

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРИ СОУДАРЕНИИ С ЖЕСТКИМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

Юганова Н.А.

Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова (Россия, 432700 г. Ульяновск, пл. 100-летия В.И. Ленина, д.4), кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой технологии, yuganov_vs@mail.ru

Предлагается частотный метод решения задачи о продольных колебаниях стержней ступенчато-переменного сечения с учетом или без учета рассеяния энергии при соударении с жестким препятствием. Уравнение продольных колебаний стержня преобразуется по Лапласу при наличии ненулевых начальных условий. Решается краевая задача, заключающаяся в нахождении преобразованных по Лапласу краевых продольных сил как функций краевых перемещений. Затем составляется система уравнений равновесия узлов, решая которую, строятся амплитудо-фаза-частотные характеристики (АФЧХ) для интересующих сечений стержня. Осуществляя обратное преобразование Лапласа, строится переходный процесс. В качестве тестового примера рассматривается стержень постоянного сечения конечной длины. Дается сопоставление с известным волновым решением. Предлагаемая методика динамического расчета стержня при соударении с жестким препятствием допускает обобщения на произвольную стержневую систему при наличии неограниченного количества упруго-присоединенных масс, при произвольном силовом воздействии, приложенном на концах и по длине стержня.

Ключевые слова: продольные колебания стержня, частотный метод.

LONG ITUDINAL OSCILLATIONS RODS WITH A RIGID OBSTACLE

Yuganova N.A.

Ulyanovsk Stat Pedagogical University (4, square of the 100-anniversary of V.I. Lenin, 432700 Ulyanovsk, Russia), Department of technical disciplines, candidate of technical sciences, head of the department, yuganov_vs@mail.ru

Frequency method is proposed for solving the problem of longitudinal vibrations of rods stepped-section with or without energy dissipation in a collision with a rigid obstacle. Equation of longitudinal vibrations of a rod Laplace transforms in the presence of non-zero initial conditions. We solve the boundary value problem, which consists in finding the Laplace transformed boundary longitudinal force as a function of boundary movements. Then is a system of equilibrium equations of nodes which are constructed by solving the amplitude-phase-frequency characteristics (APFC) for interested sections of the rod. Carrying out the inverse Laplace transform, construct the transition process. As an example, the test rod of constant cross-section of finite length. provides a comparison with the known wave solution. The proposed method of calculating the dynamic rod in a collision with a rigid barrier can be generalized to an arbitrary system in the presence of stem unlimited number of elastically attached masses for arbitrary force action, attached at the ends and along the length of the rod.

Keywords: longitudinal vibrations of the rod, the frequency method.

Рассмотрим частотный метод решения задачи о продольных колебаниях стержней ступенчато-переменного сечения с учетом или без учета рассеяния энергии при соударении с жестким препятствием, который будем сравнивать с известным волновым решением [2] и решением в виде ряда по формам колебаний (14) [2].

Дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня с учетом сил внутреннего сопротивления имеет вид [1]:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - EF\gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (1)$$

Зададим следующие граничные и начальные условия:

$$u|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0; \quad u|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=l} = -V_0. \quad (2)$$

Преобразуем уравнение (1) и граничные условия (2) по Лапласу при заданных начальных условиях (2). Тогда уравнение (2) и граничные условия (2) запишутся следующим образом:

$$\mu p^2 U - EF \frac{d^2 U}{d x^2} (1 + \gamma p) = -\mu V_0; \quad (3)$$

$$U|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{d U}{d x} \right|_{x=l} = 0,$$

где $U = U(p)$ – преобразованные по Лапласу перемещения точек стержня; p – параметр преобразования Лапласа.

Уравнение (3) без учета рассеяния энергии (при $\gamma = 0$) примет вид:

$$\frac{d^2 U}{d x^2} - \frac{\mu}{EF} p^2 U = \frac{\mu V_0}{EF}. \quad (4)$$

Для полученного неоднородного дифференциального уравнения решается краевая задача, заключающаяся в нахождении преобразованных по Лапласу краевых продольных сил, как функций краевых перемещений.

Для этого рассмотрим однородное уравнение продольных колебаний стержня с учетом рассеяния энергии

$$\frac{d^2 u}{d x^2} - \frac{\mu p^2}{EF(1 + p\gamma)} u = 0. \quad (5)$$

Обозначая

$$a = -\frac{\mu}{EF(1 + p\gamma)} p^2 l^2$$

и переходя к новой переменной $\zeta = \frac{x}{l}$, получим вместо (5)

$$\frac{d^2 u}{d \zeta^2} + a u = 0. \quad (6)$$

Если $p = i\omega$, где ω – частотный параметр, то

$$a = \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot l^2}{F \cdot E \cdot (1 + i\omega\gamma)}.$$

Решение однородного уравнения (6) имеет вид:

$$u = c_1 \cos(\alpha \zeta) + c_2 \sin(\alpha \zeta),$$

где $\alpha = \sqrt{a}$.

Постоянные интегрирования c_1 и c_2 находим из начальных условий:

$$u = u_0; \quad N = N_0,$$

$$\text{где } N = \frac{EF}{l} \frac{du}{d\zeta};$$

$$x=0: \quad \zeta=0 \Rightarrow c_1 = u_0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\alpha}{l} c_1 \sin(\alpha \zeta) + c_2 \frac{\alpha}{l} \cos(\alpha \zeta);$$

$$\frac{N_0}{EF} = c_2 \frac{\alpha}{l} \Rightarrow c_2 = \frac{N_0 l}{\alpha EF}.$$

$$\text{Т.е.} \quad u = u_0 \cos(\alpha \zeta) + \frac{N_0 l}{EF \alpha} \sin(\alpha \zeta);$$

$$N = -u_0 \frac{E \cdot F}{l} \alpha \sin(\alpha \zeta) + N_0 \cos(\alpha \zeta).$$

Данному решению соответствует следующая матрица переноса:

$$K = \begin{pmatrix} k_{uu} & k_{uN} \\ k_{Nu} & k_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha \zeta) & \frac{\sin(\alpha \zeta)}{\alpha} \\ -\alpha \sin(\alpha \zeta) & \cos(\alpha \zeta) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Подставив в формулы метода перемещений полученные выражения для элементов матрицы переноса, получим [5]:

$$S_{kn} = S_{nk} = \frac{E_{kn} F_{kn} (1 + i\omega\gamma_{kn}) \alpha_{kn}}{l_{kn}} \frac{\cos \alpha_{kn}}{\sin \alpha_{kn}}; \quad T_{kn} = T_{nk} = \frac{E_{kn} F_{kn} (1 + i\omega\gamma_{kn})}{l_{kn}} \frac{\alpha_{kn}}{\sin \alpha_{kn}} \quad (8)$$

$$\alpha_{kn} = \omega l_{kn} \sqrt{\frac{\mu_{kn}}{F_{kn} E_{kn} (1 + i\omega\gamma_{kn})}};$$

$$\begin{aligned} [u_n] &= \frac{-\mu_{kn} V_0 l_{kn}^2}{E_{kn} F_{kn} (1 + i\omega\gamma_{kn}) \alpha_{nj}} \int_0^1 \sin(\alpha_{kn} s) ds = \\ &= -\frac{\mu_{kn} V_0 l_{kn}^2}{E_{kn} F_{kn} (1 + i\omega\gamma_{kn})} \frac{1 - \cos \alpha_{kn}}{\alpha_{kn}^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [u_k] &= \frac{-\mu_{kn} V_0 l_{kn}^2}{E_{kn} F_{kn} (1 + i\omega\gamma_{kn}) \alpha_{nj}} \int_0^1 \sin(\alpha_{kn} (1-s)) ds = \\ &= -\frac{\mu_{kn} V_0 l_{kn}^2}{E_{kn} F_{kn} (1 + i\omega\gamma_{kn})} \frac{1 - \cos \alpha_{kn}}{\alpha_{kn}^2}. \end{aligned}$$

Индексы n и k указывают соответственно начало и конец участка стержня. А геометрические и физические константы с индексами nk и kn относятся к конкретному участку стержня.

Разбивая стержень на элементы, пользуясь формулами (8), составим уравнения динамического равновесия узлов. Эти уравнения представляют собой систему уравнений

для неизвестных узловых перемещений. Поскольку соответствующие коэффициенты получаются точным интегрированием, длина участков стержня не ограничена.

Решая полученную систему уравнений при $p = i\omega$, строим амплитудно-фазочастотные характеристики для интересующих нас сечений стержня. Эти АФЧХ можно рассматривать как графический образ одностороннего преобразования Фурье, который совпадает с преобразованием Лапласа при импульсных воздействиях. Поскольку все особые точки соответствующих выражений лежат левее мнимой оси, обратное преобразование можно осуществлять, полагая $p = i\omega$, т.е. используя построенные АФЧХ. Задача по построению АФЧХ, где в качестве силового воздействия фигурирует поле начальных скоростей, умноженное на плотность стержня, является вспомогательной. Обычно АФЧХ строятся от воздействия возмущающих сил, затем численным интегрированием или каким-либо иным способом осуществляется обратное преобразование Лапласа.

В качестве простого примера рассмотрим прямолинейный стержень длины l , который продольно соударяется с жестким препятствием со скоростью V_0 (рис. 1).

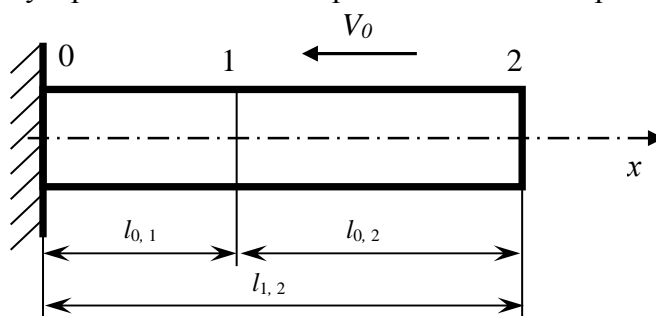


Рис. 1. Расчетная схема стержня, разбитого на два участка

Определим смещение точек стержня после удара. Будем считать, что после удара контакт между препятствием и стержнем сохраняется, т.е. отскок стержня не происходит. Если связь является неудерживающей, то задача может рассматриваться как кусочно-линейная. Критерием перехода к другому варианту решения является смена знака скорости в точке контакта.

В монографии Лаврентьева М.А., Шабата Б.В. [2] дано волновое решение уравнения (4):

$$U = -\frac{V_0}{p^2} + \frac{V_0}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ e^{-p \frac{(2kl+x)\sqrt{\rho}}{\sqrt{E}}} + e^{-p \frac{(2(k+1)l-x)\sqrt{\rho}}{\sqrt{E}}} \right\}$$

и найден его оригинал

$$u(x,t) = V_0 \left\{ -t + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\left(t - \frac{(2kl+x)\sqrt{\rho}}{\sqrt{E}} \right) \eta \left(t - \frac{(2kl+x)\sqrt{\rho}}{\sqrt{E}} \right) + \left(t - \frac{(2(k+1)l-x)\sqrt{\rho}}{\sqrt{E}} \right) \eta \left(t - \frac{(2(k+1)l-x)\sqrt{\rho}}{\sqrt{E}} \right) \right] \right\}, \quad (9)$$

где η – единичная ступенчатая функция.

Другой подход к решению этой задачи может быть осуществлен частотным методом, описанным в [4]. Применительно к данной задаче будем иметь:

$$u_n = \sin\left(\frac{2n-1}{2l} \pi x\right); \quad \omega_n = \frac{\pi}{2l} (2n-1) \sqrt{\frac{E}{\rho}};$$

$$\lambda_n = \frac{1}{\omega_n^2}; \quad \lambda_n = T_{n2}^2; \quad f = -\rho V_0;$$

$$T_{n1} = \gamma; \quad \lambda_n = \frac{4l^2 \rho}{\pi^2 (2n-1)^2 E} = T_{n2}^2;$$

$$\|u_n\| = \sqrt{\int_0^l \rho u_n^2 dx} = \sqrt{\rho \int_0^l \sin^2\left(\frac{2n-1}{2l} \pi x\right) dx} = \sqrt{\frac{\rho l}{2}};$$

$$\int_V f^T u_n dV = -\int_0^l \rho V_0 \sin\left(\frac{2n-1}{2l} \pi x\right) dx = -\rho V_0 \frac{2l}{\pi(2n-1)}.$$

Тогда:

$$U(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4 \cdot V_0 \cdot \sin\left(\frac{2n-1}{2l} \pi x\right)}{\pi(2n-1) \cdot (p^2 + \omega_n^2)}. \quad (10)$$

Найдем оригинал (11)

$$u1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4 V_0 \sin\left(\frac{2n-1}{2l} \pi x\right)}{\pi(2n-1)\omega_n} \sin \omega_n t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8V_0 \sqrt{\rho} l \sin\left(\frac{2n-1}{2l} \pi x\right) \sin\left(\frac{\pi \sqrt{E}}{2l \sqrt{\rho}} (2n-1)t\right)}{\sqrt{E} \pi^2 (2n-1)^2}.$$

Решим эту же задачу частотным способом. Из уравнения равновесия 1-go узла:

$$S_{01} U_1 = -T_{01} [u_0] \quad (12)$$

получим формулу для перемещения конца стержня U_1 .

Теперь, если тестовый стержень постоянного сечения разбить на два произвольных участка длины l_1 и l_2 (см. рис. 1), то условия равновесия узлов будут таковы:

$$\begin{aligned} (S_{0,1} + S_{1,2}) U_1 - T_{1,2} U_2 &= -T_{0,1} [u_0] - T_{1,2} [u_2]; \\ -T_{1,2} U_1 + S_{1,2} U_2 &= -T_{1,2} [u_1] \end{aligned} \quad (13)$$

В результате решения системы (13) получаем графики АФЧХ для перемещений в 1 – ом и 2 – ом сечениях (U_1 и U_2 соответственно). Так, изображение для краевого перемещения в замкнутом виде, с учетом рассеяния энергии, в случае (12) и (13) совпадает и имеет вид:

$$U(\alpha) = \frac{\mu V_0 l^2 (1 - \cos \alpha)}{\alpha^2 E F \cos \alpha (1 + i \omega \gamma)}. \quad (14)$$

Проверим совпадение результатов на конце стержня. На рис. 2 представлены графики решения (10) при $x = l_{0,1}$ и в результате решения системы (13). Они полностью совпадают.

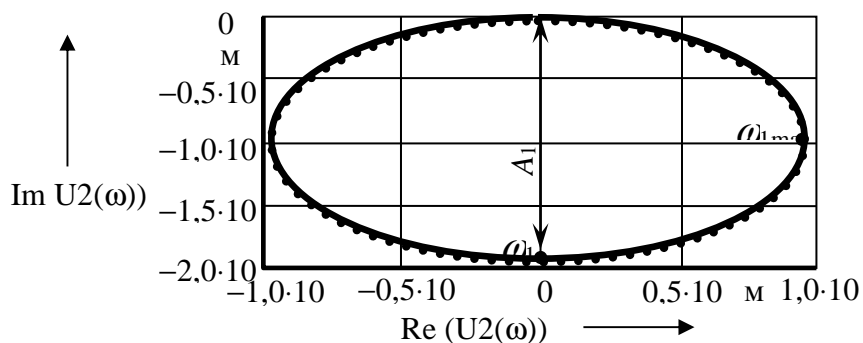


Рис. 2. АФЧХ перемещений конца стержня, построенные по формулам (10) и (13) практически совпадают

Для получения переходного процесса может быть использовано дискретное преобразование Фурье. Результат можно получить, осуществив численное интегрирование при $t=0 \dots \infty$ по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}(U(\omega) \cdot e^{i\omega t}) d\omega. \quad (15)$$

На АФЧХ (см. рис. 2) существенно себя проявляет только один видимый виток. Поэтому следует взять один член ряда (15). Из графиков на рисунке 3 видно, насколько точное решение (9) и решение по формам колебаний (11) совпадает с предлагаемым частотным решением. Погрешность не превышает 18 %. Полученное расхождение объясняется тем, что решения (9) и (11) не учитывают рассеяние энергии в материале стержня.

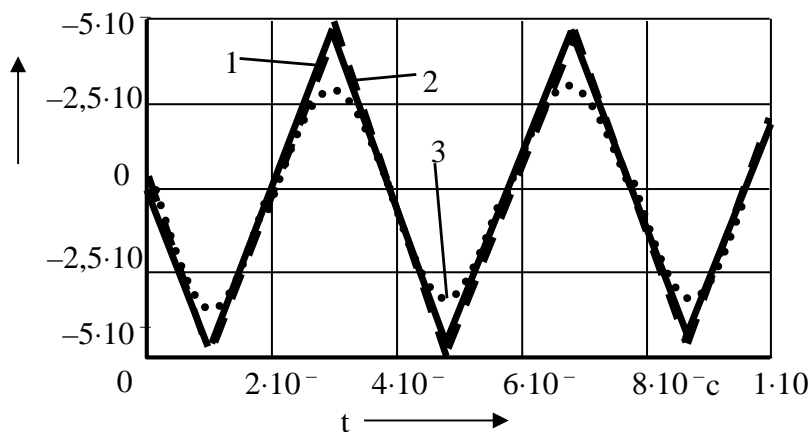


Рис. 3. Переходный процесс для конца стержня; 1, 2, 3 – графики, построенные соответственно по формулам (9), (11), (15).

В качестве более сложного примера рассмотрим задачу о продольных колебаниях ступенчатого стержня (рис. 4) с грузом на конце, соударяющегося с жестким препятствием со скоростью V_0 , причем пусть масса груза равна массе прилегающего участка стержня: $m = \rho F l$.

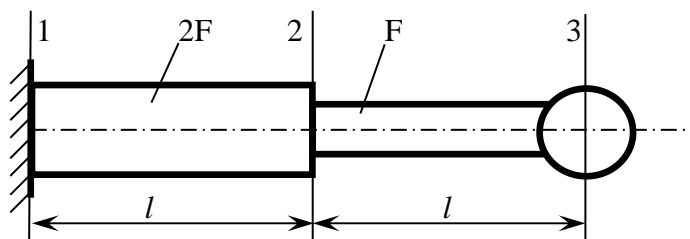


Рис. 4. Расчетная схема продольных колебаний ступенчатого стержня с грузом на конце

Введем характерные сечения 1,2,3 стержня, в которых будем вычислять перемещения. Составим систему разрешающих уравнений:

$$\begin{aligned} (S_{1,2} + S_{2,3})U_2 - T_{2,3}U_3 &= -T_{1,2}[u_1] - T_{2,3}[u_3]; \\ -T_{2,3}U_2 + (S_{2,3}U_3 - m\omega^2) &= -T_{2,3}[u_3]. \end{aligned} \quad (16)$$

В результате решения системы (16) получим графики АФЧХ (рис. 5) для перемещений во втором и третьем сечениях ($U_2(\omega)$ и $U_3(\omega)$ соответственно). Вычисления производились при следующих значениях постоянных: $l=2\text{ м}$; $E=2.1 \cdot 10^{11}\text{ Па}$; $F=0.06\text{ м}^2$; $\rho=7850\text{ кг/м}^3$; $V=10\text{ м/с}$. На полученных АФЧХ существенно себя проявляют лишь два видимых витка. Поэтому при построении переходного процесса в выбранных сечениях возьмем два члена ряда (16). Для этого предварительно необходимо определить

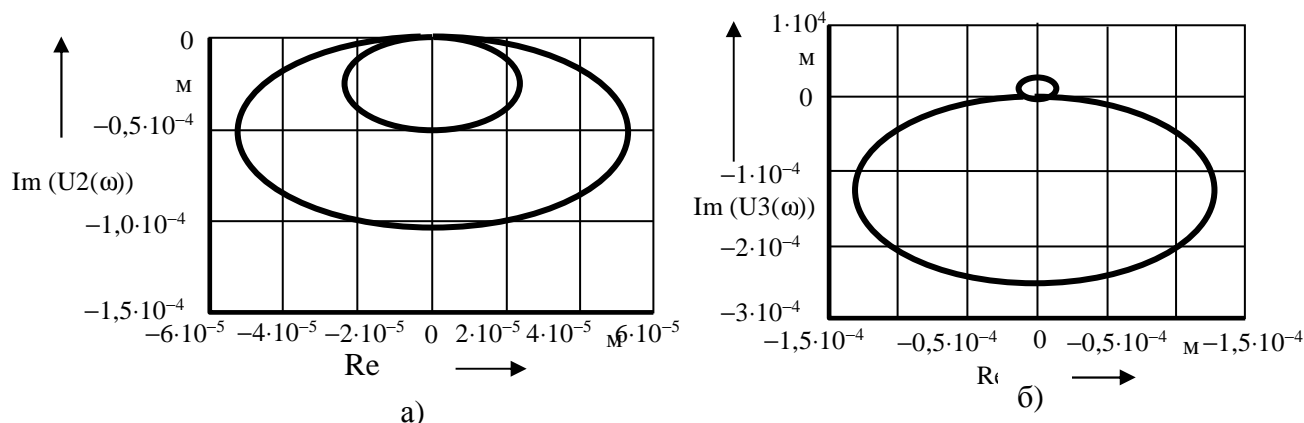


Рис. 5. АФЧХ перемещений во втором и третьем сечении ступенчатого стержня (см. рис. 4)

Аналогично по формуле (15) строится переходный процесс.

Вывод: разработан метод расчета продольных колебаний стержней при соударении с препятствием.

Список литературы

1. Бидерман, В.Л. Прикладная теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
2. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
3. Санкин, Ю.Н. Динамические характеристики вязко-упругих систем с распределенными параметрами / Ю.Н. Санкин. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1977. – 312 с.
4. Санкин, Ю.Н. Нестационарные колебания стержневых систем при соударении с препятствием / Ю.Н. Санкин, Н.А. Юганова; под общ. ред. Ю.Н. Санкина. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 174 с.
5. Sankin, Y.N. Longitudinal vibrations of elastic rods of step-variable cross-section colliding with rigid obstacle \ Yu. N. Sankin and N.A. Yuganova, J. Appl. Maths Mechs, Vol. 65, no 3, pp. 427–433, 2001.

Рецензенты:

Лебедев А.М., д.т.н., доцент, профессор Ульяновского высшего авиационного училища (института), г. Ульяновск.

Антонец И.В., д.т.н., профессор Ульяновского государственного технического университета, г. Ульяновск.