УДК 378

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ИЛЛЮСТРАЦИИ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА

Куликова О.В., Куликова И.В.

ФБГОУ ВПО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург, Россия (620034, г.Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66)

Представлено методическое сопровождение для проведения вычислительного эксперимента при изучении неравенства Чебышева в рамках дисциплины «Математика» на технических специальностях и направлениях подготовки в вузе. Оно дополняет дидактическое обеспечение лекционных и практических занятий при изучении теории вероятностей. Проведение вычислительного эксперимента осуществляется с помощью программ электронных таблиц Excel, поэтому его включение в учебный процесс не вызывает каких-либо затруднений. Применение информационных технологий создает благоприятные условия для овладения студентами экспериментальными методами исследования вероятностных закономерностей. Построение аналитико-синтетических рассуждений при обобщении теоретических и эмпирических результатов исследовательской деятельности выступает средством развития культуры мышления и творческих способностей студентов в учебном процессе.

Ключевые слова: формирование математических понятий, учебный вычислительный эксперимент, графическая модель, случайная величина, генерация случайных чисел.

APPLICATION COMPUTING EXPERIMENT FOR ILLUSTRATION THE CHEBYSHEV INEQUALITY IN THE LEARNING PROCESS IN THE TECHNICAL UNIVERSITY

Kulikova O.V., Kulikova I.V.

Ural State University of Railway Transport, Ekaterinburg, Russia (620034, Ekaterinburg, Kolmogorovast. 66)

In this paper we presented methodical support for computing experiment in the study of the Chebyshev inequality within the discipline "Mathematics" on technical specialties in high school. It complements the ensuring didactic lectures and practical training in the study of probability theory. Carrying out computing experiment is carried out using a spreadsheet Excel, so its inclusion in the learning process does not cause any difficulty. Application of information technology provides favorable conditions for students mastering the experimental methods of research the laws of probability. Construction of analytical and synthetic reasoning in generalizing the results of theoretical and empirical research is a means of developing a thinking culture and students creative abilities in the learning process.

Keywords: formation of mathematical concepts, learning computing experiment, a graphical model, the random variable, random number generation.

Введение

В курсе математики высшей школы неравенство Чебышева включено в систему теорем, которая получила название «Закон больших чисел» [1, 2, 4, 10]. Изложение этих теорем в рамках дисциплины «Математика» на инженерных специальностях и направлениях подготовки завершает рассмотрение основных вопросов теории вероятностей и подводит студентов к изучению раздела «Математическая статистика». В учебной литературе [1, 2, 4, 10] приводится формулировка отмеченного неравенства,его аналитическое доказательство и его применение при обосновании теорем Чебышева и Бернулли. Включение в теоретический материал небольшого количества задач[2, 4, 10], в которых предусмотрено использование неравенства Чебышева, несколько расширяет представление о содержанииэтого математического понятия.

Информация о существенных закономерностях вероятностных явлений, представленная в символизированных рассуждениях,достаточно трудно воспринимается студентами, планирующими получение инженерного образования, так как они, прежде всего,заинтересованы не в понимании того, как выводятся математические формулы, а как их можно использовать в решении практических задач и какие причинно-следственные взаимосвязи они отображают. Эффективным дидактическим средством, раскрывающим содержание понятий теории вероятностей, выступают графические модели, создающие их наглядное представление. Достижение понимания студентами различных функциональных зависимостей происходит при восприятии их графиков, построение которых требует проведение имитационного моделирования или вычислительного эксперимента.

Современное программное обеспечение персональных компьютеров позволяет не только быстро создавать большие массивы числовых данных, но и строить их графические модели, поэтому введение информационных технологий в учебный процесс расширяет банк методических идей по совершенствованию путей формирования математических понятий. Возможный вариант включения имитационного моделирования в дидактическое сопровождение для иллюстрации теоремы Бернулли предложен в публикации [5], а применение вычислительного эксперимента для построения графической модели, раскрывающей существенные взаимосвязи неравенстваЧебышева, представлено в данной работе.

Результаты и обсуждение

Отбор учебно-теоретического материала. Занимаясь изучением случайных явлений, великий русский математик П.Л. Чебышев (1821–1894) установил соотношение между дисперсией случайной величины и вероятностью превышения некоторого заданного числа отклонения её значений относительно математического ожидания. Результаты проведенного исследования нашли свое отражение в работе «О средних величинах», опубликованной в 1867 году [8, с. 221]. Запись неравенства Чебышева имеет следующий вид

$$P(|X - MX| \geq a) \leq \frac{DX}{a^2}, \tag{1}$$

где X – случайная величина, MX – математическое ожидание случайной величины X,DX – дисперсия случайной величины X, a – положительное число[3, с.115].

Неравенство (1) утверждает, что, каково бы ни было положительное число a, вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не меньше чем на a, ограничена сверху величиной, равной отношению её дисперсии к квадрату числа a. Если число a выразить в единицах σ$\left(\sigma = \sqrt{DX}\right)$, то неравенство (1) можно записать в виде

$$P(|X - MX| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}, \qquad (2)$$

где σ–стандартное отклонение случайной величины X, k – кратность σ.

В работе [1] неравенство Чебышева представлено в виде неравенства (1). При записи неравенства (1) в работах [4,10] вместо символа a используется символ ε. Введение ε затрудняет понимание смысла неравенства (1), так как ε воспринимается студентами как бесконечно малая величина, а в случае неравенства (1) положительное число a не обязательно должно быть бесконечно малой величиной. В работе [2]неравенство Чебышева представлено в виде

$$P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (3)$$

Понимание содержания неравенства (3) затрудняет интерпретация ситуации, когда правая часть становится отрицательной, что значительно осложняет процесс формирования этого понятия в учебном процессе. Обобщение результатов анализа определения понятия «неравенство Чебышева» в работах [1, 2, 4, 10] делает целесообразным использование методики его формирования, предложенной Е.С. Вентцель[1]. Изложение учебного материала в этом подходе сопровождается построением графической модели (рис. 1), иллюстрирующей расположение на оси*Ox*значений случайной величины*X*, ее математического ожидания*MX*и некоторого заданного числа *a*(точки *A* и *B*удалены от *MX*на расстояние *a*) [1, с.288].

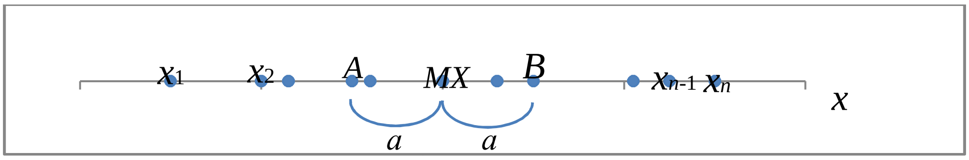

Рис. 1. Расположение значений случайной величины *X*

Представленный наглядный образ (рис. 1) визуализирует взаимосвязипонятия$P(|X - MX| \geq a)$ (вероятностьпопадания случайной точки вне отрезка *AB*), но не его соотношение с дисперсией *DX*. Утверждение, зафиксированное в неравенстве (1) аналитически доказывается как для дискретной случайной величины, так и для непрерывной случайной величины[1].

Идея экспериментального исследования. Отношение понятий*DX* и$P(|X - MX| \geq a)$ выводится аналитически и процесс рассуждения не всегда убеждает студентов не математических специальностей и направлений подготовки в его истинности, проявляющейся в объективной реальности. Построение наглядного образа этого соотношения с помощью графиков функций $y_1 = P(|X - MX| \geq k\sigma)$и $y_2 = 1/k^2$ создает условия для обсуждения со студентами проблемы взаимосвязи теоретического и эмпирического способов познания окружающей действительности.

Постановка вычислительного эксперимента. Формой экспериментальной проверки неравенства (1) для дискретных и непрерывных случайных величин может выступать выполнение лабораторно-практическогозадания «Экспериментальное определение вероятности попадания случайной величины вне заданного интервала». Цель учебно-исследовательской деятельности: составление умозаключений на основе сопоставления результатов аналитических доказательств и графического моделирования. Ход работы состоит из шести этапов: 1) формирование массива значений случайной величины *X*; 2) вычисление математического ожиданияMX, дисперсииDX и стандартного отклонения σ; 3) определение значений центрированной случайной величины $\dot{X} = X - MX$(отклонение случайной величины X от математического ожидания *MX*; 4) нахождение вероятности$P\left(|\dot{X}| \geq k\sigma\right)$при различныхзначениях$k$; 5) построение графиков функций $y_1 = P\left(|\dot{X}| \geq k\sigma\right)$и $y_2 = 1/k^2$; 6) сравнение расположенияграфиков функций y_1и y_2на координатной плоскости друг относительно друга. Рассмотрим содержание учебной деятельности предлагаемого лабораторно-практического задания.

Первый этап. Пакет программ «Анализ данных» электронных таблиц Excel имеет в своей библиотеке программу «Генерация случайных чисел» (ГСЧ) [9]. Эта программа в автоматическом режиме может создавать массивы числовых данных дискретных и непрерывных случайных величин. Согласно предельной теореме теории вероятностей распределение случайной величины будет приближаться к нормальному распределению, когда результаты наблюдений формируются под действием большого числа независимо действующих факторов [1, 2, 4], поэтому представляется целесообразным использовать его для иллюстрации неравенства (1). Объем выборочных данных *n*определяется доверительной вероятностью (надежностью) γ, стандартным отклонением σ^*и точностью оценки математического ожидания δ. Значение *n*вычисляется по формуле

$$n = \frac{t^2 \sigma^{*2}}{\delta^2}, \tag{4}$$

где *t* находится из уравнения $2\Phi(t) = \gamma$, $\Phi(t)$ – функция Лапласа [2].

В учебных задачах, как правило, γ задается значениями 0.95, 0.99 и 0.999. Например, для исследования с доверительной вероятностью $\gamma = 0.95$нормально распределенной случайной величины *X* с параметрами $a^* = 8 \pm 0.2$ и $\sigma^* = 1$, необходимо ввести в программу ГСЧ начальные условия: $a^* = 8$, $\sigma^* = 1$, $n = 100$. Программа в автоматическом режиме сформирует массив данных (таблица 1).

Таблица 1

Случайная величина *X*

7,40	6,62	7,35	11,32	5,11	2,84	9,39	8,14	12,41	8,89
5,44	4,62	7,26	4,78	6,31	10,90	8,65	9,66	10,89	9,24

8,49	4,31	10,69	9,08	4,96	5,44	6,12	9,72	10,61	8,43
10,55	6,04	7,83	9,80	7,27	6,69	7,52	6,73	8,23	5,95
10,40	6,45	7,63	11,84	7,94	9,52	8,26	6,15	8,00	10,48
11,47	3,76	6,97	7,83	8,06	8,93	9,12	10,22	8,91	7,38
3,63	6,86	11,94	6,95	7,35	9,75	8,28	5,60	7,95	6,32
7,53	7,19	9,73	9,35	12,39	9,19	6,18	4,88	5,89	6,36
10,19	8,27	12,75	7,24	4,52	5,26	11,77	9,42	4,45	7,14
5,83	7,27	6,69	9,52	6,53	5,77	8,97	9,28	9,66	7,09

Объем данных $n = 100$ удовлетворяет точности оценки математического ожидания $\delta = 0.2$при $\gamma = 0.95$. Формула (4) позволяет проверить значение δ (δ = 1.96/10 =0.196≈ 0.2, 2Ф(1.96) = 0.95, $\sigma^* = 1$).

Второй этап. Расчет математического ожидания *MX*и дисперсии *DX* осуществляется в автоматическом режиме с помощью функций СРЗНАЧ и ДИСПР электронных таблиц Excel[9]. Функции СРЗНАЧ и ДИСПР производят вычисления *MX*и *DX* по формулам

$$MX = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$DX = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^2,$$

где n – количество значений случайной величины.

Математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины *X*(таблица 1) принимают значения $MX = 7.9$, $DX = 4.7$ и $\sigma_X = 2.2$.

Третий этап. Для вычислениязначений центрированной случайной величины $|\dot{X}|$может использоваться математическая функция*ABS* электронных таблиц Excel [9]. Значения$|\dot{X}|$ранжируются по возрастанию(таблица 2).

Таблица 2.

Центрированная случайная величина $|\dot{X}|$

0,04	0,37	0,63	0,99	1,28	1,58	1,83	2,32	2,94	3,59
0,05	0,37	0,63	1,01	1,29	1,59	1,85	2,46	2,99	3,87
0,07	0,38	0,64	1,03	1,34	1,62	1,86	2,46	3,00	3,94
0,07	0,38	0,66	1,04	1,37	1,62	1,90	2,50	3,02	4,04
0,10	0,50	0,71	1,07	1,38	1,72	1,95	2,58	3,12	4,14
0,16	0,52	0,75	1,17	1,45	1,75	2,01	2,64	3,28	4,27
0,24	0,53	0,76	1,18	1,45	1,76	2,07	2,65	3,38	4,49
0,27	0,55	0,81	1,21	1,49	1,76	2,13	2,71	3,42	4,51
0,33	0,55	0,93	1,21	1,52	1,78	2,29	2,79	3,45	4,85
0,36	0,59	0,95	1,22	1,54	1,82	2,30	2,79	3,57	5,06

Четвертый этап. Экспериментально полученные значения $|\dot{X}|$позволяют найти искомую вероятность $P(|\dot{X}| \geq k\sigma)$ по формуле

$$P(|\dot{X}| \geq k\sigma) = P(|\dot{X}| \geq k\sigma_X) = \frac{m(k)}{n},$$

где $k = \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5\}$, $m(k)$ – количество $|\dot{X}| \geq k\sigma_X$,n – количество значений случайной величины X (в демонстрационном примере n = 100). Величина$m(k)$устанавливается непосредственным подсчетом количества чисел (таблица 2), значения которых удовлетворяют неравенству $|\dot{X}| \geq k\sigma_X$.

Пятый этап. Построение графиков функций$y_1 = P(|\dot{X}| \geq k\sigma)$и $y_2 = 1/k^2$ осуществляется с помощью подпрограммы Точечный график программы Мастер диаграмм электронных таблиц Excel[9] (рис. 2).

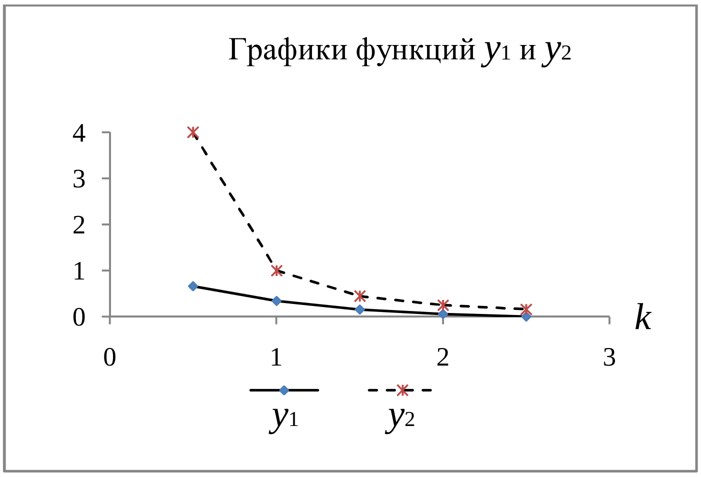

*Рис. 2.*Графики функций $y_1 = P(|\dot{X}| \geq k\sigma)$и $y_2 = 1/k^2$

Ломаная линия, соответствующая графику функции $y_1 = P(|\dot{X}| \geq k\sigma)$, соединяет точки с координатами$(k;\ m(k))$ (рис. 2). Ломаная линия, соответствующая графику функции $y_2 = 1/k^2$,соединяет точки с координатами $(k; 1/k^2)$ (рис. 2).

Шестой этап. График функции $y_1 = P(|\dot{X}| \geq k\sigma)$ располагается ниже графика функции$y_2 = 1/k^2$(рис. 2), следовательно, выполняются неравенства (2) и (1).Результаты вычислительного эксперимента согласуются с утверждением неравенства Чебышева. При увеличении kграфики функций y_1и y_2асимптотически приближаются к осиOx, а расстояние между ними уменьшается, но неравенство $y_1 \leq y_2$сохраняется.

Программа ГСЧ электронных таблиц Excel[9]может формировать значения случайных величин, имеющих нормальное, равномерное, биномиальное распределения или распределения Бернулли, Пуассона, что позволяет составлять различные лабораторно-практические задания для экспериментального определения вероятности попадания случайной величины вне заданного интервала.

Формирование понятия. Изучение неравенства Чебышева студентами технических специальностей и направлений подготовки может осуществляться в следующей последовательности: 1) символьное и вербальное определение неравенства; 2) аналитическое доказательство для дискретных и непрерывных случайных величин; 3) выполнение представленного лабораторно-практического задания; 4) решение учебных задач (определение по заданной дисперсии вероятности попадания случайной величины в некоторой симметричный относительно математического ожидания интервал или оценивание длины интервала по известной дисперсии[2, 4, 10]).

Заключение

Предложенное дополнение к методическому обеспечению по формированию одного из понятий теории вероятностей ставит своей целью включение студентов в исследовательскую деятельность, требующую освоения теоретических и экспериментальных методов познания. Прохождение выделенных четырех этапов формирования понятия «неравенство Чебышева» требует построения разнообразных аналитико-синтетических рассуждений, что создает условия для развития культуры мышления и творческих способностей студентов при изучении вероятностных закономерностей в учебном процессе [6, 7].

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.– М.: Издательство «Наука», 1969. – 576 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб.пособие для вузов. – 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с. ISBN 5-06-004211-6.
3. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей.– М.: Издательство «Наука», 1970. – 167 с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с. ISBN 5-238-00573-3.
5. Куликова О.В. Имитационное моделирование независимых повторных испытаний средствами Mathcad в учебном процессе вуза // Современные проблемы науки и образования. – 2013. - № 3. ISSN 2070–7428; URL: www.science-education.ru/ 109–9346 (дата обращения: 24.02.2014).
6. Куликова О.В.Культура мышления и критерии развития ее компонентов в учебном процессе вуза: монография. – Екатеринбург : УрГУПС, 2010. – 114 с. ISBN978-5-94614-182-6.

7. Куликова О.В., Чуев Н.П. Развитие творческих способностей и культуры мышления студентов вуза при изучении математики // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения– 2012. - №3(15). – С.120-128. ISSN 2073–0392.

8. Математика XIXвека. Т.1. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. А.Н. Колмогорова, А.П. Юшкевича. – М.: Изд-во «Наука», 1978. 256 с.

9. Минько А.А. Статистический анализ в MSExcel. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 448 с. ISBN 5-8459-0692-X.

10. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Дмитрий Письменный. – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с. – (Высшее образование). ISBN978-5-8112-2966-6.

Рецензенты:

СтружановВ.В., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник Института машиноведения УрО РАН, г.Екатеринбург.

ГотлибБ.М., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Мехатроника» Уральского государственного университета путей сообщения, г.Екатеринбург.