УДК 681.5.033.23

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ДРЕЙФЕ СТАТИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СО СМЕШАННЫМ ВХОЖДЕНИЕМ ВРЕМЕНИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Зотов А.В.

ФГБОУ ВПО «Вятский государственный университет», Киров, Россия (610000, г. Киров, ул. Московская, 36), e-mail: zotov.aleksandr.vikt@yandex.ru

Статья посвящена определению соотношения параметров в математическом описании объекта управления с экстремальной статической характеристикой и параметров интегрального критерия качества (характеризующего расход ресурсов), при котором достигается асимптотическая устойчивость объекта управления в точке экстремума. Задача решается за счёт нахождения особого управления (применительно к принципу максимума Понтрягина) из применения условий общности положения для нелинейных объектов в расширенном пространстве координат. С помощью качественной теории дифференциальных уравнений исследованы состояния равновесия (особые точки) системы дифференциальных уравнений, характеризующих объект управления. Даны рекомендации по выбору интегрального критерия качества, при котором найденное особое управление является экстремальным, т.е. переводит объект управления под действием данного особого управления в точку экстремума статической характеристики.

Ключевые слова: принцип максимума, особое управление, экстремальное управление, качественная теория дифференциальных уравнений, условия общности положения, нестационарный нелинейный объект управления.

EXTREMAL CONTROL OF NON-STATIONARY NONLINEAR OBJECTS AT HORIZONTAL DRIFT STATIC CHARACTERISTICS WITH THE MIXED ENTRY OF TIME INTO THE MATHEMATICAL DESCRIPTION

Zotov A.V.

Federal Government-financed Educational Institution of Higher Professional Education «Vyatka State University», Kirov, Russia (610000, Kirov, Moskovskaya Street, 36), e-mail: zotov.aleksandr.vikt@yandex.ru

Article is devoted to the definition of the relation of parameters in the mathematical description of the control object with extreme static characteristic and parameters of integral quality criterion (characterizing the consumption of resources) , at which the asymptotic stability of the control object at the extremum point. The problem is solved by finding a special control (with respect to the Pontryagin maximum principle) from the application of the conditions of general position for non-linear objects in the extended space coordinates. By using the qualitative theory of differential equations investigated the equilibrium state (singular points) of system of differential equations describing the control object . Recommendations are made on the choice of the integral quality criterion , at which the found special control is extreme, that is moves to control object under the influence of this special control in extremum point on the static characteristic.

Key words: maximum principle, special control, extremal control, qualitative theory of differential equations, conditions of general position, non-stationary nonlinear dynamic object.

Задача оптимального (и, в частности, экстремального) управления на минимум ресурсов нелинейными динамическими объектами представляет сложную, до конца не решённую проблему. Общей методики для решения нелинейных оптимальных задач не существует ввиду их большого разнообразия. В качестве основного метода исследования оптимального управления используется принцип максимума Понтрягина, учитывающий ограничения на переменные системы и поэтому применяемый для решения практических задач, и условия общности положения (УОП) для нелинейных объектов в расширенном пространстве координат [3-5].

Нестационарность нелинейных объектов с экстремальной статической характеристикой проявляется в дрейфе статической характеристики, который может быть вертикальным или горизонтальным и получается при различном вхождении времени в уравнения движения объекта - аддитивном, мультипликативном и смешанном. Под аддитивным вхождением времени понимается случай, когда в уравнениях движения время суммируется с координатами объекта, под мультипликативным - когда время умножается на координаты объекта. При смешанном вхождении в уравнения движения переменная t суммируется и умножается на координаты объекта.

В данной статье исследуются нестационарные нелинейные объекты при горизонтальном дрейфе статической характеристики при смешанном вхождении времени в математическое описание объекта управления (ОУ).

ОУ представлен в виде структуры, образованной последовательным соединением линейного динамического звена и нелинейного динамического звена с экстремальной статической характеристикой, и эта структура может быть описана системой дифференциальных уравнений нелинейных по координатам x, но линейных по управлениям U

$$\dot{x} = A(x) + B(x)U ,$$

где $A(x)$ - функциональная матрица - столбец с элементами $f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, $i = \overline{1,n}$; $B(x)$ - функциональная матрица - столбец с элементами $g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, $i = \overline{1,n}$ (функции $f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, $g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, $i = \overline{1,n}$, непрерывны и достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по x); U - скалярная функция.

Необходимо найти допустимое управление U, $|U| \le U_{\max}$, доставляющее минимум интегральному критерию

$$J = \int_0^T f_0(x)\,dt = \int_0^T x_1^p\,dt , \tag{1}$$

где T - время движения от начальной до конечной точки заранее не задано.

Как показано в [6], для исследования нестационарных задач используется рекуррентное соотношение:

$$B_j\left(\tilde{x}, U, \dot{U}, \ldots\right) = \frac{dB_{j-1}}{dU^{(j-3)}}\frac{dU^{(j-3)}}{dt^{(j-3)}} + \frac{dB_{j-1}}{d\tilde{x}}\left(A(\tilde{x}) + B(\tilde{x})U\right) - \left(\frac{dA(\tilde{x})}{d\tilde{x}} + \frac{dB(\tilde{x})U}{d\tilde{x}}\right)B_{j-1} + \frac{dB_{j-1}}{dt}, \tag{2}$$

где $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \subset R_{n+1}$, $A(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} f_0(x) \\ A(x) \end{pmatrix}$, $B_1(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ B(x) \end{pmatrix}$.

Из векторов $B_j(\tilde{x})$, $j = \overline{1, n+1}$ составляется матрица $D_{n+1} = (B_1\ B_2\ \ldots\ B_{n+1})$. Если определитель матрицы $\det D_{n+1} = F(x, U, \dot{U}, \ldots)$, то из выражения $F(x, U, \dot{U}, \ldots) = 0$ определяется множество особых управлений в функции фазовых координат и параметров системы.

Дифференциальные уравнения связи, характеризующие ОУ, имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{k_1 U - k_2 x_1}{T_1}; \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\left(k_3 \left|x_1 - a - c\sin t\right|^q + b\right) - x_2}{T_2}; \end{cases} \tag{3}$$

Статическая характеристика объекта (3) выражается уравнением $x_2 = k_3 \left|x_1 - a - c\sin t\right|^q + b$, а экстремум статической характеристики имеет координаты $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (a + c\sin t, b)$.

Модель (3) в общем случае является неаналитической функцией, за исключением случаев четных показателей *q*, например, при $q = 2$ получается аналитическое уравнение квадратичной статической характеристики. Вместе с тем относительно неаналитической модели (3) предполагается, что в подпространствах входной координаты нелинейного звена $x_1^+ = \{x_1 \ge a\}$ и $x_1^- = \{x_1 < a\}$ известны соответствующие аналитические функции, тогда

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} \dfrac{k_3 \left(x_1 - a - c\sin t\right)^q + b - x_2}{T_2}, \textit{если } x_1 > a + c\sin t; \\ \dfrac{k_3 \left(a + c\sin t - x_1\right)^q + b - x_2}{T_2}, \textit{если } x_1 < a + c\sin t. \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим подпространство $x_1^- = \{x_1 < a\}$. В задаче на минимум функционала (2) получаем особое управление

$$U_{oc} = \frac{x_1\left(k_2 T_2\left(\left(p-1\right)\left(a + c\sin t\right) + x_1\left(q - p\right)\right) + T_1\left(a - x_1 + c\left(\sin t + \left(q-1\right)T_2\cos t\right)\right)\right)}{k_1 T_2\left(p\left(a - x_1\right) + c\left(p-1\right)\sin t + q x_1 - a\right)}. \tag{5}$$

Система (3) под особым управлением (5) примет вид:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = \dfrac{x_1\left(a - x_1 + c\sin t + cT_2\left(q-1\right)\cos t\right)}{T_2\left(p\left(a-x_1\right)+c\left(p-1\right)\sin t + qx_1 - a\right)} = P\left(x_1, x_2\right); \\
\dot{x}_2 = \dfrac{k_3\left(a + c\sin t - x_1\right)^q + b - x_2}{T_2} = Q\left(x_1, x_2\right)
\end{cases}
\tag{6}
$$

Состояниями равновесия (особыми точками) системы (6) являются точки $\left(0, k_3\left(a + c\sin t\right)^q + b\right)$, $\left(a + c\sin t + cT_2\left(q-1\right)\cos t, k_3\left(cT_2\left(1-q\right)\cos t\right)^q + b\right)$. Применяя качественную теорию дифференциальных уравнений [1; 2], найдём в окрестности особых точек параметры $\Delta = \begin{vmatrix} P'_{x_1}\left(x_1^*, x_2^*\right) & P'_{x_2}\left(x_1^*, x_2^*\right) \\ Q'_{x_1}\left(x_1^*, x_2^*\right) & Q'_{x_2}\left(x_1^*, x_2^*\right) \end{vmatrix}$, $\sigma = P'_{x_1}\left(x_1^*, x_2^*\right) + Q'_{x_2}\left(x_1^*, x_2^*\right)$, а также корни характеристического уравнения $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$:

1) в окрестности точки $\left(0, k_3\left(a + c\sin t\right)^q + b\right)$ параметры $\Delta = -\dfrac{a + c\sin t + cT_2\left(q-1\right)\cos t}{\left(p-1\right)\left(c\sin t + a\right)T_2^2}$, $\sigma = -\dfrac{\left(a + c\sin t\right)\left(p-2\right) - cT_2\cos t\left(q-1\right)}{\left(p-1\right)\left(a + c\sin t\right)T_2}$, корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -\dfrac{1}{T_2}$, $\lambda_2 = \dfrac{a + c\sin t + cT_2\left(q-1\right)\cos t}{\left(p-1\right)\left(a + c\sin t\right)T_2}$;

2) в окрестности точки $\left(a + c\sin t + cT_2\left(q-1\right)\cos t, k_3\left(cT_2\left(1-q\right)\cos t\right)^q + b\right)$ параметры

$$\Delta = \frac{a + c\sin t + cT_2\left(q-1\right)\cos t}{\left(q-1\right)\left(c\left(\sin t + T_2\cos t\left(q-p\right)\right) + a\right)T_2^2},$$

$$\sigma = -\frac{cq\sin t + cT_2\cos t\left(q^2 + p - qp - 1\right) + qa}{\left(q-1\right)\left(c\left(\sin t + T_2\cos t\left(q-p\right)\right) + a\right)T_2},$$ корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_2}, \; \lambda_2 = -\frac{a + c\sin t + cT_2\left(q-1\right)\cos t}{\left(q-1\right)\left(c\left(\sin t + T_2\cos t\left(q-p\right)\right) + a\right)T_2}.$$

Сделаем некоторые выводы о состояниях равновесия системы (6). При $\Delta \neq 0$ состояние равновесия является простым. Из полученного Δ следует, что при некоторых параметрах дрейфа и моментах времени простое состояние равновесия переходит в сложное, а именно при $a + c\sin t + cT_2\left(q-1\right)\cos t = 0$. Откуда находим условие $c \neq -\dfrac{a}{\sin t + T_2\left(q-1\right)\cos t}$.

В окрестности особой точки $\left(0, k_3 \left(a + c\sin t\right)^q + b\right)$ преобразуем λ_2 к виду

$$\lambda_2 = \frac{a + c\sin t + cT_2\left(q-1\right)\cos t}{\left(p-1\right)\left(a + c\sin t\right)T_2} = \frac{a + c\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}\sin\left(t + \arcsin\left(\frac{T_2\left(q-1\right)}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}\right)\right)}{\left(p-1\right)\left(a + c\sin t\right)T_2}.$$

Рассмотрим случай $p > 1$. Тогда исследовать знак корня λ_2 можно исходя из выражения

$$\frac{a + c\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}\sin\left(t + \arcsin\left(\frac{T_2\left(q-1\right)}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}\right)\right)}{a + c\sin t}:$$

1) при $\left|c\right| < \frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}$ числитель и знаменатель одного знака, поэтому простые состояния равновесия имеют характер седла;
2) при $\left|c\right| > \frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}$ числитель и знаменатель на некоторых интервалах времени имеют различные знаки, в этом случае простое состояние равновесия принимает характер устойчивого узла;
3) при положительном параметре дрейфа $\left|c\right| = \frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}$ в моменты времени $t = \frac{3\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{T_2\left(q-1\right)}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}\right) + 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda_2 = 0$, $\Delta = 0$, простые состояния равновесия превращаются в сложные типа седло-узел, и поэтому этот параметр дрейфа и соответствующие моменты времени являются бифуркационными. Бифуркационными также являются отрицательный параметр дрейфа $c = -\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}$ и момент времени $t = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{T_2\left(q-1\right)}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}\right) + 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим случай $0<p<1$. Исследуя знак корня λ_2, исходя из выражения

$$-\frac{a+c\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}\sin\left(t+\arcsin\left(\frac{T_2\left(q-1\right)}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}\right)\right)}{a+c\sin t},$$ получим:

1) при $|c|<\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}$ числитель и знаменатель одного знака, поэтому простые состояния равновесия имеют характер устойчивого узла;
2) при $|c|>\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}$ числитель и знаменатель на некоторых интервалах времени имеют различные знаки, в этом случае простое состояние равновесия принимает характер седла;
3) случай $|c|=\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}$ рассмотрен выше.

При $p=1$ точка $\left(0,k_3\left(a+c\sin t\right)^q+b\right)$ не является состоянием равновесия системы (6). При $p=1$ система (6) имеет единственное состояние равновесия – точку $\left(a+c\sin t+cT_2\left(q-1\right)\cos t,k_3\left(cT_2\left(1-q\right)\cos t\right)^q+b\right)$.

При $p=0$ (критерий быстродействия) определитель матрицы $\det D_3=\frac{k_1^2k_3q\left(a+c\sin t-x_1\right)^{q-1}}{T_1^2T_2}$, из приравнивания нулю которого определяется уравнение особой траектории $x_1=a+c\sin t$.

Рассмотрим особую точку $\left(a+c\sin t+cT_2\left(q-1\right)\cos t,k_3\left(cT_2\left(1-q\right)\cos t\right)^q+b\right)$. Действуя аналогично приведённому выше, преобразуем λ_2 к виду

$$\lambda_2=-\frac{a+c\sin t+cT_2\left(q-1\right)\cos t}{\left(q-1\right)\left(a+c\left(\sin t+T_2\left(q-p\right)\cos t\right)\right)T_2}=$$

$$=-\frac{a+c\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}\sin\left(t+\arcsin\left(\frac{T_2\left(q-1\right)}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}\right)\right)}{T_2\left(q-1\right)\left(a+c\sqrt{1+\left(T_2\left(q-p\right)\right)^2}\sin\left(t+\arcsin\left(\frac{T_2\left(q-p\right)}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-p\right)\right)^2}}\right)\right)\right)}.$$

При $q>1$ исследовать знак корня λ_2 можно исходя из выражения

$$-\frac{a+c\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}\sin\left(t+\arcsin\left(\frac{T_2\left(q-1\right)}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}\right)\right)}{a+c\sqrt{1+\left(T_2\left(q-p\right)\right)^2}\sin\left(t+\arcsin\left(\frac{T_2\left(q-p\right)}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-p\right)\right)^2}}\right)\right)}:$$

1) при $|c|<\min\left(\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}},\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-p\right)\right)^2}}\right)$ числитель и знаменатель одного знака, поэтому простые состояния равновесия имеют характер устойчивого узла;

2) при $|c|>\min\left(\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}},\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-p\right)\right)^2}}\right)$ числитель и знаменатель на некоторых интервалах времени имеют различные знаки, в этом случае простое состояние равновесия принимает характер седла;

3) при $|c|=\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}$ исследование проведено выше.

При $0<q<1$ исследуем выражение

$$\frac{a+c\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}\sin\left(t+\arcsin\left(\frac{T_2\left(q-1\right)}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}\right)\right)}{a+c\sqrt{1+\left(T_2\left(q-p\right)\right)^2}\sin\left(t+\arcsin\left(\frac{T_2\left(q-p\right)}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-p\right)\right)^2}}\right)\right)}:$$

1) при $|c|<\min\left(\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}},\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-p\right)\right)^2}}\right)$ числитель и знаменатель одного знака, поэтому простые состояния равновесия имеют характер седла;

2) при $|c|>\min\left(\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}},\frac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-p\right)\right)^2}}\right)$ числитель и знаменатель на некоторых интервалах времени имеют различные знаки, в этом случае простое состояние равновесия принимает характер устойчивого узла;

3) при $c = \dfrac{a}{\sqrt{1+\left(T_2\left(q-1\right)\right)^2}}$ исследование проведено выше.

При $q=1$ точка $\left(a+c\sin t+cT_2\left(q-1\right)\cos t, k_3\left(cT_2\left(1-q\right)\cos t\right)^q+b\right)$ не является состоянием равновесия системы (6). При $q=1$ система (6) имеет единственное состояние равновесия – точку $\left(0, k_3\left(a+c\sin t\right)^q+b\right)$.

Идентичные результаты получаются при анализе подпространства $x_1^+ = \left\{x_1 \geq a\right\}$.

Результаты численного моделирования для параметров $a=0.5$, $b=0.4$, $c=0.1$, $k_3=-1$, $p=2$, $q=2$, $T_1=1$, $T_2=1$ представлены на рисунке 1. В этом случае система (6) имеет два состояния равновесия – точки $\left(0.5, 0.4\left(1+\sin t\right)\right)$ - экстремум статической характеристики, $\left(0, 0.15\left(1+\sin t\right)\right)$.

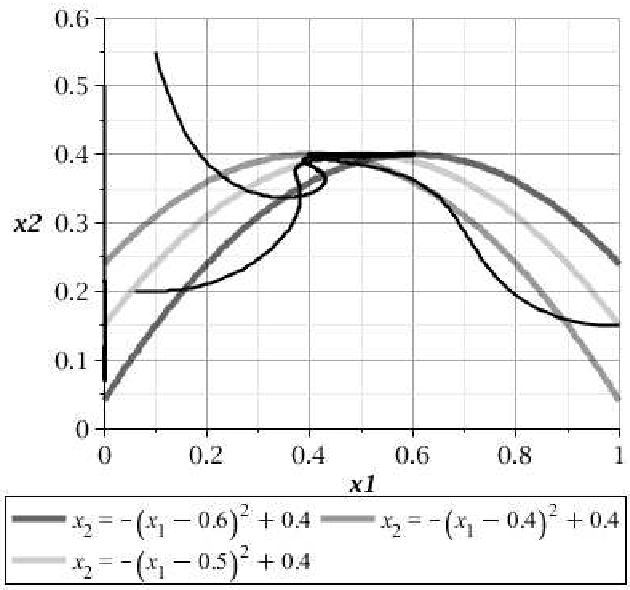

Рисунок 1 – Фазовые траектории системы (6) и её горизонтально дрейфующая статическая характеристика

Вывод

Выбирая величину параметра p в интегральном функционале (2), можно добиться асимптотической устойчивости точки экстремума статической характеристики системы (3) под действием особого управления (5). Из графиков переходных процессов видно, что под особым управлением траектории системы устойчивы, т.е. подтверждаются результаты качественного исследования, причем происходит отслеживание дрейфующих точек экстремума.

Список литературы

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер И.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М. : Наука, 1966. – 568 с.
2. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М. : Наука, 1976. – 496 с.
3. Олейников В.А., Борисенко Р.А. Асимптотические свойства фазовых траекторий и особые управления в оптимальных быстродействиях / Вопросы теории систем автоматического управления. – Л. : Ленинградский государственный университет, 1974.
4. Олейников В.А., Зотов Н.С., Пришвин М.М. Основы оптимального и экстремального управления. – М. : Высшая школа. 1969. – 296 с.
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М. : Наука, 1969. – 384 с.
6. Хорошавин В.С. Прикладные методы качественного исследования особых управлений и структур нелинейных оптимальных систем : дис. … докт. техн. наук. – Кировский политехнический институт, 1993. – 402 с.

Рецензенты:

Присмотров Н.И., д.т.н., профессор кафедры ЭПиАПУ, ФГБОУ ВПО «Вятский государственный университет», г. Киров.

Хорошавин В.С., д.т.н., профессор кафедры ЭПиАПУ, ФГБОУ ВПО «Вятский государственный университет», г. Киров.