z) \cdot \sin z;$$

$$f' = c'(z) \cdot \sin z + c(z) \cdot \cos z.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$c'(z) \cdot \sin z + c(z) \cdot \cos z - c(z) \cdot \cos z = \frac{2}{t} \cdot \sin z;$$

$$c'(z) = \frac{2}{t};$$

$$c(z) = \frac{2}{t} \cdot z + c_1.$$

Тогда решение примет вид

$$f(z) = \frac{2}{t} \cdot z \cdot \sin z + c_1 \cdot \sin z.$$

Рассмотрим частное решение при $c_1 = 0$ и $z \in L$, где $L = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости переменного $z = x + iy$.

Проверим решение на устойчивость, т.е. $|\frac{2z}{t} \cdot \sin z| < 1$.

Решение $f(z, t)$ — устойчиво, при $t \geq 3$.

Список литературы

1. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков : ОНТИ, 1939. – 719 с.
2. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – М. : Наука и Техника, 1979. – 745 с.
3. Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения : учебное пособие. – М. : МГИУ, 2007. – 254 с.
4. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М. : Иностранная литература, 1962. – 362 с.
5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : Мир, 1970. – 720 с.
6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. – М. : Наука, 1969. – 425 с.

Рецензенты:

Расулов К.М., д.ф.-м.н., профессор Смоленского государственного университета, г. Смоленск.
Евдокимова Г.С., д.п.н., зав. кафедрой прикладной математики, профессор Смоленского государственного университета, г. Смоленск.

Бичурин М.И., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой ПТРА, Новгородский государственный университет, г. Великий Новгород.