УДК 372.851

ОСОБЕННОСТИ ВВЕДЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В ШКОЛЕ

Абилова Б.Т., Сулейменов К.М.

Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова, Кокшетау, Казахстан, г. Кокшетау, ул. Абая, 76. E-mail: abilova80@mail.ru, kenessary@mail.ru

При изучении разделов математики одним из важных подходов является постановка проблемы, через которую приходим к необходимости введения нового понятия. Другим немаловажным подходом является изучение вопроса о том, насколько введенное понятие отражает суть изучаемой проблемы. Для более полного понимания сути самого понятия необходимо определение области применения самого понятия и его свойств. В работе на основании некоторых примеров показано, что одним из важных требований введения нового понятия является постановка проблемы, обоснованность терминологии понятия, а также выявление области практического приложения, некоторые из которых выходят за пределами школьной программы. Также рассмотрены вопросы, связанные с проблемой понимания при изучении введенных понятий.

Ключевые слова: понятия, постановка проблемы, определение, синус и косинус угла, функция, метрические и нормированные пространства, теория пределов, теория функций.

FEATURES INTRODUCING SOME MATHEMATICAL CONCEPTS SCHOOL

Abilova B.T., Suleymenov K.M.

Sh. Ualihanov Kokshetau State University, Kokshetau, Kazakhstan, 76 Abai St. Kokshetau, e-mail: abilova80@mail.ru, kenessary@mail.ru

In this paper, the peculiarities of new concepts in mathematics: namely the branches of mathematics are considered. One of the important approaches is the problem formulation, through which new concepts are to be introduced. Another important approach is to analyse the question on how this concept reflects the reality i.e. the essence of the problem. In order to achieve exact meaning of the concepts essence it is necessary to determine the scope of the concept and its properties. The important requirements of implementing new concepts are problem formulation, terminology approval as well as identifying areas of practical application, the basis of some examples the validity of the notion of terminology, some of which go beyond the curriculum. Also some issues related to the problem studying are introduced.

Keywords: concepts, problem definition, the definition of sine and cosine of the angle function, metric and normed spaces, theory of limits, the theory of functions.

Методы введения новых понятий и способы полного понимания учащимися введенных новых понятий изучались многими учеными-педагогами [2-6].

Понятие как философская категория изучена в работах Булатова М.А., Колягина Ю.Ь., Луканкна Г.Л. [1,7].

В работе Т.С. Маликова [8] рассматривается соотношение интуиции и логики введения нового понятия в обучении математики в школе, изучаются вопросы мотивировки доказательств некоторых так называемых «очевидных» фактов, о выработке более высокого уровня «интуиции» при введении математики, а также приводятся различные методы достижения поставленных целей, что играет важную роль при успешном изучении разделов школьной математики.

В данной работе исследуются некоторые вопросы для успешного понимания введенных новых понятий в школьной математике, а именно – изучается более новый подход в структуре введения нового понятия, который является одним из основных методов исследовательской работы в науке, а именно – правильная постановка проблемы.

Рассмотрим вопросы, связанные с проблемой понимания вводимых понятий:

1) Постановка вопроса, приводящая к введению нового понятия;
2) Логическая обоснованность вводимого понятия, выбор термина;
3) Практические приложения введенного понятия.

Проблема постановки вопроса является чрезвычайно сложной для учащихся, а определение самой постановки задачи зависит от уровня подготовленности учителя, т.е. от педагогического мастерства учителя. Правильный выбор постановки вопроса раскрывает недостатки некоторых ранее изученных понятий и показывает целесообразность поставленного вопроса.

Для обоснования важности постановки задачи, к примеру, возьмем определения синуса и косинуса угла α. Выбирая прямоугольный треугольник с острым углом α, катетами a, b и гипотенузой c, вводятся определения:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

где a противолежащий катет углу α.

Рассмотрим следующие вопросы:

1) Может ли $\alpha = 0$;
2) Может ли $\alpha \geq 90$.

Ясно, что при данных определениях ответ к данным вопросам отрицательный.

Можно ли эквивалентно изменить данные определения, чтобы ответ оказался положительным?

С целью решения поставленной задачи, данные определения эквивалентно переносятся на окружности, где для простоты радиус окружности берется равным 1, а угол α – центральный, причем радиус окружности есть длина гипотенузы. При этом основные тригонометрические функции определенного угла определяются как абсцисса и ордината точки окружности, тем самым вопросы, поставленные в данных первоначальных определениях, решаются положительно, т.е. угол может быть произвольным. На кружковых занятиях можно рассматривать вопросы о выборе окружности, в которой радиус равен одному из катетов, и также изучение переноса приведенных ранее определений на такую окружность. Таким образом, проблема выбранного направления должна быть изучена подробно, во всех деталях.

Правильно поставленная проблема влечет правильный выбор формулирования вопросов, отвечая на которые мы сможем решить задачу, т.е. будет построена логическая последовательность математических рассуждений (часто в работах по методике выражаемые действиями), ведущие к цели – это является одной из важных проблем школьной математики.

Другим особенным примером, раскрывающим важность постановки проблемы, может служить введение понятия «Признаки равенства треугольников».

Равенство двух треугольников имеет определения двух видов, а именно, геометрически – как совпадающие фигуры при наложении друг к другу, т.е. совпадающие при движении (параллельного переноса и поворота), аналитически.

Равенство двух треугольников приведем аналитически как выполнение шести равенств, а именно – равенства соответствующих сторон и равенства соответствующих углов.

Постановкой задачи является вопрос требований о выполнении достаточного меньшего количества равенств, при выполнении которых остальные равенства можно доказать. При изучении самих признаков, а именно:

1) Двух сторон и углу между этими сторонами, постановкой проблемы является рассмотрение возможности выбора другого угла (основной задачей в этом случае является то, что учащиеся смогли бы самостоятельно дать отрицательный ответ и доказать то, что другие углы нельзя брать, т.е. угол между сторонами обязателен);
2) Сторона и прилежащие углы, здесь можно рассматривать произвольно два угла (в этом случае необходимо добиться того, что безразлично, какие два угла брать, а прилежащие удобны для простого запоминания);
3) Три стороны, в этом случае появляется возможность изучения вопроса о равенстве трех соответствующих углов (анализ выбора трех соответствующих углов приводит к введению целого нового раздела, а именно – подобия фигур).

Постановка задачи важна также при изучении соотношения между понятиями, которые не только устанавливают связь между понятиями, и раскрываются свойства как отдельно самих понятий, так и их взаимоотношения. Для полноты раскрытия рассмотрим структуры «теоремы», которые делятся на достаточные, необходимые, необходимые и достаточные (критерий).

Как известно, самая полная теорема – это критерий, в то же время отдельная необходимая теорема так же, как и достаточная теорема, не являются полными. При этом возникает вопрос о справедливости или несправедливости обратной теоремы, для установления данного утверждения нужно построить необходимый «контрпример». Процесс построения в математике контрпримера является самым сложным как при обучении школьников, так и в математической науке. Например, в математическом анализе имеется справедливое (доказывается) утверждение: «Если функция дифференцируема в точке, то в этой точке функция и непрерывна», а для доказательства несправедливости обратного утверждения рассматривается пример функции $f(x)=|x|$ в точке $x=0$, а для доказательства более сильного утверждения К. Вейерштрасс построил пример функции, которая во всех точках непрерывна и нигде не дифференцируема.

Рассмотрим пример из школьного курса геометрии. Например, при изучении соотношения между понятиями «фигура» и «площадь». В геометрии изучается утверждение: «Если фигура F есть трапеция, то площадь фигуры F определяется равенством $S_F=\frac{a+b}{2}\cdot h$, где a,b – параллельные стороны (основания), а h – высота. Интерес представляет вопрос о справедливости обратного утверждения «если площадь фигуры F определяется равенством $S_F=\frac{a+b}{2}\cdot h$, где a,b – параллельные стороны (основания), а h – высота, то можно ли сделать вывод о том, что фигура F есть трапеция». Ясно, что обратное утверждение неверно, а сам поиск учащихся нахождения контрпримера (например, параллелограмм), является одним из важных процессов обучения не только учащегося, но и студента ВУЗа, можно указать другой пример, в курсе математического анализа очень часто применяется контрпример, в утверждении «если числовой ряд сходится, то его общий член стремится к нулю, а обратное неверно», в данном случае контрпримером может служить гармонический ряд, также и в других примерах применяются контрпримеры.

Теперь рассмотрим определения понятий, которые не просто, а в некоторых случаях даже невозможно применять, к примеру, определение возрастания и убывания функции. По определению возрастания функции, для всех $x_1<x_2$ выполняется $f(x_1)<f(x_2)$, в некоторых случаях очень сложно решать последнее или равносильное неравенство

$f(x_1)-f(x_2)<0$.

К примеру, для тригонометрической функции $f(x)=\sin x$ получим

$$\sin x_1-\sin x_2=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\sin\frac{x_1-x_2}{2}<0,$$

данное неравенство решить сложно, в то время решение дает теорема Лагранжа, справедливость которой доказывается в курсе математического анализа

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1),$$

где $\xi \in [x_1, x_2]$ – произвольная точка.

Применение данной теоремы приводит к решению простого неравенства

$$\cos x < 0,$$

т.е. промежутки возрастания определяются как множества решения неравенства.

Из данных примеров и выбранных постановок задач можно сделать следующий вывод.

Правильно поставленный вопрос, т.е. постановка задачи приводит:

- к убеждению о целесообразности изучения проблем и введения новых понятий, т.е. раскрывает логическую структуру математического раздела;

- к активной мыслительной деятельности учащихся как в решении поставленной задачи, так и в поиске новых вопросов, часто при рассмотрении альтернативных вопросов – доказательство или поиск контрпримеров;

- к фундаментальному усвоению введенных понятий, т.е. полному раскрытию теоретического вопроса понятий и их приложения в решении практических задач;

- к психологическому настрою при введении новых понятий.

Перейдем к рассмотрению второго вопроса.

Как известно, правильный выбор терминологий приводит к успешному пониманию как самого понятия (установления основных свойств) так и определению области его применения. Поэтому обоснованность понятия, раскрытие его сущности играет немаловажную роль для полного понимания вопроса и понятия.

Рассмотрим на примерах. При изучении понятия «Скалярное произведения векторов» важным вопросом является вопрос о названии скалярного произведения и – какую информацию несет понятие скалярное произведение?

Во-первых, понятие скалярного произведения векторов возникло из применения арифметических операции к новому объекту «векторы», такой подход в математике является стандартным, к примеру, при изучении действительных и комплексных чисел, а также при введении понятий производной функции, предел последовательности и др.

Во-вторых, скалярное произведение векторов несет дополнительную информацию о том, что может быть и другое или другие произведения векторов, а именно – в курсе высшей математики рассматриваются векторное (результатом является вектор) и смешанное произведение векторов.

Данные вопросы для учащегося указывают на то, что некоторые понятия недостаточно изучаются в школьной математике, т.е. имеют продолжения за пределами школьной математики.

Само понятие «Скалярное произведение векторов» имеет «близкие применения» в математике, как для определения ортогональности и коллинеарности векторов, так и «далекие» применения в науке, а именно – при изучении классов функций в качестве скалярного произведения функций рассматривается интеграл от произведения функций, на котором основывается гильбертово пространство $L^2(0;1)$ или $L^2(R)$.

Другим примером может быть арифметическая и геометрическая прогрессии.

Данную тему обычно начинают изучать с задачи К. Гаусса о нахождении суммы

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100,$$

а в дальнейшем как обобщение этой задачи, а именно, выбирая вместо первого слагаемого произвольное действительное число, а в качестве разности 1 выбирая также произвольное действительное число, наконец, использование возможности применения метода нахождения данной суммы.

Кроме этого, целесообразно поставить вопрос о самом названии арифметической прогрессии.

Ясно, что название связано с арифметическим средним, а само равенство

$$a_n = a_{n-1} + d$$

является рекуррентным введением последовательности.

В данной теме изучаемых вопросов много, некоторые из них можно перенести на кружковые или факультативные занятия с некоторыми усилениями.

К примеру, при известных a_n, a_m найти d или при известных S_n, S_m найти d, данные задачи можно изучать на занятиях, а обратные задачи, такие как при каких видах S_n получаемая последовательность будет арифметической или нет, а более общая задача о том, что, при каких видах S_n получаемая последовательность a_n будет арифметической прогрессией, можно рассматривать на кружковых занятиях. Сказанное для арифметической прогрессии можно повторить и для геометрической прогрессии.

Данный пример является важным при изучении школьной математики, так как данный пример обобщается как числовая последовательность и числовой ряд в курсе математического анализа, где S_n имеет свое название «частичная сумма», а первым частным примером числового ряда является «бесконечно убывающая геометрическая прогрессия».

Отметим, что некоторые вопросы взаимоотношений между числовым рядом и его последовательностью частичных сумм могут быть изучены на факультативных и кружковых занятиях, а именно – в вопросах устойчивости расходящегося числового ряда, так как для арифметической и геометрической прогрессии последовательность частичных сумм выражается аналитически. Также геометрическая прогрессия является одним из основных аппаратов в доказательстве важных утверждений теории числовых рядов (Теоремы Даламбера, Коши и др.).

В школьном курсе математики вводятся много понятий, причем не всегда удается придерживаться логической стройности. Это связано с тем, что многие понятия применяются в последующих классах, а некоторые в курсе высшей математики, поэтому необходимость изучения некоторых понятий не всегда удается обосновать.

К примеру, сказанное может относиться к модулю, точнее к неравенствам с модулями. В школе такие неравенства изучаются в основном как одна из разновидностей неравенств. Понятие «неравенства» в близком смысле имеет приложение при изучении понятий «функция», а именно – в задачах нахождения области определения функций само понятие «функция» является одним из основных объектов математики, которое изучается в разделе теория функций.

Неравенства с модулями в полной форме применяются при изучении теории пределов функций и числовой последовательности, из раздела математического анализа, в дальнейшем теория пределов обобщается при изучении метрических и нормированных пространств, а также при введении понятия окрестность точки на плоскости и в пространстве.

Другим примером является понятие «радиан угла» в курсе геометрии. «Радиан угла» вводится как соответствие угла и длины, соответствующей центральному углу, дуги. Одно из применения радиана в курсе школьной математики – тригонометрические неравенства, при этом преимущество радиана перед угловыми параметрами очевидно.

В то же время «радиан угла» более полно применяется при нахождении интегралов, а именно, двойных и тройных (кратных) интегралов, с ведением полярной, цилиндрической и сферической систем координат. Как нам кажется, полярную систему координат необходимо ввести для окружности с радиусом 1, а затем обобщить на произвольную окружность. Тогда процесс введения самого понятия «радиан угла» не вызывает особых затруднений у учащихся, потому что декартовая и полярная системы координат связаны между собой простыми определениями тригонометрических функций.

Таким образом, для понимания сути и области применения понятия играют важную роль такие вопросы, как постановка проблемы, логическая обоснованность и практическое применение данного понятия как внутри школьной математики, так и в курсе высшей математики.

Список литературы

1. Булатов М.А. Логические категории и понятия. – Киев: Наука. Думка, 1981. – 235 с.
2. Волович М.Б. Формирование общих приемов работы с понятиями (на материале начальных понятий геометрии): дис... канд. пед. наук. – М., 1967. –188 с.
3. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 127 с.
4. Зыкова В.И. Оперирование понятиями при решении геометрических задач // Известия АПН РСФСР. – 1950. – Вып. 28. – С. 55-94.
5. Ильясова А.Б. Развитие мыслительных действий учащихся при формировании понятий на уроках математики в младших классах школы: Дис… канд. пед. наук. – М.,1997. – 236 с.
6. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л. Основные понятия современного школьного курса математики. – М.: Просвещение, 1974. – 382 с.
7. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: Учеб. пособие для студентов физ-мат. фак. пед. ин-ов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1980. – 462 с.
8. Маликов Т.С. Соотношение индукции и логики в математике и ее обучении. – Алматы НИЦ «ҒЫЛЫМ», 2002. – 165 с.

Рецензенты:

Тусупов Ж.А., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедры «Информационные системы» ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г. Астана.

Маликов Т.С., д.п.н., профессор кафедры «Математика и МП» КГУ им. Ш. Уалиханова, г. Кокшетау.