УДК 517.946

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Зайцева Н.В.

ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань, Россия (420008, Казань, ул. Кремлевская, 18), e-mail: queen-natalya@mail.ru

Рассматривается смешанная задача для гиперболического уравнения с оператором Бесселя с нелокальным интегральным условием второго рода. Методом разделения переменных найдено общее решение этой задачи в виде бесконечного ряда и доказана его единственность. Доказана полнота и ортогональность системы собственных функций оператора Бесселя. При этом получены ограничительные условия на функции, определяющие начальные данные смешанной задачи. Обоснование решения задачи доказывается методом спектральных разложений. При доказательстве ортогональности используются асимптотическая формула для функции Бесселя первого рода и формулы дифференцирования цилиндрических функций.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальное интегральное условие, оператор Бесселя, смешанная задача.

SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM WITH NONLOCAL INTEGRAL CONDITION FOR A HYPERBOLIC EQUATION WITH THE BESSEL OPERATOR

Zaytseva N.V.

Kazan (Volga Region) Federal University, Lobachevskii Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan, Russia (420008, Kazan, Kremlin str., 18), e-mail: queen-natalya@mail.ru

The mixed problem for the hyperbolic equation with Bessel operator with not local integrated condition of the second kind is considered. By the method of separation of variables the common solving of this problem in the form of an infinite series is found and its uniqueness is proved. Completeness and orthogonality of the eigenfunction system of the Bessel operator is proved. Restrictive conditions on the functions defining initial data of the mixed problem are thus received. The foundation of the solving of a problem is proved by a method of spectral expansion. At the orthogonality proof are used assymptotical formula for Bessel function of the first kind and the formula of differentiation of cylindrical functions.

Keywords: hyperbolic equation, nonlocal integral condition, Bessel operator, mixed problem.

Введение

Работа посвящена исследованию смешанной задачи для гиперболического уравнения с оператором Бесселя с нелокальным интегральным условием второго рода.

Смешанные задачи для гиперболических уравнений с интегральными нелокальными условиями рассматривались в работах Д.Г. Гордезиани и Г.А. Авалишвили [3], Л.С. Пулькиной [6; 7], А. Бузиани [9] и других авторов. Классические методы не всегда применимы к исследованию нелокальных задач с интегральными условиями, поэтому вопрос разработки методов исследования таких задач остается актуальным и в настоящее время.

Результаты настоящей работы являются продолжением исследований смешанных задач с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений [4; 5; 7].

Постановка смешанной задачи с интегральным условием второго рода

Пусть $D=\{(x,t)|0<x<1, 0<t<T\}$ – прямоугольная область в координатной плоскости *Oxt*, $\Gamma_0=\{(x,t)|x=0, 0\le t\le T\}$.

В области *D* рассмотрим *B*-гиперболическое уравнение вида

$$\square_B U \underset{Df}{=} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - B_x U = 0, \tag{1}$$

где $B_x = x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ – оператор Бесселя, $k>0$ – заданное действительное число.

Требуется найти функцию $U(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$U(x,t)\in C^2(D)\cap C^1(D\cup\Gamma_0)\cap C(\bar{D}), \tag{2}$$

$$\square_B U(x,t)=0, \quad (x,t)\in D, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad 0<t<T, \tag{4}$$

$$U|_{t=0}=\varphi(x), \quad U_t|_{t=0}=\psi(x), \quad 0<x<1, \tag{5}$$

$$\frac{\partial U(1,t)}{\partial x} + \int_0^1 U(x,t)x^k dx = 0, \quad 0\le t\le T, \tag{6}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные, достаточно гладкие функции.

Единственность решения смешанной задачи (2)-(6)

Теорема 1. Смешанная задача (2)-(6) с интегральным условием (6) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Докажем теорему методом от противного. Пусть U_1 и U_2 - два предполагаемых решения задачи (2)-(6). Тогда их разность $\omega=U_1-U_2$ удовлетворяет условиям (2)-(4) задачи (2)-(6), однородным начальным условиям

$$\omega|_{t=0}=0, \quad \omega_t|_{t=0}=0 \tag{5_0}$$

и однородному интегральному условию

$$\frac{\partial\omega(1,t)}{\partial x} + \int_0^1 \omega(x,t)x^k dx = 0. \tag{6_0}$$

Нетрудно проверить, что имеет место тождество

$$x^k V_t \square_B V = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{x^k\left[\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left(x^k \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

Полагая в этом тождестве $V=\omega$, с учетом того, что ω является решением уравнения (1), получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{x^k\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k\frac{\partial\omega}{\partial t}\frac{\partial\omega}{\partial x}\right).$$

Интегрируя последнее тождество по *x* на отрезке $[0,1]$, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}E(t)=\omega_t(1,t)\,\omega_x(1,t),\qquad(7)$$

где

$$E(t)=\int_0^1\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\right]x^k dx.\qquad(8)$$

Умножая уравнение (1) на x^k и интегрируя его по *x* на отрезке $[0,1]$, получим:

$$\int_0^1\omega_{tt}x^k dx=\frac{\partial\omega(1,t)}{\partial x}.\qquad(9)$$

Заменим в условии (6_0) $\omega_x(1,t)$ на его значение из (9), в результате чего будем иметь

$$\int_0^1\omega_{tt}x^k dx+\int_0^1\omega(x,t)\,x^k dx=0.\qquad(10)$$

Полагая здесь $\int_0^1\omega(x,t)\,x^k dx=Z(t)$, получим уравнение $Z''+Z=0$, общее решение которого имеет вид $Z(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$, а значит $\int_0^1\omega(x,t)\,x^k dx=c_1\cos t+c_2\sin t$.

В силу начальных условий (5_0): $c_1=0$ и $c_2=0$, и, следовательно, $\int_0^1\omega(x,t)\,x^k dx=0$, поэтому согласно ($6_0$) $\dfrac{\partial\omega(1,t)}{\partial x}=0$, а, значит, из (8) и (9) получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\right]x^k dx=0.$$

Таким образом:

$$\int_0^1\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\right]x^k dx=C=const.\qquad(11)$$

Полагая в (11) $t=0$, с учетом начальных условий (5_0), получаем $C=0$, а значит

$$\int_0^1\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\right]x^k dx=0,$$

откуда следует: $\dfrac{\partial\omega}{\partial t}=0$ и $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=0$, т.е., $\omega(x,t)=c$. Из этого равенства и начальных условий (5_0) следует, что $c=0$. Таким образом, получили, что $\omega=0$ и $U_1\equiv U_2$. Теорема доказана.

Построение частных решений уравнения (1) в прямоугольной области

Сначала построим систему частных решений уравнения (1), удовлетворяющих условиям

$$U(x,t)\in C^2(D)\cap C^1(D\cup\Gamma_0)\cap C(\bar{D}), \tag{12}$$

$$\square_B U(x,t)=0, \quad (x,t)\in D, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad 0<t<T, \tag{14}$$

$$\frac{\partial U(1,t)}{\partial x}+\int_0^1 U(x,t)x^k dx=0, \quad 0\le t\le T. \tag{15}$$

Частное решение уравнения (1) ищем в виде

$$U(x,t)=X(x)T(t), \tag{16}$$

где X и T – пока неопределенные функции. Их найдем из требования, чтобы функция (16) удовлетворяла условиям (12)-(15). С этой целью подставим ее в уравнение (1) и граничные условия (14) и (15).

$$XT''-TB_xX=0, \tag{17}$$

$$X'(0)T(t)=0, \tag{18}$$

$$\left(X'(1)+\int_0^1 X(x)x^k dx\right)T(t)=0. \tag{19}$$

Разделяя переменные в уравнении (17) и сокращая на T равенства (18) и (19), получим обыкновенные дифференциальные уравнения и условия относительно неопределенных функций

$$T''+\lambda^2 T=0, \tag{20}$$

$$B_xX+\lambda^2 X=0, \tag{21}$$

$$X'(0)=0, \tag{22}$$

$$X'(1)+\int_0^1 X(x)x^k dx=0. \tag{23}$$

Найдем общее решение уравнения (21), т.е. уравнения $X'' + \frac{k}{x}X' + \lambda^2 X = 0$. Умножим это уравнение на x^2 и произведем замену переменных по формулам $X = \left(\frac{\xi}{\lambda}\right)^{\frac{1-k}{2}} \upsilon$, $x = \frac{\xi}{\lambda}$. В результате уравнение приводится к уравнению Бесселя

$$\xi^2 \frac{d^2\upsilon}{d\xi^2} + \xi \frac{d\upsilon}{d\xi} + \left[\xi^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2\right]\upsilon = 0. \tag{24}$$

Пусть $\frac{k-1}{2}$ – нецелое число. Тогда общее решение этого уравнения имеет вид [2]

$$\upsilon(\xi) = c_1 J_{\frac{k-1}{2}}(\xi) + c_2 J_{\frac{1-k}{2}}(\xi), \tag{25}$$

где $J_{\frac{k-1}{2}}(\xi), J_{\frac{1-k}{2}}(\xi)$ – функции Бесселя первого рода.

Возвращаясь к старым переменным в (25), имеем

$$X(x) = c_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x) + c_2 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x), \tag{26}$$

где c_1, c_2, λ – произвольные постоянные. Их найдем из требования, чтобы общее решение (26) удовлетворяло условиям (22) и (23). С этой целью подставим его в эти условия.

В силу известной формулы дифференцирования функции Бесселя [8]

$$\frac{dX}{dx} = -c_1 \lambda x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda x) + c_2 \lambda x^{\frac{1-k}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda x).$$

Также в силу известной при $x \to 0$ асимптотической формулы функции Бесселя [1] при $c_2 \neq 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{dX}{dx} = \infty$, а при $c_2 = 0, c_1 \neq 0$: $\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0$.

Полагая в общем решении (26) $c_2 = 0$, получим $X = c_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)$. Здесь также положим $c_1 = 1$, так как собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Таким образом, решение уравнения (21), удовлетворяющее условию (22), имеет вид

$$X = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x). \tag{27}$$

Подставим (27) в условие (23): $\frac{dX}{dx} = -\lambda x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda x)$, откуда $\frac{dX(1)}{dx} = -\lambda J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda)$.

В результате подстановки имеем

$$-\lambda J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda)+\int_0^1 J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)\, x^{\frac{k+1}{2}}dx=0. \tag{28}$$

Известно [2], что

$$\int J_p(x)\, x^{p+1}dx = x^{p+1}J_{p+1}(x)+c. \tag{29}$$

Вычисляя интеграл в (28) с помощью формул (29) и Ньютона-Лейбница, получим: $\int_0^1 J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)\, x^{\frac{k+1}{2}}dx=\frac{1}{\lambda}J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda)$. Отсюда и из (28) имеем: $-\lambda J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda)+\frac{1}{\lambda}J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda)=0$ или

$$J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda)=0. \tag{30}$$

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,...$ – положительные корни уравнения (30), расположенные в порядке возрастания. Тогда числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,...$ определяют собственные значения спектральной задачи. Полагая в (27) $\lambda=\lambda_n$, получим соответствующие собственные функции

$$X_n = x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x),\, n=1,2,3,... \tag{31}$$

Докажем, что система функций (31) ортогональна в промежутке [0,1] с весом x^k. Функция (27) является решением уравнения (21), т.е.

$$x^{-k}\frac{d}{dx}\left(x^k\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)\right)\right)+\lambda^2\left(x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)\right)=0. \tag{32}$$

Умножая равенство (32) на x^k, получим

$$\frac{d}{dx}\left(x^k\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)\right)\right)+\lambda^2 x^k\left(x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)\right)=0$$

или

$$\lambda^2 x^{\frac{k+1}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)=-\frac{d}{dx}\left(x^k\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)\right)\right). \tag{33}$$

Полагая в этом равенстве $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$, имеем

$$\lambda_1^2 x^{\frac{k+1}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_1 x)=-\frac{d}{dx}\left(x^k\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_1 x)\right)\right),$$

$$\lambda_2^2 x^{\frac{k+1}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_2 x)=-\frac{d}{dx}\left(x^k\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_2 x)\right)\right).$$

Умножим первое из этих равенств на $x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_2 x)$, а второе на $x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_1 x)$, после чего вычтем первое равенство из второго. В результате получим после несложных преобразований

$$\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)xJ_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_1 x)\,J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_2 x)= \tag{34}$$

$$=\frac{d}{dx}\left[x^{\frac{k+1}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_2 x)\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_1 x)\right)-x^{\frac{k+1}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_1 x)\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_2 x)\right)\right].$$

Вычисляя в равенстве (34) внутренние производные, получим

$$\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)xJ_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_1 x)\,J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_2 x)=\frac{d}{dx}\left[\lambda_2 xJ_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_1 x)\,J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_2 x)-\lambda_1 xJ_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_1 x)\,J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_2 x)\right].$$

Интегрируя это равенство по x на отрезке [0,1], получаем

$$\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int\limits_0^1 xJ_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_1 x)\,J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_2 x)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{d}{dx}\left[\lambda_2 xJ_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_1 x)\,J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_2 x)-\lambda_1 xJ_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_1 x)\,J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_2 x)\right]dx=$$

$$=\lambda_2 J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_1)\,J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_2)-\lambda_1 J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_1)\,J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_2)=0. \tag{35}$$

Таким образом, доказано, что система функций $\left\{J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x)\right\}$ ортогональна с весом x в промежутке [0,1]. Отсюда следует, что система функций (31) ортогональна с весом x^k в промежутке [0,1].

Полагая в уравнении (20) $\lambda^2=\lambda_n^2$, получим $T_n''+\lambda_n^2 T_n=0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n=a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t,\, n=1,2,...$$

Таким образом, система частных решений уравнения (1), удовлетворяющих условиям (12)-(15), определяется по формуле

$$U_n(x,t)=\left(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t\right)x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x),\, n=1,2,... \tag{36}$$

а окончательное решение поставленной задачи имеет вид

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t\right)x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x), \tag{37}$$

где коэффициенты разложения определяются по формулам

$$a_n = \frac{2}{J^2_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n)} \int_0^1 \varphi(x) x^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x)\, dx; \quad b_n = \frac{2}{\lambda_n J^2_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n)} \int_0^1 \psi(x) x^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x)\, dx.$$

Список литературы

1. Бейтман Г. Высшие трансцендентные функции. Т.2. – М.: Наука, 1966. – 296 с.
2. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть первая. – М.: И.Л., 1949. – 799 с.
3. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний струны. Математическое моделирование. – 2000.–Т. 12. - № 1. – С. 94-103.
4. Зайцева Н.В. Смешанная задача для одного В-гиперболического уравнения с интегральным условием первого рода // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып.2. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2012. – С. 39-50.
5. Зайцева Н.В. Смешанная задача для одного В-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода// Известия Смоленского государственного университета. – Смоленск: Изд-во СмолГУ. – 2013. - №4(24). – С. 397-403.
6. Пулькина Л.С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения. Математические заметки. – 2003. – Т. 74. - № 3. – С. 435-445.
7. Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения. Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40. - № 7. – С. 887-892.
8. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951.
9. Bouziani A., Benouar N.E. Probleme mixte avec conditions integrals pour une classe d’equations hyperboliques. Bull. Belg. Math. Soc. – 1996. - № 3. – P. 137-145.

Рецензенты:

Игнатьев Ю.Г., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики и математического моделирования Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань.

Сушков С.В., д.ф..-м.н., профессор, заведующий кафедрой теории относительности и гравитации Института физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г.Казань.