УДК 004.94

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА

**Скрыпников А.В., Яковлев К.А.**

*ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет инженерных технологий» (394036, г. Воронеж, Проспект Революции, 19), rivelenasoul@mail.ru*

**В статье предложен общий метод моделирования движения автомобильного потока, основанный на использовании процессов Маркова, отличающийся от известных методов и моделей потока следующим: основные положения метода применимы к моделированию движения по дорогам с различным количеством полос движения; количество скоростных групп, характеристики движения которых исследуются, не ограничено; практически не ограничен диапазон вариации дорожных условий, определяющих режимы движения потоков; результатами моделирования служат не только средние характеристики потока, но также характеристики движения в потоке отдельных автомобилей и отдельных типовых групп потока, что в дальнейшем использовано для повышения достоверности и точности показателей движения автомобилей; исходной информацией для моделирования движения автомобилей в потоке служат результаты моделирования свободного движения. Такой комплексный подход позволяет учитывать динамику тягово-скоростных свойств автомобилей, расширяет состав потока; с существенной полнотой отражаются в транспортно-эксплуатационных характеристиках параметры плана продольного и поперечного профилей, тип и количество дорожной одежды, дорожная обстановка. Применением метода процессов Маркова достигнут переход от малого числа скоростных групп (2, 3 группы) к непрерывному распределению скорости. Тем самым достигнута большая общность при формировании основных положений модели. Предложены практические модели исследования движения автомобилей в потоке на однополосных дорогах и двухполосных дорогах (дороги II–IV категорий).**

Ключевые слова: численные методы, математическое моделирование, имитационное моделирование, транспортный поток, программа.

# NUMERICAL SIMULATION OF THE TRAFFIC FLOW

**Skrypnikov A.V., Yakovlev K.A.**

*Voronezh State University of Engineering Technology (394036, Voronezh, Prospect Revolution, 8), rivelenasoul@mail.ru*

**This paper proposes a general method for modeling traffic flow based on the use of Markov processes, different from the known methods and flow models as follows: fundamentals of the method applied to modeling traffic on roads with different number of lanes; number of velocity groups, the characteristics of which are studied movement is not limited; virtually unlimited range of variation of road conditions, traffic flow determines the mode; simulation results are not only the mean flow characteristics, but also in the flow characteristics of the motion of individual vehicles and individual stream type groups, which further Used To increase the reliability and accuracy of the figures of the car; input for the simulation of movement of cars in the flow simulation results are free motion. This integrated approach allows to take into account the dynamics of the towing vehicle speed properties, extended the scope of the flow ; with substantial completeness reflected in vehicle operating characteristics of the parameters of the plan longitudinal and transverse profiles, the type and amount of pavement, road conditions. Using the method of Markov processes made the transition from a small number of velocity groups (2, 3 groups) to a continuous velocity distribution. There by achieved greater generality in the formation of the main provisions of the model. Some practical research model car traffic flow on a one-lane roads and two-lane roads (II–IV categories).**

Keywords: numerical methods, mathematical modeling, simulation, traffic flow program.

**Введение.** Для описания вероятностных характеристик движения автомобиля типа $v$ (имеющего при свободном движении скорость в пределах $v$, $v+\Delta v$) достаточно знать $P(v)$ – вероятность свободного движения этого автомобиля.

Моделирование движения автомобиля процессом Маркова позволяет составить дифференциальные уравнения, решение которых дает искомую вероятность при различных режимах движения потока.

**Методика.** Поток автомобилей поделим на достаточно большое число скоростных групп с интервалом скорости $\Delta v$. Выберем конкретный автомобиль, который принадлежит к $j$-ой скоростной группе и имеет скорость в пределах $v_j$, $v_j+\Delta v$. В некоторой точке $x$ дороги вследствие ограничения обгонов встречным потоком, автомобиль типа $v_j$ может иметь скорость в пределах $v_j$, $v_j+ \Delta v$.

В соответствии с терминологией процессов Маркова можно сказать, что автомобиль типа $j$ в точке $x$ находится в состоянии $k$=1, 2, 3, ….. $j$, то есть в точке $x$ автомобиль типа $j$ имеет скорость в пределах $v_к$, $v_к+ \Delta v$.

Введем состояние $m$, которое обозначает ситуацию обгона. Возможные переходы из состояния в состояние представлены на рисунке 1.

Вероятность перехода $P_{i,r}$ на участке от $x$ до $x+\Delta x$ из состояния $i$ в состояние $r$ согласно теории Маркова определяется уравнением:

$$P_{i,r} = M_{i,r}\Delta x, \quad (1)$$

где $M_{i,r}$ – плотность перехода из состояния $i$ в состояние $r$.

Плотности переходов зависят от условий движения автомобиля в потоке. Величина, обратная плотности перехода, – это средний путь, который проходит автомобиль, ожидая перехода из состояния $i$ в состояние $r$.

В случайных процессах плотности $M_{i,r}$ – это параметр потока случайных событий, переводящих автомобиль из состояния $i$ в состояние $r$. В Марковских процессах $M_{i,r}$ – параметр простейшего потока, обладающего свойствами стационарности, отсутствия последствия и ординарности.

Потоки случайных событий, переводящих автомобиль из состояния в состояние, в достаточной степени обладает указанными свойствами, и предлагаемое ожидание процесса движения автомобиля в транспортном потоке достаточно близко к Марковскому процессу [1–5].

Свойство стационарности предполагает неизменность интенсивности потока и достаточную длину участка дороги с постоянными дорожными условиями. В этом случае количество событий определенного потока не зависит от месторасположения автомобиля на участке дороги. Практически все исследователи транспортных потоков явно или неявно считали их стационарным на некоторых участках дороги и в некоторые ограниченные периоды времени. Можно считать, опираясь на этот опыт, что потоки стационарны в часовые интервалы времени на участках дороги с примерно постоянными дорожными условиями (количество полос, состояние покрытия, продольный уклон и др.) [3,4,7].

В предложенном описании процесса движения автомобиля в потоке плотности $M_{i,r}$ потоков, переводящих автомобиль типа $j$ из состояния $i$ в состояние $r$, очень малы. Плотности $M_{i,r}$ определяются количеством автомобилей типа $r$, которое равно $\lambda f(v_r)\Delta v$ (здесь $\lambda$ – плотность всего потока автомобилей). Так как $\Delta v$ достаточно малая величина, то плотности $M_{i,r}$ невелики.

Автомобили типа $r$, которые последовательно догоняют исследуемый автомобиль типа $j$, расположены на дороге очень далеко друг от друга и поэтому взаимно независимы. Автомобиль типа $j$ догоняет автомобиль типа $r$ в последовательные моменты времени, независящие друг от друга.

Такое описание процесса движения автомобиля в потоке позволяет считать, что в предложенной модели процесса последствие отсутствует.

Поскольку водитель автомобиля типа $j$ взаимодействует в последовательные моменты времени только с одним автомобилем типа $r$, то поток событий, переводящий автомобиль типа $j$ в состояние $r$, обладает свойством ординарности.

Таким образом, потоки событий, показанные на графе переходов, достаточно близки к простейшим пуассоновским потокам, а предложенная вероятностная модель может быть описана марковским случайным процессом [1,6,9].

В состоянии 1, 2, 3, ……… $j$-1 автомобиль типа $j$ переходит из состояния $j$ при невозможности начать обгон "с ходу" в пределах $x$, $x+\Delta x$. Обозначенная возможность обгона "с ходу" для автомобиля типа $j$ через $\eta$, можно записать для автомобиля типа $j$ вероятность перехода в состояние $k$ = 1, 2, 3, …, $j$-1 на участке от $x$ до $x+\Delta x$ в виде:

$$P_{j,k} = (1-\eta)M_{ik}\ , (2)$$

где $M_{ik}$ – вероятность перехода из состояния $j$ в состояние $k$ на участке от $x$ до $x+\Delta x$ при невозможности обгона.

Вероятность $M_{ik}$ есть вероятность того, что автомобиль типа $j$ (который находится в точке $x$ и имеет скорость в пределах $v_j$, $v_j+\Delta v$) догонит автомобиль типа $k$ до точки $x+\Delta x$.

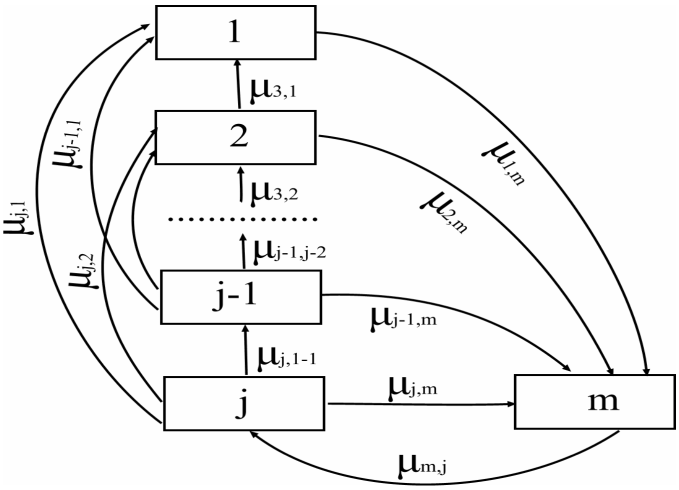


Рисунок 1. Переходы автомобиля типа *j* в состояние 1,2….*j*-1, *m*

Для расчета вероятностей $M_{ik}$ сначала найдем координату точки $a_{i,k}$, которая имеет следующую особенность. Если автомобиль типа *k* находится в интервале *x*, $a_{i,k}$, то автомобиль типа *j* (который находится в точке *x*) всегда догонит автомобиль типа *k* до точки $x+\Delta x$. Координата точки $a_{i,k}$ находится из равенства времени движения: 1) автомобиля типа *j* (имеющего скорость в пределах $v_j$, $v_j+\Delta v$) от *x* до $x+\Delta x$; 2) автомобиля типа *k* (имеющего скорость в пределах $v_k$, $v_k+\Delta v$) от $a_{i,k}$ до $x+\Delta x$, т.е.

$$a_{j,k} = x + \frac{v_j - v_k}{v_j}\Delta x. \quad (3)$$

Вероятность $M_{ik}$ равна отношению интервала *x*, $a_{i,k}$ к средней величине свободного расстояния $1/\lambda'_k$ между автомобилями типа *k* .

$$M_{j,k} = \lambda'_k = \frac{v_j - v_k}{v_j}\Delta x, \quad (4)$$

подставляя (4) в (2), имеем

$$P_{j,k} = (1-\eta)\lambda'_k = \frac{v_j - v_k}{v_j}\Delta x. \quad (5)$$

Из состояния *j* в состояние *m* автомобиль типа *j* переходит в пределах *x*, $x+\Delta x$ при возможности начать обгон «с ходу», вероятность этого перехода равна

$$P_{j,m} = \eta\sum_{k=1}^{j-1}{}'_k = \lambda'_k \frac{v_j - v_k}{v_j}\Delta x, \quad (6)$$

где $\sum_{k=1}^{j-1}{}'_k = \lambda'_k \frac{v_j - v_k}{v_j}\Delta x$ – вероятность того, что автомобиль типа *j* догонит в пределах *x*; $x+\Delta x$ или автомобиль типа 1 или типа 2… или типа *j*-1, т.е. любой автомобиль, скорость которого меньше $v_j$.

Из состояния 1, 2, 3, …, $k$, …, $j$-1 автомобиль типа $j$ переходит в состояние $m$ в пределах $x$, $x+\Delta x$ для выполнения обгона после ожидания благоприятных условий для обгона [5,8,10].

Различия обгонов «с ходу» и «с ожиданием» представлены на рисунке 2. Обгон «с ходу» возникает, когда автомобиль типа $j$ догнал автомобиль типа $k$, $v_j>v_k$ и во встречном потоке имеется интервал, достаточный для обгона. При этом начало обгона не совпадает с моментом проезда встречного автомобиля мимо обгоняющего. Таким образом

$$\eta = P(t \succ \theta) = \int_{\theta}^{\infty} h(t)dt\,, \quad (7)$$

где $h(t)$ – плотность вероятностей интервала между автомобилями; $\theta$ – интервал достаточный для обгона.

Вероятность возможности обгона «с ожиданием» вычисляется следующим образом. Так как автомобиль типа $j$ находится в ожидании обгона, то этому (ожиданию обгона) способствуют следующие события, относящиеся к потоку встречного движения: а) на участке $x$, $x+\Delta x$ находится какой-нибудь автомобиль встречного потока на своей полосе, либо б) 1) на участке $x$, $x+\Delta x$ нет автомобилей встречного потока на своей полосе, 2) за точкой $x+\Delta x$ во встречном потоке нет интервала, большего чем $\theta$.

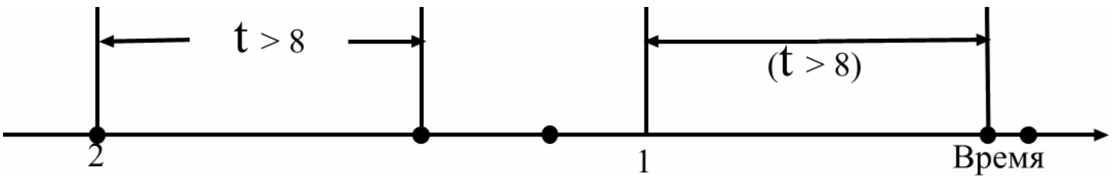


Рисунок 2. Схема к расчету вероятности обгона. Треугольники – автомобили встречного потока; 1 – начало обгона «с ходу», 2 – начало обгона «с ожиданием».

Таким образом, возможность обгона после его ожидания и следования за тихоходным автомобилем имеет место, если возникают следующие события: а) на участке $x$, $x+\Delta x$ находится какой-нибудь автомобиль встречного потока, вероятность его равна $\lambda'_{\lambda}\Delta x$; б) после точки $x$, $x+\Delta x$ во встречном потоке есть интервал, достаточный для обгона, вероятность его равна $\eta_j$.

Таким образом, для любого из состояний 1, 2, 3, …$k$,…. $j$-1 вероятность перехода автомобиля типа $j$ в состояние $m$ из состояния $k$ в пределах $x$, $x+\Delta x$:

$$P_{k,m} = P(a)P(b) = \lambda'_{\lambda}\eta_j\Delta x\,. \quad (8)$$

Из состояния $m$ автомобиль типа $j$ возвращается в состояние $j$ после окончания обгона на участке $x$, $x+\Delta x$. Вероятность окончания обгона на участке $x$, $x+\Delta x$ равна отношению $\Delta x$ к длине пути обгона $S_j$. Принимаем среднюю скорость за время обгона равной скорости свободного движения, тогда вероятность перехода автомобиля типа $j$ из состояния $m$ в состояние $j$ равна

$$P_{m,j} = \frac{\Delta x}{S_j} = \frac{\Delta x}{v_j \theta_j}. \quad (9)$$

Коэффициенты при $\Delta x$ есть плотности соответствующих переходов. Согласно этим плотностям можно разметить граф переходов на рисунке 1 и составить систему дифференциальных уравнений.

В левой части уравнения поставим производную $P'_k$, в правой – столько членов, сколько стрелок связано с состоянием $k$ (если стрелка ведет в левое состояние, член имеет знак плюс и наоборот). Каждый член равен плотности переходов, перемноженной на вероятность того состояния, из которого идет левая стрелка. Для решения нашей задачи достаточно составить уравнение для состояний $j$ и $m$:

$$\begin{cases} P_j' = -P_j \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k' \dfrac{v_j - v_k}{v_k} + P_m \dfrac{1}{v_j \theta_j} \\ P_m' = -P_m \dfrac{1}{v_j \theta_j} + P_j \eta_j \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k' \eta_j \sum_{k=1}^{j-1} P_k \end{cases}. \quad (10)$$

Для практических расчетов при непрерывном распределении скорости преобразуем систему (10) следующим образом. В качестве конкретного автомобиля выбираем такой автомобиль, скорость свободного движения которого попадает в интервал $v$, $v+\Delta v$. Такой автомобиль будем называть автомобилем типа $v$, что соответствует типу $j$. Аналогично $P(v)$ и $f(v)$ соответствует $P_j$ и $P_m$.

Тогда в системе (10) можно перейти от суммы $\sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k' \frac{v_j - v_k}{v_j}$ к интервалу, принимая

$$\lambda'_k = \Lambda'_n f(v_k) \Delta v, \quad (11)$$

где $f(v)$ – плотность вероятностей скорости свободного движения; $\Lambda'_n$ – средняя величина свободного расстояния между автомобилями при плотности $\Lambda_n$.

С учетом преобразований $\Lambda_n = \dfrac{\Lambda_n'}{1 - \Lambda_n' l_0}$, (12), где $l_0$ – средняя величина динамического габарита при плотности потока $\Lambda_n$. Поэтому $\lim\limits_{\Delta v \to 0} \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k' \dfrac{v_j - v_k}{v_j} = \Lambda_n' B(v)$, (13), где $B(v) = \int_0^v \dfrac{v-u}{v} f(u) du$. (14)

Второе преобразование заключается в замене в последнем уравнении системы (8) суммы $\sum_{k=1}^{j-1} P_k$ на 1-$P_m$-$P_j$.

Тогда, опуская индексы и переходя к непрерывному распределению скорости

$$\begin{cases} \frac{dP(v)}{dx} = -\Lambda'_n(x)B(v)P(v) + \frac{1}{v\theta(v)}\pi(v) \\ \frac{d\pi(v)}{dx} = \frac{1}{v\theta(v)}\pi(v) + \Lambda'_n\eta(v)[1-P(v)-\pi(v)] + \Lambda'_n(x)B(v)\eta(v)P(v) \end{cases}, \quad (15)$$

Таким образом, применение процессов Маркова для моделирования потока существенно упрощает методику составления дифференциальных уравнений, описывающих вероятностные характеристики движения отдельного автомобиля в потоке. При различных дорожных условиях изменяются начальные условия системы (15) и тем самым определяются различные режимы движения автомобильных потоков. Классификация решений системы (15) в зависимости от дорожных условий на двухполосных дорогах.

Принципы моделирования движения автомобилей в потоке, разработанные в предыдущих разделах, могут быть применены при моделировании движения потоков по многополосным дорогам.

**Вывод.** Автором разработан общий метод моделирования движения автомобильного потока, основанный на использовании процессов Маркова, отличающийся от известных методов и моделей потока следующим: основные положения метода применимы к моделированию движения по дорогам с различным количеством полос движения; количество скоростных групп, характеристики движения которых исследуются, не ограничено; практически не ограничен диапазон вариации дорожных условий, определяющих режимы движения потоков; результатами моделирования служат не только средние характеристики потока, но также характеристики движения в потоке отдельных автомобилей и отдельных типовых групп потока, что в дальнейшем использовано для повышения достоверности и точности показателей движения автомобилей; исходной информацией для моделирования движения автомобилей в потоке служат результаты моделирования свободного движения. Такой комплексный подход позволяет учитывать динамику тягово-скоростных свойств автомобилей, расширяет состав потока; с существенной полнотой отражаются в транспортно-эксплуатационных характеристиках параметры плана продольного и поперечного профилей, тип и количество дорожной одежды, дорожная обстановка.

Применением метода процессов Маркова достигнут переход от малого числа скоростных групп (2, 3 группы) к непрерывному распределению скорости. Тем самым достигнута большая общность при формировании основных положений модели. Предложены практические модели исследования движения автомобилей в потоке на однополосных дорогах и двухполосных дорогах (дороги II – IV категорий).

## Список литературы


1. Курьянов, В.К. Пропускная способность регулируемого перекрёстка [Текст] / В.К. Курьянов, А.В. Скрыпников, Е.В. Кондрашова, Т.В. Скворцова // Перспективные технологии, транспортные средства и оборудование при производстве, эксплуатации, сервисе и ремонте: межвуз. сборник науч. тр. Вып.2. – Воронеж, 2007. – С.201-204.
2. Курьянов, В.К. Управление, основанное на средних характеристиках транспортного потока [Текст] / В.К. Курьянов, А.В. Скрыпников, Е.В. Кондрашова, Т.В. Скворцова // Перспективные технологии, транспортные средства и оборудование при производстве, эксплуатации, сервисе и ремонте: межвуз. сборник науч. тр. Вып.2. – Воронеж, 2007. – С.204-209.
3. Методы, модели и алгоритмы повышения транспортно-эксплуатационных качеств лесных автомобильных дорог в процессе проектирования, строительства и эксплуатации [Текст]: монография / А.В. Скрыпников, Е.В. Кондрашова, Т.В. Скворцова, А.И. Вакулин, В.Н. Логачев. – М.: Изд-во ФЛИНТА: Наука, 2012. – 310 с.
4. Скворцова, Т.В. Критерии качества управления светофорной сигнализацией [Текст] / Т.В. Скворцова, А.В. Скрыпников, Е.В. Кондрашова // Математическое моделирование, компьютерная оптимизация технологий, параметров оборудования и систем управления: межвуз. сб. научн. тр. / под ред. В.С. Петровского. – Воронеж, 2007. – С.179-181.
5. Скрыпников, А.В. Построение процедур выбора управленческих решений на основе оптимизационных моделей [Текст] / Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. – № 10 (24)/2009, Тамбов, 2009. – С. 217-221.
6. Скрыпников, А.В. Разработка теоретических основ и методов управления лесовозным автотранспортом [Текст] / А.В. Скрыпников // Бюллетень транспортной информации. – 2009 г. – № 9 (171) сентябрь. – С. 25-27.
7. Скрыпников, А.В. Теоретические основы и методы организации и управления дорожным движением [Текст] / Бюллетень транспортной информации. – М., 2010. – № 1 (175). – С.10-15 с.
8. Трофимов Ю.И. Макроскопические модели управления светофорной сигнализацией [Текст] / Ю.И. Трофимов, Е.В. Кондрашова, Ю.В. Лобанов, Д.Ю. Сухов // Деп. в ВИНИТИ, №30-В2007, 11.01.07 г. – 42 с.
9. Трофимов Ю.И. Микроскопические модели движения [Текст] / Ю.И. Трофимов, Е.В.

Кондрашова // Перспективные технологии, транспортные средства и оборудование при производстве, эксплуатации, сервисе и ремонте: межвузовский сборник научных трудов. – Вып.1. – Воронеж, 2006. – С.177-182.
10. Трофимов, Ю.И. Макроскопические модели движения [Текст] / Ю.И. Трофимов, Е.В. Кондрашова // Перспективные технологии, транспортные средства и оборудование при производстве, эксплуатации, сервисе и ремонте: межвузовский сборник научных трудов. – Вып.1. – Воронеж, 2006. – С.167-177.

**Рецензенты:**

Яковлев К.А., д.т.н., доцент кафедры производства, ремонта и эксплуатации машин ФГБОУ ВПО «Воронежская государственная лесотехническая академия», г. Воронеж.

Кондрашова Е.В., д.т.н., профессор кафедры технического сервиса и технологии машиностроения ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I», г. Воронеж.