

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЕННОГО ПОРШНЯ НА ФРОНТЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ КОАКСИАЛЬНОГО УСТРОЙСТВА

Васильева О.В.¹

¹ФГБОУ ВПО «НИ ТПУ» («Национальный исследовательский Томский политехнический университет»), Томск, Россия (634050, Томск, пр. Ленина, 30), e-mail: vasileva.o.v@mail.ru

Работа посвящена решению одномерного уравнения гидрогазодинамики для коаксиального устройства – магнитоплазменного ускорителя с помощью модифицированного алгоритма Лакса–Уэндролфа с оптимальным выбором параметра регуляризации – искусственной вязкости. Произведена замена дифференциальных уравнений в частных производных конечными разностями. Добавлен оптимальный параметр регуляризации – искусственная вязкость в среде MathCAD, используя точное известное решение – задача Сода. Апробирован разработанный алгоритм расчета термодинамических параметров в точке торможения. На основе предложенного алгоритма в среде MathCAD рассчитаны термодинамические параметры ударной волны перед плазменным поршнем при ее вылете из коаксиального магнитоплазменного ускорителя. При моделировании учтены подавляющие неустойчивые высокочастотные колебания, что позволяет сузить область неоднородности и выделить только гладкие решения. Результаты расчета газодинамических параметров в точке торможения совпадают с литературными данными.

Ключевые слова: Магнитоплазменный ускоритель, математическое моделирование, ударная волна, искусственная вязкость, гидрогазодинамика.

MODELLING OF PARAMETERS OF THE PLASMA PISTON AT THE FRONT SHOCK WAVE OF THE COAXIAL DEVICE

Vasileva O.V.¹

¹National research Tomsk polytechnic university, Tomsk, Russia (634050, Tomsk, Lenin prospect, 30), e-mail: vasileva.o.v@mail.ru

Work is devoted to the solution of the one-dimensional equation of a hydraulic gas dynamics for the coaxial device - magneto plasma accelerator by means of Lax-Wendroff modified algorithm with an optimum choice of parameter of regularization – artificial viscosity. Replacement of the differential equations in private derivatives is made by final differences. Optimum parameter of regularization – artificial viscosity in the environment of MathCAD is added, using the exact known decision – a task Soda. The developed algorithm of calculation of thermodynamic parameters in a braking point is approved. On the basis of the offered algorithm in the environment of MathCAD thermodynamic parameters of a shock wave in front of the plasma piston are calculated at its departure from the coaxial magneto plasma accelerator. When modeling overwhelming unstable high-frequency fluctuations that allows to narrow area of heterogeneity are considered and to allocate only smooth decisions. Results of calculation of gas dynamic parameters in a point of braking coincide with literary data.

Keywords: Magneto plasma accelerator, mathematical modeling, shock wave, artificial viscosity, fluid dynamics.

Введение

При вылете плазменной субстанции из ствола коаксиального магнитоплазменного ускорителя перед ее головной частью образуется отсоединенная ударная волна [6]. Произведем оценку термодинамических параметров за ударной волной. Для этого примем некоторые упрощения – субстанцию условно будем называть затупленным телом или поршнем, расчет будем производить в одномерном случае. Если перейти к системе координат связанной с поршнем, то невозмущенный газ-воздух будет двигаться на поршень со скоростью поршня. При моделировании движения газовой волны на твердую преграду

данную модель можно представить как движение двух одинаковых волн на встречу друг другу [3-5].

Методика

Для решения одномерной нестационарной газодинамической задачи будем использовать уравнения сохранения массы, импульса и энергии, записанные в дивергентной форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(u\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho(\varepsilon + \rho u^2 / 2))}{\partial t} + \frac{\partial(u(\rho\varepsilon + \rho u^2 / 2 + p))}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность газа; p – давление газа; u – скорость распространения газа; ε – внутренняя энергия газа; t, x – время и координата.

Те же уравнения (1), записанные в векторной форме, удобной для численной реализации:

$$\begin{cases} \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \rho \\ u\rho \\ \rho(\varepsilon + \rho u^2 / 2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} u\rho \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho\varepsilon + \rho u^2 / 2 + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 \\ s_2^2 / s_1 + p \\ s_2(s_3 + p) / s_1 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{s} – вектор консервативных переменных; $\mathbf{f}(\mathbf{s})$ – вектор потока.

Описание алгоритма:

1. Замена дифференциальных уравнений в частных производных конечными разностями (2).
2. Добавление оптимального параметра регуляризации – искусственной вязкости в среде MathCAD.
3. Выбор оптимальной искусственной вязкости, используя точное известное решение (задача Сода), рис. 1, б.
4. Апробация разработанного алгоритма расчета термодинамических параметров в точке торможения (аналитически), табл.
5. Расчет динамики изменения термодинамических параметров перед плазменным поршнем при вылете из ускорителя, рис. 5.

Для численного решения системы уравнений использовался модифицированный алгоритм Лакса–Уэндролфа [1], который заключается в том, что уравнения в частных производных заменяются конечными разностями. В конечных разностях появляется неустойчивость, т.е. влияние высокочастотных шумов из-за наличия сильных ударных волн. К данному алгоритму нами была добавлена искусственная вязкость. В режиме *on-line* был подобран оптимальный параметр регуляризации (искусственной вязкости) для обеспечения регуляризации решения и подавления его шумовой составляющей. Формируется массив значений для каждого слоя, используя среду MathCAD:

$$\begin{aligned}
 & LW(\rho, p, u, N, h, \tau, M, \gamma, \mu) := \\
 & s1 \leftarrow s(\rho, p, u, N, \gamma) \\
 & \text{for } i \in 0..M \\
 & f1 \leftarrow f(s1, \gamma) \\
 & s_{0,5} \leftarrow F_{0,5}(s1, f1, h, \tau) \\
 & f_{0,5} \leftarrow f(s_{0,5}, \gamma) \\
 & \text{for } k \in 0..N-1 \\
 & \begin{pmatrix} s2_{k,0} \\ s2_{k,1} \\ s2_{k,2} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} s1_{k,0} \\ s1_{k,1} \\ s1_{k,2} \end{pmatrix} - \frac{\tau}{h} \begin{pmatrix} f_{0,5,k+1,0} - f_{0,5,k,0} \\ f_{0,5,k+1,1} - f_{0,5,k,1} \\ f_{0,5,k+1,2} - f_{0,5,k,2} \end{pmatrix} + \frac{\tau\mu}{2h} \cdot \text{if } \left(k-1 \leq 0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s1_{k+1,0} - 2s1_{k,0} + s1_{k-1,0} \\ s1_{k+1,1} - 2s1_{k,1} + s1_{k-1,1} \\ s1_{k+1,2} - 2s1_{k,2} + s1_{k-1,2} \end{pmatrix} \right) \\
 & \begin{pmatrix} S1_{k,i} \\ S2_{k,i} \\ S3_{k,i} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} s2_{k,0} \\ s2_{k,1} \\ s2_{k,2} \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} s2_{N,0} \\ s2_{N,1} \\ s2_{N,2} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} s1_{N,0} \\ s1_{N,1} \\ s1_{N,2} \end{pmatrix} - \frac{\tau}{h} \begin{pmatrix} f1_{N,0} - f1_{N-1,0} \\ f1_{N,1} - f1_{N-1,1} \\ f1_{N,2} - f1_{N-1,2} \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} S1_{N,i} \\ S2_{N,i} \\ S3_{N,i} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} s2_{N,0} \\ s2_{N,1} \\ s2_{N,2} \end{pmatrix} \\
 & s1 \leftarrow s2 \\
 & \begin{pmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

где LW – функция Лакса–Уэндролфа; $N=200$, $M=200$ – число точек разбиения пространственного и временного интервалов соответственно, h , τ – шаг по пространству и времени соответственно, $\gamma=5/3$ – показатель политропы, μ – искусственная вязкость, s , f – вспомогательные функции для формирования массива значений.

Величина искусственной вязкости определялась из невязки-рассогласования (рис. 1, а). Точное известное решение задачи Сода сравнивалось с нашим алгоритмом, если рассогласования составляли не более 10 %, то коэффициент регуляризации (искусственная вязкость) считался оптимальным, рис. 1, б.

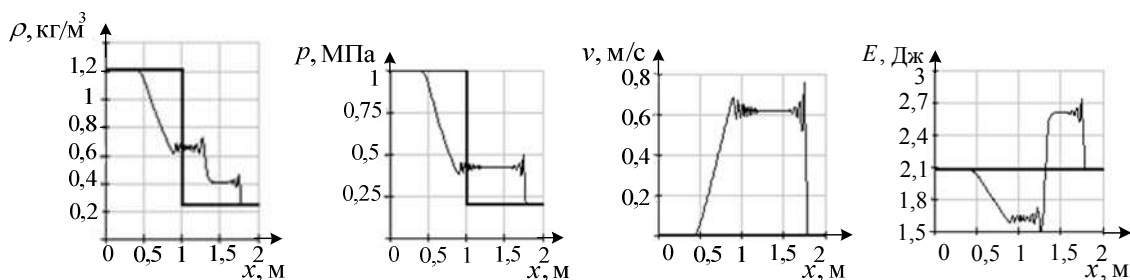
Экспериментальная часть

Результат расчета динамики изменения термодинамических параметров в относительных единицах приведен на рис. 2. До столкновения волн величины давления, плотности и температуры в средах были одинаковы, а скорости волн одинаковые по величине, но разные по направлению (знаку). На рисунке приведен момент времени после столкновения двух ударных волн при числе Маха, равном 1,5. Осью симметрии рисунков является фронт плазменного поршня.

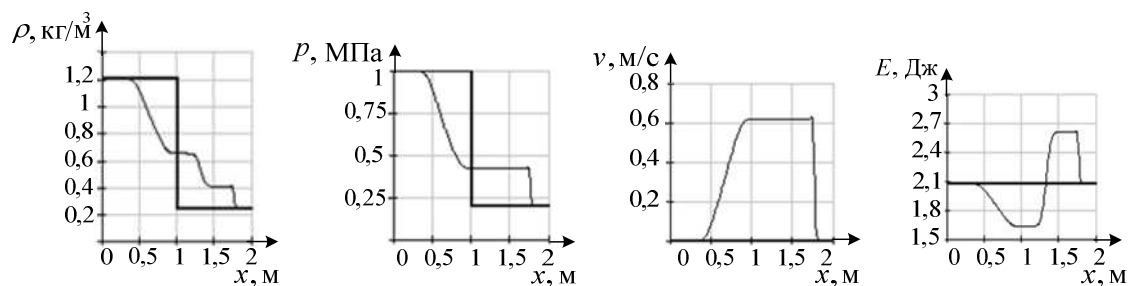
Проверка работы алгоритма была проведена на расчете критических параметров – давления, плотности и температуры торможения p_T , ρ_T , T_T при заданных начальных данных невозмущенного газа $p_0=1/\gamma$, $\rho_0=1$, $T_0=1$ (в относительных единицах) и заданном числе Маха M_0 , рис. 4, а. Параметры торможения вычислялись по известным соотношениям [2, 8]. Давление, плотность и температура из невозмущенной среды, через скачок уплотнения, пересчитываются через ударную адиабату Гюгонио-Ренкина (ударная волна):

$$p_1 = p_0 \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_0^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right), \quad \rho_1 = \rho_0 \left(\frac{\gamma+1}{(\gamma-1) + 2/M_0^2} \right),$$

$$T_1 = T_0 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} - \frac{1}{M_0^2} \right) \left(\frac{2}{\gamma-1} + M_0^2 \right).$$



а



б

Рис. 1. Восстановленные термодинамические параметры ударной волны и волны разрежения: а) с неоптимальной вязкостью $\mu=10^{-7}$; б) с оптимальной вязкостью $\mu=10^{-6}$

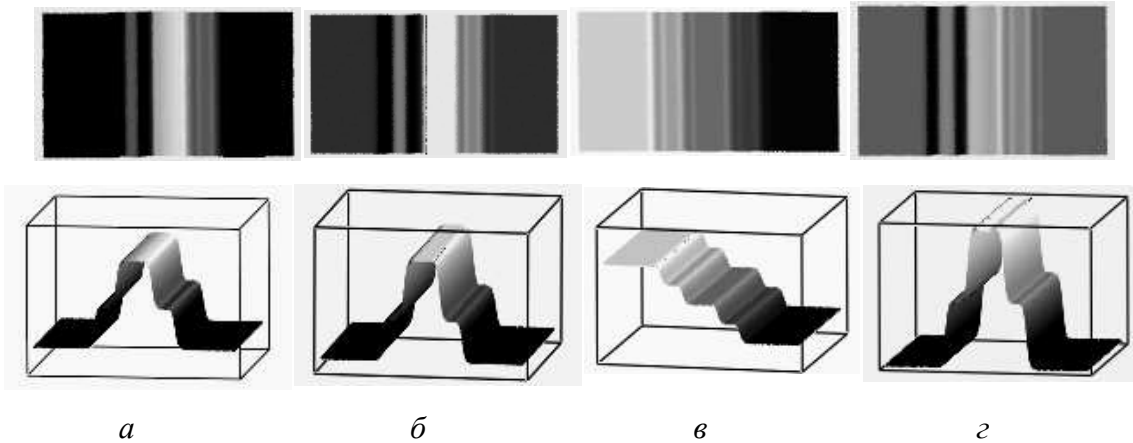


Рис. 2. Случай двух ударных волн: а) плотность ρ ; б) давление p ; в) скорость v ; г) энергия E

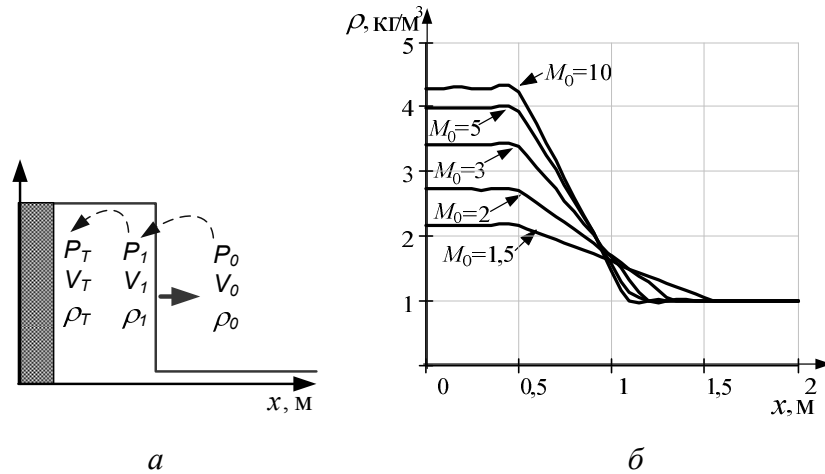


Рис. 3. Параметры ударной волны: а) критические параметры; б) распределение плотности на фронте волны при различных числах Маха M_0

В нашем случае эти формулы вырождаются в простые удобные для инженерных

расчетов соотношения: $\rho_1 = \frac{1}{4}(5M_0^2 - 1)\rho_0$, $\rho_T = \frac{4}{\left(1 + \frac{3}{M_0^2}\right)}\rho_0$, $T_T = \frac{5}{16}\left(1 - \frac{1}{M_0^2}\right)(3 + M_0^2)T_0$.

Для расчета параметров торможения нужно использовать адиабату Пуассона (волна

разрежения): $p_T = \left(1 + M_1^2 \frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} p_1$, $\rho_T = \left(1 + M_1^2 \frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \rho_1$, $T_T = \left(1 + M_1^2 \frac{\gamma-1}{2}\right) T_1$, здесь M_1

– числа Маха после ударной волны, определяется через число Маха в невозмущенной среде

выражением: $M_1 = \sqrt{\frac{2 + (\gamma-1)M_0^2}{2\gamma M_0^2 - (\gamma-1)}}$. Для инженерных расчетов получаем:

$$M_1 = \sqrt{\frac{3 + M_0^2}{5M_0^2 - 1}}, \quad p_T = \left(1 + \frac{M_1^2}{3}\right)^{5/3} p_1, \quad \rho_T = \left(1 + \frac{M_1^2}{3}\right)^{3/2} \rho_1, \quad T_T = \left(1 + \frac{M_1^2}{3}\right) T_1. \quad (3)$$

Начальные данные приведем к относительным единицам $p_0=1/\gamma=0,6$, $\rho_0=1$, $T_0=1$.

Результаты сравнения методов сведем в таблицу.

Таблица. Результаты сравнения инженерного (И) и программного (П) расчетов

Число Маха M_0	p_1	p_T	ρ_1	ρ_T	T_1	T_T	Расчет
1,5	1,536	2,280	1,714	2,172	1,495	1,750	И
	1,542	2,287	1,717	2,175	1,497	1,752	П
2	2,850	3,807	2,286	2,719	2,078	2,333	И
	2,914	3,893	2,306	2,744	2,106	2,364	П
3	6,600	8,204	3,000	3,418	3,667	4,000	И
	6,557	8,151	2,995	3,413	3,649	3,980	П
5	18,600	22,300	3,571	3,982	8,680	9,333	И
	18,522	22,206	3,570	3,980	8,647	9,298	П
10	74,850	88,397	3,883	4,291	32,123	34,333	И
	75,050	88,643	3,884	4,291	32,210	34,426	П

Приведем расстояние между ударной волной и торцом поршня S , используя формулу Лулева. Выпишем коэффициент в выражении (3):

$$\frac{\rho_T}{\rho_0} = 1/K_\rho = \frac{4}{\left(1 + \frac{3}{M_0^2}\right)}, \quad K_\rho = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{M_0^2}\right), \quad S = \sqrt{K_\rho} (1 + 0,6K_\rho).$$

Как видно из табличных данных, программа дает хорошие результаты. Графическое изображение скачков уплотнения приведены на рис. 3, б. Торцы поршня находятся в точке $x=0,5$ [7]. С помощью численной схемы Лакса–Уэндролфа и введенной искусственной вязкости рассчитаем давление, плотность и температуру среды непосредственно перед поршнем по значениям скорости ударной волны, полученным из эксперимента. Экспериментальные значения координаты ударной волны $L(t)$ (субстанции) и скорости $v(t)$ приведены на рис. 4, а. На этом же рисунке приведены значения $L(t)$ аппроксимированные сплайнами и сглаженные с помощью фильтра «скользящее среднее» и кривая скорости $v(t)$, полученная взятием производной от сплайновой кривой, рис. 4, б.

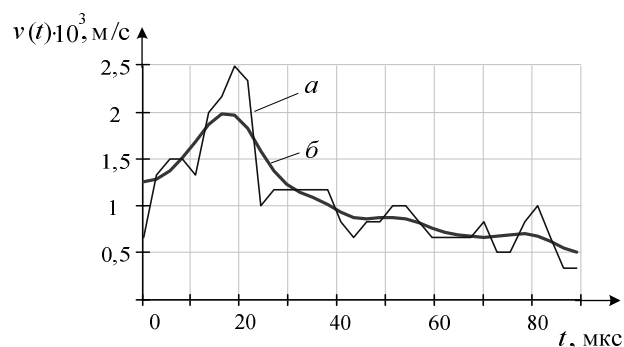
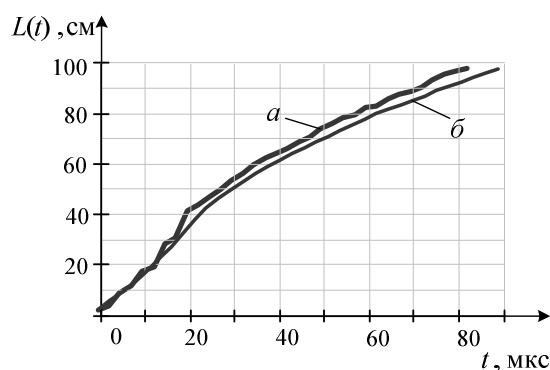


Рис. 4. Значения координаты $L(t)$ и скорости ударной волны $v(t)$ соответственно: а) экспериментальные значения; б) сглаженные значения

При расчете термодинамических параметров невозмущенная среда считалась одноатомным газом: постоянная политропы – $\gamma = 5/3$, давление – $p_1 = 10^5$ Па, плотность воздуха – $\rho_1 = 1,2$ кг/м³, температура воздуха $t = 15$ °С, $T_1 = 273,15 + 15 = 288,15$ К, скорость звука в невозмущенной среде – $c = 340$ м/с. На графиках приведена динамика изменения термодинамических параметров скорости ударной волны, давления, плотности и температуры, непосредственно перед плазменным поршнем, рис. 5.

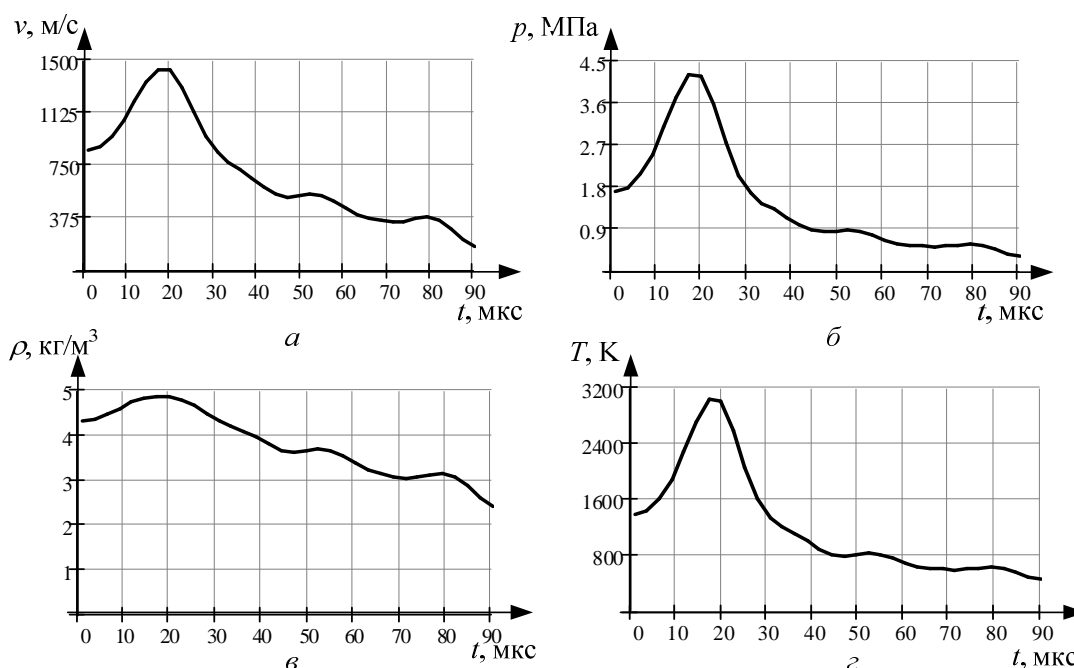


Рис. 5. Динамика изменения термодинамических параметров: а) скорость ударной волны; б) давление; в) плотность; г) температура

Прокомментируем полученный результат. При вылете плазмы из электрода-ствола со сверхзвуковой скоростью при температуре 1300...3000 К плазма представляет собой газ, распространяющийся в виде струи, которая называется недорасширенной струей. Теория посылает, что при вылете газа из сопла Лавалья [1] со сверхзвуковой скоростью первоначально газ ускоряется, а затем замедляется. Этот процесс периодически повторяется, но уже с меньшей интенсивностью. Что и наблюдается на графике (рис. 4, рис. 5, а).

Результаты

На основе модифицированного алгоритма Лакса–Уэндролфа с введением искусственной вязкости плазмы проведено моделирование параметров плазменного поршня на фронте ударной волны коаксиального магнитоплазменного устройства.

При моделировании учтены подавляющие неустойчивые высокочастотные колебания, что позволяет сузить область неоднородности и выделить только гладкие решения.

Результаты расчета газодинамических параметров в точке торможения совпадают с литературными данными.

Список литературы

1. Зализняк В.Е. Основы вычислительной физики. Ч. 1. Введение в конечно-разностные методы. – М.: Техносфера, 2008. – 224 с.
2. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Физматлит, 2008. – 656 с.
3. Колесников П.М. Электродинамическое ускорение плазмы – М.: Атомиздат, 1971. – 388 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика Т. 8: Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1992. – 664 с.
5. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. – М.: Физматлит, 2008. – 613 с.
6. Сивков А.А., Сайгаш А.Я., Пак А.А., Евдокимов А.А. Прямое получение нанодисперсных порошков и композиций в гиперскоростной струе электроразрядной плазмы // Нанотехника. – 2009. - № 2 (18). – С. 38-44.
7. Трубников Б.А. Теория плазмы. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 464 с.
8. Черняк В.Г., Суетин П.Е. Механика сплошных сред – М.: Физматлит, 2006. – 352 с.

Рецензенты:

Канев Ф.Ю., д.ф.-м.н., профессор кафедры ЭСиЭ ЭНИН ФГБОУ ВПО «НИ ТПУ», Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск.

Усов Ю.П., д.т.н., профессор кафедры ЭСиЭ ЭНИН ФГБОУ ВПО «НИ ТПУ», Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск.