

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ВАРИАЦИОННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ СИНТЕЗА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Дивеев А.И.¹, Конырбаев Н.Б.²

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия (119333, Москва, ул. Вавилова, 40), e-mail: aidiveev@mail.ru

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Российский университет дружбы народов, (117198, Москва, Миклухо-Маклая, 6), e-mail: n.konyrbaev@mail.ru

Рассматривается вычислительный метод вариационного аналитического программирования. В отличие от известного метода аналитического программирования, который является развитием метода генетического программирования и использует представление математических выражений в виде упорядоченного множества целых чисел, новый метод обеспечивает поиск решения на пространстве малых вариаций базисного решения, заданного в форме кода записи аналитического программирования. Такой подход эффективен для решения задачи синтеза управления, в которой опытный исследователь может на основе анализа свойств задачи определить приблизительный вид математического выражения, близкого к искомому оптимальному решению. Использование малых вариаций и задание близкого к оптимальному решению базисного решения позволяют существенно сократить область поиска в пространстве возможных решений и время поиска оптимального решения. Определено понятие малой вариации решения в аналитическом программировании. Приведен пример решения задачи синтеза управления с помощью разработанного метода для системы третьего порядка с фазовыми ограничениями.

Ключевые слова: синтез системы управления, метод вариаций базисного решения, аналитическое программирование, генетическое программирование

NUMERICAL VARIATIONAL ANALYTIC PROGRAMMING METHOD FOR PROBLEM OF CONTROL SYSTEM SYNTHESIS

Diveev A.I.¹, Konyrbaev N.B.²

¹Institution of Russian Academy of Science Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, Russia (119333, Moscow, Vavilova str., 40)

²Peoples' Friendship University of Russia (117198, Moscow, Miklukho-Maklaya str., 6)

The computing method of variational analytical programming is treated. Unlike the already known method of analytical programming, which is a development of the method of genetic programming and uses a representation of mathematical expressions in the form of an ordered set of integers, the new method provides the research for solutions in the space of small variations of the basic solution, given in the form of analytical programming writing code. This approach is effective for solving the problem of control synthesis, in which an experienced researcher, taking as a basis of the analysis the properties of the problem, can suppose a form of close-to-optimal-solution value. The use of small variations and the close to the optimal solution basic solution assignment can significantly reduce the search space of possible solutions and the search of optimum solutions. The notion of a small variation in the analytical solutions programming is given. An example of solving the problem of synthesizing control using the method developed for the third-order system with phase constraints is given.

Keywords: synthesis of control systems, the method of variations of the basic solutions, analytical programming, genetic programming

Введение

Метод аналитического программирования [1-3] предназначен для задач, решениями которых являются нечисловые структуры. К таким задачам относится задача синтеза управления, решением которой является математическое выражение, описывающее

функциональную зависимость управления от координат пространства состояния объекта. Метод аналитического программирования представляет собой разновидность метода генетического программирования [4-6]. Код метода аналитического программирования состоит из упорядоченного множества целых чисел, которые указывают на номера кодируемых структур. Простота кодирования определяет преимущества метода аналитического программирования.

Для эффективного применения метода аналитического программирования к решению задачи синтеза управления в работе представлен метод вариационного аналитического программирования. Данный метод позволяет сузить пространство поиска и задать область поиска за счет выбора базисного решения.

Постановка задачи синтеза системы управления

Задана модель объекта управления

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, U – ограниченное замкнутое множество.

Задана область начальных значений

$$\mathbf{x}(0) \in X_0. \quad (2)$$

Заданы терминальные условия

$$\varphi_i(\mathbf{x}(t_f)) = 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (3)$$

где t_f – время окончания процесса управления, оно может быть не задано, ограничено сверху, $t_f < t^+$ и определяться выполнением терминальных условий (3).

Задан функционал качества

$$J = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

Необходимо найти управление в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где $\mathbf{h}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\forall \mathbf{x}(0) \in X_0$, решение $\mathbf{x}(t)$ системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))$, обеспечивает удовлетворение ограничениям на управление $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \in U$, достижение терминальных условий (3) и минимум функционала качества (4).

Для решения задачи используем метод вариационного аналитического программирования.

1. Метод аналитического программирования

Введем упорядоченные множества функций с определёнными количествами аргументов

$$F_i = (f_{i,1}(z_1, \dots, z_i), \dots, f_{i,m_i}(z_1, \dots, z_i)), \quad i = \overline{0, n}, \quad (5)$$

где $f_{i,j}(z_1, \dots, z_i)$ – функция под номером j с количеством аргументов i , $j = \overline{1, m_i}$, $i = \overline{0, n}$.

Объединим все множества в одно

$$F = \bigcup_{i=0}^n F_i. \quad (6)$$

Пронумеруем все элементы объединённого множества

$$F = (f_1, \dots, f_D), \quad (7)$$

где

$$D = \sum_{i=0}^n m_i, \quad (8)$$

$$f_1 = f_{0,1}, \quad f_2 = f_{0,2}, \dots, \quad f_{m_0} = f_{0,m_0}, \quad f_{m_0+1}(z) = f_{1,1}(z), \dots, \quad f_{m_0+m_1}(z) = f_{1,m_1}(z), \\ f_{m_0+m_1+1}(z_1, z_2) = f_{2,1}(z_1, z_2), \dots, \quad f_{m_0+\dots+m_n}(z_1, \dots, z_n) = f_{n,m_n}(z_1, \dots, z_n).$$

Отдельно рассмотрим множество функций без аргументов или с нулевым количеством аргументов. Данное множество для математических выражений представляет собой множество параметров или переменных

$$F_0 = (f_{0,1}, \dots, f_{0,m_0}) = (x_1, \dots, x_N, q_1, \dots, q_p). \quad (9)$$

Запись кода математического выражения в методе аналитического программирования осуществляется в форме упорядоченного множества целых чисел

$$C = (c_1, \dots, c_K), \quad (10)$$

где $c_i \in \{1, \dots, D\}$, $i = \overline{1, K}$.

Каждое число указывает на номер элемента в объединённом множестве F (7). Запись имеет префиксный порядок. Код функции в записи предшествует коду аргумента. Длина записи кода ограничена. Дополнительное множество переменных и параметров используется для корректного завершения записи. При необходимости код функции из объединённого множества используется в виде кода для элемента множества переменных или параметров.

Рассмотрим пример. Пусть задано множество функций

$$F_0 = (x, a, b, c), \quad F_1 = (-z, e^z, \cos(z)), \quad F_2 = (z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2).$$

Построим объединённое множество

$$F = (x, a, b, c, -z, e^z, \cos(z), z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2).$$

Объединённое множество содержит девять элементов $|F| = 9$. Множество переменных и параметров содержит четыре элемента $|F_0| = 4$.

Пусть задана запись из восьми элементов

$$C = (8, 5, 3, 9, 4, 6, 7, 1).$$

Определяем вид математического выражения

$$F = \left(\underbrace{x, a, b, c, -z, e^z, \cos(z), z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2}_8 \right), y = z_1 + z_2,$$

$$F = \left(\underbrace{x, a, b, c, -z, e^z, \cos(z), z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2}_5 \right), y = -z_1 + z_2,$$

$$F = \left(\underbrace{x, a, b, c, -z, e^z, \cos(z), z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2}_3 \right), y = -b + z_2,$$

$$F = \left(\underbrace{x, a, b, c, -z, e^z, \cos(z), z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2}_9 \right), y = -b + z_1 \cdot z_2,$$

$$F = \left(\underbrace{x, a, b, c, -z, e^z, \cos(z), z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2}_4 \right), y = -b + c \cdot z_2,$$

$$F = \left(\underbrace{x, a, b, c, -z, e^z, \cos(z), z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2}_6 \right), y = -b + c \cdot e^z,$$

$$F = \left(\underbrace{x, a, b, c, -z, e^z, \cos(z), z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2}_7 \right), y = -b + c \cdot e^{\cos(z)},$$

$$F = \left(\underbrace{x, a, b, c, -z, e^z, \cos(z), z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2}_1 \right), y = -b + c \cdot e^{\cos(x)}.$$

Для получения математического выражения из записи кода необходимо знать количества элементов в каждом из множеств функций: m_0, \dots, m_n и количества используемых переменных и параметров N и p .

Количество аргументов функции i и номер функции j определяем по значению элемента c_k кода математического выражения с помощью соотношений

$$i = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq c_k \leq m_0 \\ \alpha, & \text{если } \sum_{r=0}^{\alpha-1} m_r \leq c_k \leq \sum_{r=0}^{\alpha} m_r, \alpha = \overline{1, m_n} \end{cases}, \quad (11)$$

$$j = c_k - \sum_{r=0}^{i-1} m_r, \quad 1 < i \leq n. \quad (12)$$

При соответствии элемента кода c_k функции без аргументов, $i = 0$ для определения переменной x_j или параметра q_j необходимо использовать количества используемых переменных N и параметров p .

$$j = \begin{cases} c_k, & \text{если } c_k \leq N, \\ c_k - N & \text{иначе} \end{cases}, i = 0, \quad (13)$$

где код c_k соответствует переменной x_j , если $c_k \leq N$, или параметру q_j , если $N < c_k \leq m_0$.

Для описания кодов векторных математических выражений используем один набор целых чисел с определенным количеством элементов для каждого компонента векторного выражения. Пусть вектор математических выражений имеет M компонент. Выделим под каждую компоненту вектора L позиций в коде записи. Код математического выражения каждого компонента i векторного выражения содержит $k_i \leq L$ элементов, $i = \overline{1, M}$. Не используемым в формировании кода элементам задаем нулевые значения

$$C = \left(\underbrace{c_1, \dots, c_{k_1}, 0, \dots, 0}_{L}, \dots, \underbrace{c_{L(M-1)+1}, \dots, c_{L(M-1)+k_M}, 0, \dots, 0}_{L} \right), \quad (14)$$

где L – число позиций для кода одной компоненты векторного выражения, k_i – длина кода компоненты i векторного выражения, $i = \overline{1, M}$.

В коде записи векторного выражения (14) значения для элементов выполняются условия

$$c_j = 0, \text{ если } L(i-1) + k_i < j \leq Li, i = \overline{1, M}. \quad (15)$$

Для расшифровки кода векторного выражения необходимо вместе с величинами m_i , $i = \overline{1, n}$, N и p дополнительно знать число позиций L и длины кодов компонент k_i , $i = \overline{1, M}$.

Для определения корректности записи кода математического выражения используем индекс элемента. Пусть в записи кода (10) математического выражения элемент $c_j \neq 0$. Для векторного математического выражения определим него номер компоненты i из соотношения

$$i = \left\lfloor \frac{j-1}{L} \right\rfloor + 1. \quad (16)$$

Для корректной записи для индекса элемента $c_j \neq 0$ необходимо выполнения условий

$$T(j) > 0, j \neq k_i, \quad (17)$$

$$T(k_i + L(i-1)) = 0. \quad (18)$$

где $T(j)$ индекс элемента j записи кода математического выражения.

Для вычисления индекса $T(j)$ элемента j при условии $c_j \neq 0$ используем соотношение

$$T(j) = 1 - (j - L\beta) + \sum_{k=L\beta+1}^j i_k, \quad (19)$$

где

$$i_k = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq c_k \leq m_0 \\ \alpha, & \text{если } \sum_{r=0}^{\alpha-1} m_r \leq c_k \leq \sum_{r=0}^{\alpha} m_r, \alpha = \overline{1, m_n} \end{cases}, \quad (20)$$

$$\beta = \left\lfloor \frac{j-1}{L} \right\rfloor. \quad (21)$$

Индекс $T(j)$ элемента j указывает на минимальное число недостающих справа элементов. Невыполнение условий (17) или (18) указывает на неправильность записи математического выражения.

Алгоритм для вычисления математического выражения по записи кода в аналитическом программировании должен располагать информацией о максимальном количестве аргументов в используемых функциях.

2. Метод вариации аналитического программирования

Пусть запись кода (10) определяет пространства записей математических выражений. Пространство всех вариантов возможных записей длины K для D значений кодов содержит D^K элементов.

Малой вариацией кода аналитического программирования является изменение значения кода элемента $c_i \in \{1, \dots, D\}$. Одной малой вариации достаточно для получения любой записи пространства из одной заданной записи за конечное число вариаций.

Для описания малой вариации используем вектор из двух компонент

$$\mathbf{w} = [w_1 \ w_2]^T, \quad (22)$$

где w_1 – номер позиции изменяемого кода элемента записи, w_2 – значение кода элемента.

Для выполнения вариации необходимо знать: количество элементов в векторном выражении M , количество переменных N , количество параметров p , количества используемых функций определенной арности $m_0 = N + p$, m_1, \dots, m_n , количество выделенных для каждой компоненты позиций L и количество используемых в варьируемом коде позиций k_i , $i = \overline{1, M}$.

Номер позиции w_1 в векторе вариации (22) не должен превышать количество позиций в коде

$$1 \leq w_1 \leq LM \quad (23)$$

Значение кода элемента w_2 не должно превышать количество элементов в объединенном множестве (22)

$$1 \leq w_2 \leq |F|, \quad (24)$$

где

$$|F| = N + p + \sum_{i=1}^n m_i. \quad (25)$$

При выполнении вариации возможно получение некорректных записей. Проверку корректности записи кода осуществляем по условиям (17), (18). Для обеспечения корректности записи в зависимости от полученного в результате вариации кода записи изменяем значения некоторых последних кодов.

Для синтеза систем управления в большинстве случаев достаточно использовать объединённое множество переменных, параметров и функций следующего вида

$$\begin{aligned} F = & (x_1, \dots, x_N, q_1, \dots, q_p, f_{1,1}(z) = z, f_{1,2}(z) = \operatorname{sgn}(z)z^2, f_{1,3}(z) = z^2, f_{1,4}(z) = -z, \\ & f_{1,5}(z) = \operatorname{sgn}(z)\sqrt{|z|}, f_{1,6}(z) = z^{-1}, f_{1,7}(z) = e^z, f_{1,8}(z) = \ln|z|, f_{1,9}(z) = \frac{1 - e^{-z}}{1 + e^{-z}}, \\ & f_{1,10}(z) = \begin{cases} 1, & \text{if } z \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, f_{1,11}(z) = \operatorname{sgn}(z), f_{1,12}(z) = \cos(z), f_{1,13}(z) = \sin(z), \\ & f_{1,14}(z) = \arctan(z), f_{1,15}(z) = z^3, f_{1,16}(z) = \sqrt[3]{z}, f_{1,17}(z) = \begin{cases} z, & \text{if } |z| \leq 1 \\ \operatorname{sgn}(z), & \text{иначе} \end{cases}, \\ & f_{1,18}(z) = \operatorname{sgn}(z)\ln(|z| + 1), f_{1,19}(z) = \operatorname{sgn}(z)(e^{-|z|} - 1), f_{1,20}(z) = \operatorname{sgn}(z)(1 - e^{-|z|}), \\ & f_{1,21}(z) = \begin{cases} 1, & \text{if } z > a \\ -1, & \text{if } z < 0 \\ 3za^{-2} - 2z^3a^{-3}, & \text{иначе} \end{cases}, f_{1,22}(z) = \begin{cases} 1, & \text{if } z > a/2 \\ -1, & \text{if } z < -a/2 \\ 3za^{-2} - 4z^3a^{-3}, & \text{иначе} \end{cases}, \\ & f_{1,23}(z) = e^{|z|}, f_{1,24}(z) = z - z^3, f_{2,1}(z_1, z_2) = z_1 + z_2, f_{2,2}(z_1, z_2) = z_1z_2, \\ & f_{2,3}(z_1, z_2) = \max\{z_1, z_2\}, f_{2,4}(z_1, z_2) = \min\{z_1, z_2\}, f_{2,5}(z_1, z_2) = z_1 + z_2 - z_1z_2, \\ & f_{2,6}(z_1, z_2) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, f_{2,7}(z_1, z_2) = |z_1| + |z_2|, f_{2,8}(z_1, z_2) = \max\{|z_1|, |z_2|\}, \\ & f_{3,1}(z_1, z_2, z_3) = \begin{cases} z_2, & \text{if } z_1 \leq 0 \\ z_3, & \text{иначе} \end{cases}, f_{3,2}(z_1, z_2, z_3) = \begin{cases} z_3, & \text{if } z_1 \leq z_2 \\ -z_3, & \text{иначе} \end{cases}, \\ & f_{3,3}(z_1, z_2, z_3) = \begin{cases} z_2, & \text{if } z_1 < z_2 \\ z_3, & \text{if } (z_1 \geq z_2) \wedge (z_1 > z_3) \\ z_1, & \text{if } (z_1 \geq z_2) \wedge (z_1 \leq z_3) \end{cases}, \\ & f_{3,4}(z_1, z_2, z_3) = \begin{cases} z_2 - z_1, & \text{if } |z_1 - z_2| < |z_1 - z_3| \\ z_3 - z_1, & \text{иначе} \end{cases}, \end{aligned} \quad (26)$$

Пример синтеза системы управления

Рассмотрим применение метода вариационного аналитического программирования к решению задачи синтеза управления для системы третьего порядка с фазовыми ограничениями [3].

Задана система уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3,$$

$$\dot{x}_3 = u.$$

Заданы терминальные условия

$$x_i(t_f) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Заданы фазовые ограничения

$$x_1 \geq 0.$$

Задана область начальных значений

$$x_1(0) = 1, \quad -1 \leq x_2(0) \leq 1, \quad -1 \leq x_3(0) \leq 1.$$

Задан функционал

$$J = \int_0^{t_f} \left(x_1 + \frac{u^2}{2} \right) dt \rightarrow \min.$$

Необходимо найти управление в виде

$$u = h(x_1, x_2, x_3).$$

Для решения задачи используем метод вариационного аналитического программирования.

При решении использовали набор функций (26)

Базисное решение имело следующий вид

$$h^0(x_1, x_2, x_3) = q_1(x_1^f - x_1) + q_2(x_2^f - x_2) + q_3(x_3^f - x_3),$$

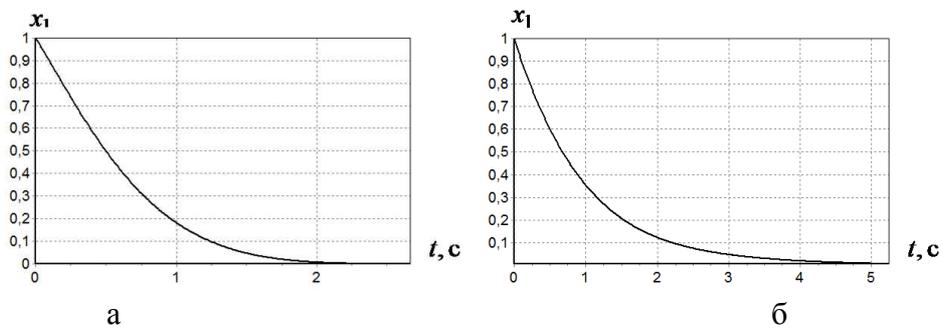
где $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $q_3 = 1$.

В результате применения метода было получено следующее решение

$$u = q_1(x_1^f - x_1) + q_2(x_2^f - x_2) + (x_3^f - x_3) \max \left\{ |x_1^f - x_1|, |q_1 - \sin(x_1^f - x_1)| \right\},$$

где $q_1 = 4.729600$, $q_2 = 8.815670$.

На рис. 1-4 приведены результаты моделирования системы с полученным решением.



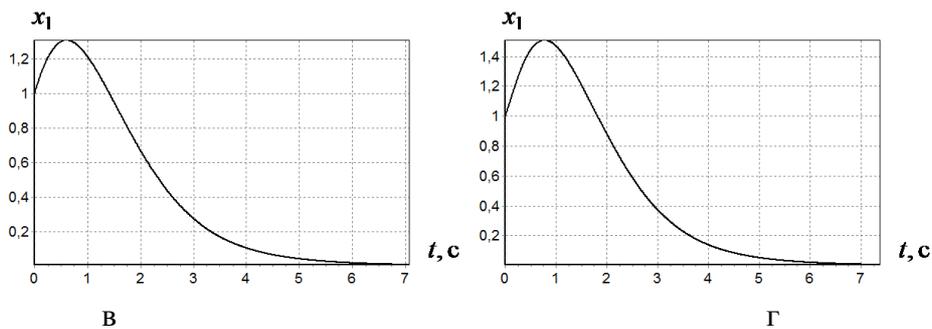


Рис. 1 График изменения x_1 при различных начальных условиях:

- а - $x_2(0) = -1, x_3(0) = -1$; б - $x_2(0) = -1, x_3(0) = 1$;
 в - $x_2(0) = 1, x_3(0) = -1$; г - $x_2(0) = 1, x_3(0) = 1$;

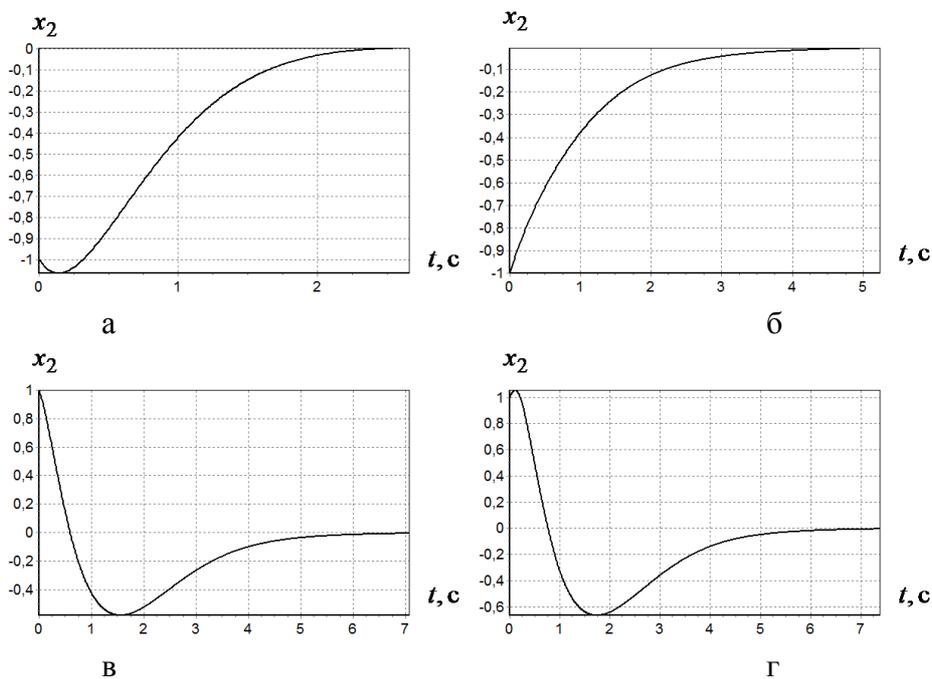
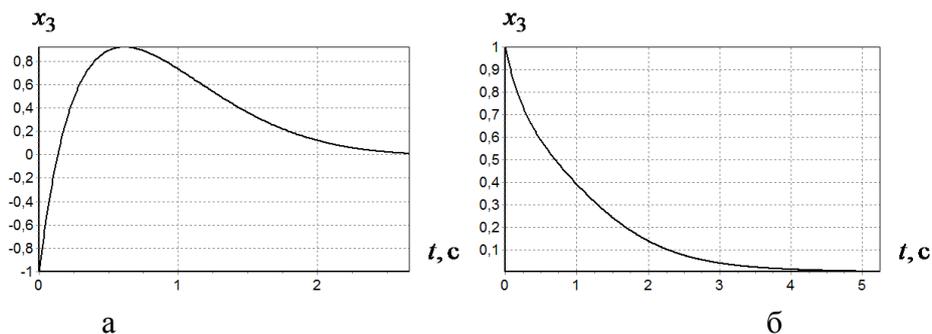


Рис. 2 График изменения x_2 при различных начальных условиях:

- а - $x_2(0) = -1, x_3(0) = -1$; б - $x_2(0) = -1, x_3(0) = 1$;
 в - $x_2(0) = 1, x_3(0) = -1$; г - $x_2(0) = 1, x_3(0) = 1$;



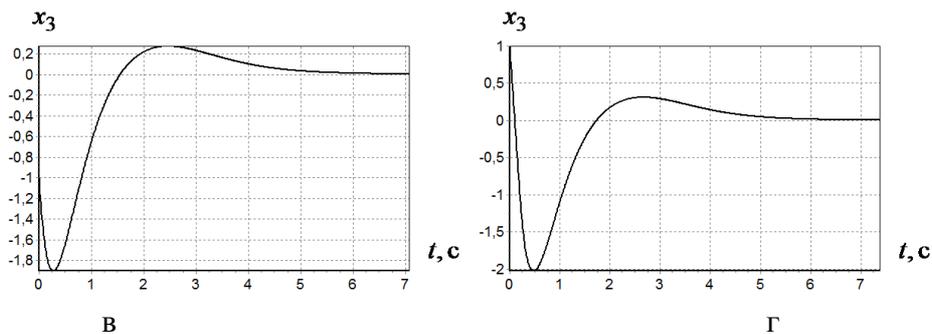


Рис. 3 График изменения x_3 при различных начальных условиях:

а - $x_2(0) = -1$, $x_3(0) = -1$; б - $x_2(0) = -1$, $x_3(0) = 1$;

в - $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = -1$; г - $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$;

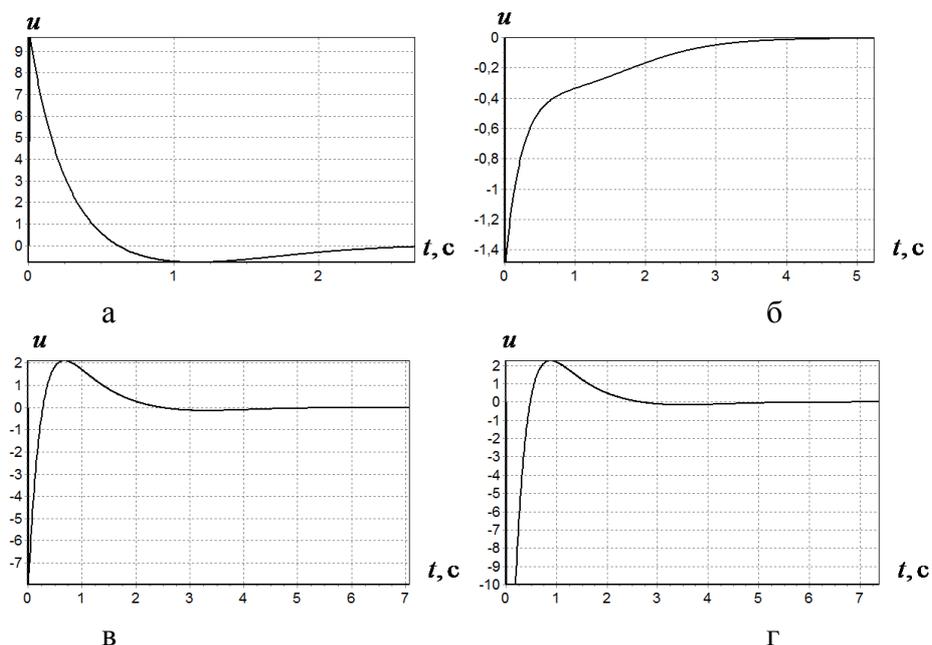


Рис. 4 График изменения u при различных начальных условиях:

а - $x_2(0) = -1$, $x_3(0) = -1$; б - $x_2(0) = -1$, $x_3(0) = 1$;

в - $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = -1$; г - $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$;

Из сказанного следует вывод, что метод вариационного аналитического программирования эффективен для решения задач синтеза управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-08-00008-а «Исследование методов синтеза систем управления в условиях неопределенности».

Список литературы

1. Zelinka I. Analytic programming by Means of Soma Algorithm // Mendel '02 In: Proc. 8th International Conference on Soft Computing Mendel'02, Brno, Czech Republic, 2002. – P. 93-101.

2. Zelinka I., Oplatkova Z. Analytic programming // Comparative Study. CIRAS'03, The second International Conference on Computational Intelligence, Robotics, and Autonomous Systems, Singapore, 2003.
3. Zelinka I., Nolle L., Oplatkova Z. Analytic Programming —Symbiloc Regression by Means of Arbitrary Evolutionary Algorithms //Journal of Simulation. – 2012. – Vol. 6, N 9. – P. 44-56.
4. Koza J. R., Keane M. A., Rice J. P. Performance improvement of machine learning via automatic discovery of facilitating functions as applied to a problem of symbolic system identification //IEEE International Conference on Neural Networks I. 1993. San Francisco, USA. 1993. – P. 191-198.
5. Koza J.R. Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection. Cambridge, Massachusetts, London, MA: MIT Press, 1992. – 819 p.
6. Bourmistrova A., Khantsis S., Control System Design Optimisation via Genetic Programming in Proc. of IEEE Congress on Evolutionary Computation, Singapore, 2007. – P. 1993–2000.
7. Robbins H. Junction phenomena for optimal control with state variable inequality constraints of third order// Journal of Optimization Theory and Applications. 31:1. 1980. – P. 85-99.

Рецензенты:

Забудский Е.И., д.т.н., профессор, ФГБОУ ВПО «Московский агроинженерный университет им. В.П. Горячкина», г. Москва.

Юрков Н.К., д.т.н., профессор, ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет» Россия, г. Пенза.

Антонов А.В., д.т.н., профессор, декан факультета «Кибернетики», Обнинский институт атомной энергетики Национального исследовательского ядерного университета МИФИ Министерства образования и науки РФ, г. Обнинск.