УДК 519.217.4:519.633

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА – ПЛАНКА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КРАТКОСРОЧНОЙ ТОРГОВЛИ МЕТОДОМ ДЕТАЛЬНОГО БАЛАНСА

КесиянГ.А.

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет», Краснодар, Россия (350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149), e-mail:grant.kesiyan@mail.ru

В данной работе представлено подробное решение уравнения Фоккера – Планка для модели краткосрочной торговли, которая учитывает взаимосвязь цены и объема некоторого финансового инструмента. Решение осуществлено с помощью метода детального баланса. Для проведения численных экспериментов были выбраны акции ММВБ Роснефть (ROSN). Для данных, взятых за период с 11.01.2009 по 03.06.2009 с интервалом 1 день, были подобраны параметры исследуемой модели краткосрочной торговли, а также было осуществлено численное моделирование цены, объема и плотности распределения вероятностей с помощью схемы Эйлера. Кроме того, при численной реализации, в качестве меры уровня притяжения для процесса, описывающего объем финансового инструмента, было предложено использовать среднее выборочное исходного ряда объемов. В работе также обозначены пути дальнейшего улучшения модели и связанные работы.

Ключевые слова: система стохастических дифференциальных уравнений, уравнение Фоккера-Планка, метод детального баланса.

THE SOLUTION OF THE FOKKER – PLANCK EQUATION FOR A STOCHASTIC MODEL OF SHORT-TERM TRADING BY DETAILED BALANCE

KesiyanG.A.

Kuban State University, Krasnodar, Russia (350040, Krasnodar, street Stavropolskaja, 149), e-mail: grant.kesiyan@mail.ru

In the article a detailed solution of the Fokker – Planck equation for the short-term trading model that takes into account the relationship of price and volume of a financial instrument. Solution performed using the method detailed balance. To perform numerical experiments were chosen MICEX Rosneft (ROSN). For the data taken during the period from 11.01.2009 to 03.06.2009 at intervals of 1 day, were picked up the parameters of the model short-term trading, as well as numerical simulation was carried out price, volume and density of the probability distribution using the Euler scheme. In addition, in numerical implementation, as a measure of the level of attraction to the process of describing the scope of a financial instrument, it was proposed to use the average of the sample volumes of the original series. The paper also identified ways to further improve the model and related works.

Keywords:System of stochastic differential equations, Fokker-Planck equation, method of detailed balance.

Решение уравнения Фоккера – Планка

В работе [3] мы предложили модель финансового инструмента, которая описывается следующей системой стохастических дифференциальных уравнений (СДУ):

$$\begin{cases} dX = F_X(t, X, V, I) \cdot dt + \sum_{k=1}^{m} G_k^X(t, X, V, I) \cdot \delta W_k \\ dV = F_V(t, X, V, I) \cdot dt + \sum_{k=1}^{m} G_k^V(t, X, V, I) \cdot \delta W_k \\ dI = F_I(t, X, V, I) \cdot dt + \sum_{k=1}^{m} G_k^I(t, X, V, I) \cdot \delta W_k \end{cases}, \qquad (1)$$

где δW – это бесконечно малый винеровский «шум», определяемый выражением $\delta W = \varepsilon\sqrt{dt}$, ε – это случайная величина, распределенная по нормальному закону распределения с нулевым математических ожиданием и единичной дисперсией ($\varepsilon \sim N(0,1)$), X – цена, V –объем и I – открытый интерес некоторого финансового инструмента.

При этом условную плотность распределения вероятностей $P(t_0, X_0, V_0, I_0 \Rightarrow t, X, V, I)$ состояния системы (1) можно найти из уравнения Фоккера – Планка (УФП) [1, 2, 5].

Далее, в работе [4]была построена модель краткосрочной торговли, которуюможно представить следующей системой СДУ:

$$\begin{cases} dX = (\mu_1 \cdot X + \mu_2 \cdot V)dt + \sigma_1 \cdot X \cdot \delta W \\ dV = -\beta \cdot (V - \alpha)dt + \sigma_2 \cdot \delta W \end{cases} \quad (2)$$

Системе (2) соответствует следующее УФП:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial X}((\mu_1 \cdot X + \mu_2 \cdot V) \cdot P) - \frac{\partial}{\partial V}(\beta \cdot (\alpha - V) \cdot P) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}(\sigma_1^2 \cdot X^2 \cdot P) + \frac{\partial^2}{\partial X \partial V}(\sigma_1 \cdot X \cdot \sigma_2 \cdot P) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial V^2}(\sigma_2^2 \cdot P) \end{aligned}, \quad (3)$$

где $P = P(t_0, X_0, V_0 \Rightarrow t, X, V)$.

Для решения данного уравнения воспользуемся принципом детального баланса [2].

УФП (3) можно записать в следующем виде:

$$\partial_t P(x,t) = -\sum_i \partial_i [A_i(x) P(x,t)] + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial_i \partial_j [B_{ij}(x) P(x,t)] \quad (4)$$

Цена X и объем V являются четными переменными, то есть выполняется равенство:

$$\varepsilon \begin{bmatrix} X \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ V \end{bmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

С учетом вышеуказанной четности, необходимые и достаточные условия детального баланса для уравнения Фоккера – Планка следующие:

$$\begin{aligned} J(x \mid x') P_s(x') &= J(x' \mid x) P_s(x) \\ A_i(x) P_s(x) &= \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}[B_{ij}(x) P_s(x)] \end{aligned}, \quad (5)$$

где $P_s(x)$ – стационарная плотность распределения вероятностей, $J(x|x')$ – вероятность скачка.

В нашем случае x– это вектор, состоящий из цены и объема, то есть $x = \{X, V\}$, а коэффициенты сноса и диффузии уравнения (4) могут быть записаны в следующей матричной форме:

$$A=\begin{bmatrix}\mu_1 X+\mu_2 V\\ \beta(\alpha-V)\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 X^2 & \sigma_1\sigma_2 X\\ \sigma_1\sigma_2 X & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

Потребуем выполнение условий детального баланса. Второе уравнение (5) приводит к следующей системе:

$$\begin{cases}(\mu_1 X+\mu_2 V)P_s=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial}{\partial X}(\sigma_1^2 X^2 P_s)+\dfrac{\partial}{\partial V}(\sigma_1\sigma_2 X\cdot P_s)\right]\\ \beta(\alpha-V)P_s=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial}{\partial X}(\sigma_1\sigma_2 X\cdot P_s)+\dfrac{\partial}{\partial V}(\sigma_2^2 P_s)\right]\end{cases} \tag{6}$$

Систему (6) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases}(\mu_1 X+\mu_2 V)P_s-\sigma_1^2 XP_s=\dfrac{1}{2}\sigma_1^2 X^2\dfrac{\partial P_s}{\partial X}+\dfrac{1}{2}\sigma_1\sigma_2 X\dfrac{\partial P_s}{\partial V}\\ \beta(\alpha-V)P_s-\dfrac{1}{2}\sigma_1\sigma_2 P_s=\dfrac{1}{2}\sigma_1\sigma_2 X\dfrac{\partial P_s}{\partial X}+\dfrac{1}{2}\sigma_2^2\dfrac{\partial P_s}{\partial V}\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\sigma_2/(\sigma_1 X)$ и вычтем из него второе, получим следующее выражение:

$$P_s\left[\frac{\sigma_2(\mu_1 X+\mu_2 V)}{\sigma_1 X}-\beta(\alpha-V)-\frac{\sigma_1\sigma_2}{2}\right]=0 \tag{7}$$

При этом в качестве второго уравнения системы можно выбрать любое уравнение из (6). Тривиальное решение уравнения (7) $P_s=0$ нам не подходит, поэтому уравнение (7) даст следующее ограничение на решение:

$$V=\frac{\sigma_1^2\sigma_2+2\beta\alpha\sigma_1-2\sigma_2\mu_1}{2(\frac{\sigma_2\mu_2}{X}+\sigma_1\beta)} \tag{8}$$

P_s найдем из второго уравнения (6).

Общее решение выражается через произвольную функцию сложного аргумента:

$$P_s=F_1\left(V-\frac{\sigma_2\ln(X)}{\sigma_1}\right)e^{\left(\frac{2\beta(\alpha-V)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\beta\ln(X)}{\sigma_1^2}-1\right)\ln(X)} \tag{9}$$

В случае если объем торгов равен нулю V=0, то в модели краткосрочной торговли остается только цена X, распределения вероятностей которой будет иметь логнормальный вид:

$$P_s(X,0)=\frac{1}{\sigma_1 X\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left\{-\frac{\left[\ln\frac{X}{X_0}-\mu_1\right]^2}{2\sigma_1^2}\right\} \qquad (10)$$

Найдем решение задачи Коши для уравнения (9) с начальным условием (10).

Подставляя в общее решение (9) начальные данные (10), получим:

$$F_1\left(-\frac{\sigma_2\ln(X)}{\sigma_1}\right)=\frac{e^{-\left[\ln\frac{X}{X_0}-\mu_1\right]^2/2\sigma_1^2}}{\sigma_1 X\sqrt{2\pi}}\Big/ e^{\left(\frac{2\beta\alpha}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\beta\ln(X)}{\sigma_1^2}-1\right)\ln(X)} \qquad (11)$$

Введем следующее обозначение:

$$u=-\frac{\sigma_2\ln(X)}{\sigma_1},$$

откуда определяем X:

$$X=e^{-\frac{u\sigma_1}{\sigma_2}}$$

Отсюда находим функцию F_1:

$$F_1(u)=\frac{e^{-\left[-\frac{u\sigma_1}{\sigma_2}-\ln(X_0)-\mu_1\right]^2/2\sigma_1^2}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\Big/ e^{-\left(\frac{2\beta\alpha-\beta u}{\sigma_1\sigma_2}-1\right)\frac{u\sigma_1}{\sigma_2}-\frac{u\sigma_1}{\sigma_2}} \qquad (12)$$

Итоговое решение получается путем подстановки $F_1(u)$ в (9), где u определяется выражением:

$$u=V-\frac{\sigma_2\ln(X)}{\sigma_1}$$

Таким образом, с помощью метода детального баланса получили стационарную плотность распределения вероятностей P_s при ограничении (8).

Численные эксперименты

В качестве примера были выбраны акции ММВБ Роснефть (ROSN). Данные были взяты за период с 11.01.2009 по 03.06.2009 с интервалом 1 день. Для процессов, которые определяются первым и вторым уравнением системы (2), были подобранны параметры (μ_1=0.00005,$\mu_2=10^{-8}$, σ_1=0.02,$\alpha=1.413\cdot 10^7$, β=0.05, $\sigma_2=4\cdot 10^6$) и с помощью схемы Эйлера получено решение. На рисунке 1 показаны четыре версии процесса, моделирующего цены ROSNв сочетании с исходными данными:

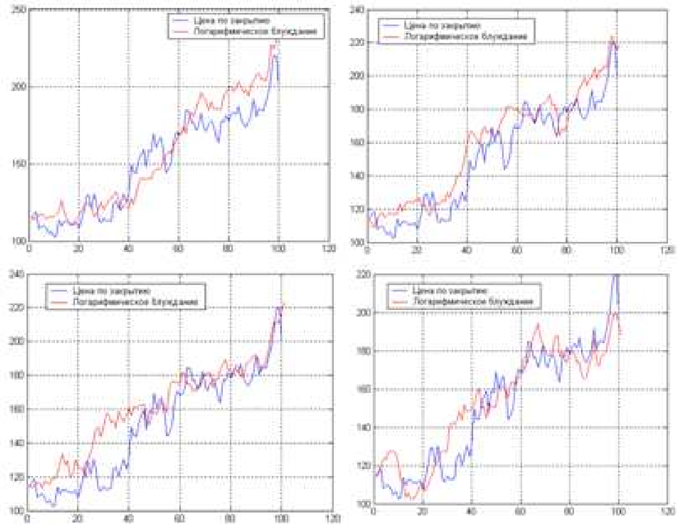

Рис. 1. Моделирование цены

В качестве меры уровня притяжения α для процесса, моделирующего объем, было выбрано среднее выборочное ряда V.На рисунке 2 продемонстрировано несколько версий данного процесса, с вышеуказанными параметрами, в сочетании с исходными данными по объему:

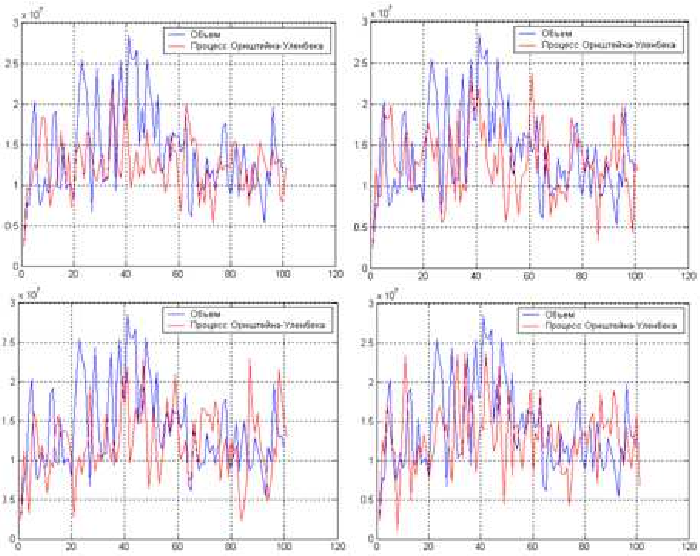

Рис. 2. Моделирование объема

Заключение

В данной работе была получена стационарная плотность распределения вероятностей для предложенной в работе [4] модели краткосрочной торговли путем решения УФП с помощью принципа детального баланса.

Для акций ММВБ Роснефть были подобраны параметры краткосрочной модели и осуществлено численное моделирование цены, объема и плотности распределения вероятностей.

При численной реализации в качестве меры уровня притяженияαдля процесса, задаваемого вторым уравнением системы (2), было предложено использовать среднее выборочное ряда V.

Дальнейшие работы могут быть связаны с идентификацией параметров предложенных моделей, вычислением ряда характеристик (среднее, дисперсия и т.д.), построением и решением модели долгосрочной торговли, учитывающей открытый интерес, выводом формул для тестирования переменной структуры параметров моделей. Также перспективным направлением является разработка краткосрочной модели, которая учитывает открытый интерес с использованием лаговых переменных.

Следует отметить, что рассмотренную в работе модель (2) можно улучшить, если в качестве второго уравнения этой системы выбрать логарифмический процесс Орнштейна – Уленбека. Выбор этой модификации будет целесообразен ввиду положительности величины объема.

Список литературы

1. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 448 с.
2. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986.
3. Кесиян Г.А., Уртенов М.Х. Стохастическая модель финансового инструмента, учитывающая взаимосвязь цены, объема и открытого интереса : материалы международной научно-практической конференции, г. София, 17-25 февраля 2013 г. / София. – София : Изд-во ООД «Бял ГРАД-БГ», 2013. – 80 с. – ISBN 978-966-8736-05-6.
4. Кесиян Г.А., Шахмликян Т.А., Уртенов М.Х. Стохастическая моделькраткосрочной торговли : материалы международной научно-практической конференции, г. Прага, 2013 г. / Прага. –Прага: Изд-во PublishingHouse«EducationandScience»s.r.o., 2013. – 112 с. – ISBN 978-966-8736-05-6.
5. Степанов С.С. [Электронный ресурс] // Стохастический мир: электрон. версия книги / Сергей С. Степанов. – [Б.м.], 2011. – С. 224-227. – Режим доступа:http://synset.com/pdf/ito.pdf(дата обращения 31.08.2012).

Рецензенты:

Семенчин Е.А., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой высшей алгебры и геометрии Кубанского государственного университета, г.Краснодар.

ЛебедевК.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета, г. Краснодар.