

ПРИМЕНЕНИЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ОРГАНИЗАЦИИ

Титов В.А., Долгополов А.А.

ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова», Москва, Россия (117997 Российская Федерация, г. Москва, Стремянный пер., 36), e-mail:vtitov213@yandex.ru

В статье рассматривается актуальность введения модели нового типа и использования симплекс-метода для решения задачи управления запасами ресурсов в динамике. Описываются предпосылки и условия для представления задачи управления ресурсами в динамике в виде системы линейных уравнений/неравенств. Анализируются параметры и ограничения модели, их экономический смысл и варианты их изменения для учета меняющихся со временем экономических условий. Приводится практическая интерпретация оптимального решения поставленной задачи. Особое внимание уделяется анализу двойственных оценок, которые позволяют дать оценку востребованности того или иного ресурса для компании с учетом изменяющихся во времени внешних экономических условий и возможности создания запасов. Сделан вывод об эффективности практического применения модели нового типа и удобстве интерпретации полученных с использованием симплекс-метода результатов, а также указаны перспективы её дальнейшего развития.

Ключевые слова: симплекс-метод, линейное программирование, двойственные оценки, управление запасами ресурсов, динамические модели.

THE USE OF THE SIMPLEX METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF DYNAMIC INVENTORY MANAGEMENT ORGANIZATION

Titov V. A., Dolgoplov A.A.

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia (117977 Russian Federation, Moscow, Stremjannyj pereulok, 36), e-mail:vtitov213@yandex.ru

The article considers the necessity to introduce the model of a new type and use of the simplex method for solving the problem of inventory management of resources in the dynamics. Describes the prerequisites and conditions for submission resource management tasks in dynamics in the form of a system of linear equations/inequations. Analysing the characteristics and limitations of the model, its economic meaning and variation to account for the changing economic conditions. Provides a practical interpretation of the optimal solution of the task. Special attention is paid to the analysis of the dual evaluation that allow to assess the relevance of one or another resource for the company, given the time-varying external economic conditions and opportunities of creation of reserves. It is concluded about the effectiveness of practical application of the model of a new type, and ease of interpretation of the obtained using the simplex method results and the prospects of its further development.

Keywords: simplex-method, linear programming, dual evaluation, inventory management, dynamic models.

Введение

В условиях высокой скорости движения денежных и материальных потоков товаров и услуг большое значение приобретают динамические модели управления запасами компании. Однако данные модели обычно задаются нелинейными системами уравнений или неравенств, и для нахождения оптимального решения требуется качественное техническое и программное обеспечение, а также, в большинстве случаев, оптимальное решение находится исключительно с помощью численных методов решения. Кроме того, стоит отметить узкую направленность практической интерпретации результатов, полученных в ходе решения, и невозможность дальнейшей аналитической работы с ними без соответствующего уровня технической оснащенности.

Решение вышеперечисленных проблем при управлении запасами на производстве с учетом временной составляющей лежит в области применения линейных моделей. Как известно, наиболее эффективным методом нахождения оптимального решения в моделях, заданных линейными системой ограничений и целевой функцией, является симплекс-метод и его модификации. Привлекательность данного метода заключается не только в нахождении точного оптимального решения задачи линейного программирования, но и в параллельном нахождении двойственных оценок переменных модели, практическая интерпретация которых достаточно проста и одновременно довольно информативна с точки зрения управления оборотными активами компании.

В соответствии с вышесказанным предлагается ввести новый тип моделей линейного программирования, который позволил бы представить задачу управления запасами фирмы в динамике. Наиболее просто реализовать такую модель на практике можно, объединив все временные интервалы, на которых будет рассматриваться задача управления запасами. Соответственно предлагаемый способ подразумевает решение одной задачи для двух и более временных интервалов, что, конечно же, отразится на увеличении размерности рассматриваемой задачи, однако, результаты решения будут доступны для практической интерпретации, а сама модель будет универсальной для применения в любых условиях.

Прежде всего, необходимо ввести ряд экономически и практически обоснованных допущений и условий, учет которых позволит описать задачу управления активами в различных временных интервалах с помощью одной целевой функции и единой системы уравнений и/или неравенств.

1. Целевой функцией модели является суммарная чистая прибыль от производственно-коммерческой деятельности компании на всех временных интервалах, которую необходимо максимизировать, причем спрос на продукцию принимается неограниченным, то есть компания всегда может в полном объеме реализовать произведенную продукцию по рыночным ценам в рамках любого временного интервала.
2. Указанный вид целевой функции может привести к случаю, когда в оптимальном решении задачи на одном или нескольких временных интервалах компания не будет ничего производить, однако, на практике такое невозможно. Поэтому в модель целесообразно включить ограничения на объемы производства «снизу», которые на каждом временном интервале обеспечивают минимально допустимую производственную деятельность с целью поддержания функционирования компании.
3. У компании всегда (за исключением первого временного интервала) есть два варианта снабжения собственного производства: приобретение новых ресурсов на рынке,

предложение которых для каждого временного интервала ограничено, и использование складских запасов собственных ресурсов.

4. Затраты на хранение ресурсов учитываются как произведение количества ресурсов данного типа на стоимость хранения единицы ресурса указанного типа, в которую включены постоянные издержки. Постоянные издержки хранения в данном случае равномерно распределяются между всеми запасенными ресурсами.

5. Затраты на ресурсы, из которых невозможно сформировать запасы, в модели предлагается учесть путем уменьшения прибыли с единицы произведенной продукции указанного типа, как в целевой функции, так и в системе ограничений.

6. Предложение ресурсов, а также чистая прибыль от продажи продукции компании во всех рассматриваемых временных интервалах считаются известными величинами и могут иметь различные значения в разных временных интервалах.

Отдельно стоит отметить учет использования складских запасов, созданных в прошлом временном интервале, при производстве продукции в настоящий момент. Поскольку основной целью использования описываемой модели является возможность получения двойственных оценок для ресурсов, полученных из разных источников в различных временных интервалах, и которые описывают востребованность каждого конкретного типа ресурса в данный момент времени в зависимости от источника его получения, то в модели необходимо четко разделять ресурсы не только по времени, но и по источнику их получения для производства в заданный момент времени. Однако при изготовлении продукции источник получения ресурса не играет никакой роли с точки зрения производственного процесса, поэтому в модели необходимо рассмотреть все вариации производственных программ, количество которых устанавливается последовательным перебором всех возможных комбинаций снабжения производственного процесса идентичными и полностью взаимозаменяемыми ресурсами, взятыми из различных источников.

Из вышесказанного следует, что в каждый момент времени количество производственных программ для одного вида продукции, обеспечиваемых n -ым количеством типов ресурсов, у которых могут быть различные источники происхождения (предложение ресурса на рынке в данный момент или складские запасы, созданные в прошлом периоде), в соответствии с формулой для вычисления числа размещений с повторениям будет составлять: 2^n . Для m -го количества типов продукции данное число увеличится соответственно в m -раз.

Таким образом, с учетом всего перечисленного выше, предлагаемая линейная модель динамического управления запасами будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
F: \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{m \cdot 2^n} (p_j^t x_j^t) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n (c_i^t r_i^t) &\rightarrow \max \\
A_{[(nT) \times (m \cdot 2^n)]}^1 X + \bar{r} &\leq \bar{b} \\
A_{[(nT) \times (m \cdot 2^n)]}^2 X &= \bar{r} \\
\sum_{j=1}^{m \cdot 2^n} (p_j x_j) &\geq \bar{k} \\
x_j^t, r_i^t, k^t &\geq 0, i \in [1; n], j \in [1; m \cdot 2^n], t \in [1; T]
\end{aligned}$$

где:

x_j^t – это количество продукции $(j - \lfloor \frac{j}{2^n} \rfloor * 2^n)$ -го вида, изготовленной по $\lfloor \frac{j}{2^n} \rfloor$ - производственной программе;

p_j^t – это чистая прибыль с единицы продукции $(j - \lfloor \frac{j}{2^n} \rfloor * 2^n)$ -го вида, изготовленной по $\lfloor \frac{j}{2^n} \rfloor$ - производственной программе;

c_i^t – это затраты на хранение единицы ресурса i -го вида, приобретенного в момент времени t ;

X – это вектор, описывающий объем производственной продукции по всем типам программ для каждого конкретного временного интервала из рассматриваемого периода;

A^1, A^2 – это производственные матрицы размерности $[(nT) \times (m \cdot 2^n)]$, которые описывают затраты ресурсов, соответственно привлекающихся на производство из двух различных источников, причем на изготовление каждого вида продукции различным способом. Они имеют блочную структуру, в которой блоки, содержащие ненулевые элементы, лежат на главной диагонали и описывают все производственные программы и затраты ресурсов на каждую из них в конкретном временном интервале;

\bar{b} – вектор размерности $[n \cdot T]$, описывающий предложение i -го ресурса на рынке в момент времени t ;

\bar{r} – вектор размерности $[n \cdot T]$, задающий объем запаса i -го ресурса, создаваемого в момент t и доступного к использованию в производстве в момент времени $t+1$;

\bar{k} – вектор размерности $[T]$, отображающий минимальный размер чистой прибыли компании от производства, необходимого для поддержания работы в момент времени t .

В ходе исследования модели, приведенной выше, определяется вектор X , задающий объемы производства продукции каждого типа по различным производственным программам, вектор \bar{r} , определяющий запасы ресурсов каждого типа, создаваемые в момент времени t и используемые в момент времени $t+1$, а также вектор двойственных оценок

ресурсов – \bar{d} , который в некотором интервале устойчивости будет определять увеличение значения целевой функции от увеличения запаса каждого ресурса из каждого источника на 1 ед. Вектор \bar{d} целесообразно разбить на два вектора: \bar{d}_b и \bar{d}_r , которые будут содержать двойственные оценки ресурсов, соответственно, закупаемых на рынке и лежащих на складе. С точки зрения практической интерпретации вектор \bar{d} описывает увеличение прибыли компании от увеличения конкретного типа ресурса с учетом источника его происхождения в любой момент времени, рассматриваемый в модели. Именно координаты вектора \bar{d} делают предлагаемую модель актуальной для использования, поскольку они позволяют учитывать востребованность ресурсов не только в данный момент времени, но и с учетом их завтрашней стоимости, уровня предложения на рынке и ряда иных показателей, которые будут перечислены ниже.

В первую очередь необходимо описать принципы изменения двойственных оценок в зависимости от изменяющихся условий, заданных в модели. Очевидно, двойственные оценки, соответствующие запасам ресурсов в момент t , будут отличны от нуля только в том случае, если сложатся соответствующие экономические условия в моменты времени $t-1$ и t , к примеру:

- Высокое предложение ресурса i -го типа в момент времени $t-1$, не позволяющее использовать его в полном объеме в момент времени $t-1$, а в момент времени t , напротив, предполагается дефицит указанного ресурса, при котором объемы предложения остальных ресурсов окажутся избыточными на производстве;
- Увеличение цены продукции, в изготовлении которой участвует некоторый ресурс i , в момент времени t по сравнению с моментом времени $t-1$. Очевидно, что увеличение цены должно покрывать затраты на хранение ресурса;
- Увеличение цены единицы ресурса i к моменту времени t , которое опосредованно отразится на размере чистой прибыли (p_j^t), получаемой с продукции, в изготовлении которой принимает участие соответствующий ресурс.

Также возможны иные вариации экономических условий, которые могут быть описаны в приведенной модели, и в которых будет целесообразно создавать запас ресурсов.

Ниже описаны основные принципы изменений значений двойственных оценок, в зависимости от изменений условий модели, и случаи, в которых будет создаваться запас ресурсов. В приведенной модели легко видеть, что при оптимальном решении в отношении двойственных оценок ресурсов всегда будет выполняться неравенство: $d_{ib}^t \geq d_{ir}^{t+1} - c_i^t$, где d_{ib}^t – это двойственная оценка ресурса i -го типа, закупаемого на рынке в момент времени t , а d_{ir}^{t+1} – это двойственная оценка запасов ресурса i -го типа в момент времени $t+1$. В случаях,

когда будет формироваться запас ресурса i , неравенство станет равенством, что легко обосновать с практической точки зрения, так как источником запасов ресурса в момент времени $t+1$ является предложение данного ресурса на рынке в момент времени t , и, соответственно, если растет востребованность запасов данного ресурса в момент времени $t+1$, то будет увеличиваться и двойственная оценка закупаемого ресурса в момент времени t . Причем, в случае, если предложение ресурса в момент времени t является избыточным, даже с учетом создаваемого запаса к моменту времени $t+1$, то двойственная оценка ресурса, приобретаемого на рынке в момент времени t , будет равна нулю и, следовательно, будут иметь место следующие равенства:

$$d_{ib}^t = d_{ir}^{t+1} - c_i^t \text{ при } d_{ib}^t = 0 \text{ имеем: } d_{ir}^{t+1} = c_i^t$$

В любом другом случае запасы создаваться не будут, поскольку, согласно значениям двойственных оценок, эффективней будет использовать ресурс непосредственно в момент его покупки на рынке, нежели хранить его в течение некоторого временного интервала за определенную плату.

Для демонстрации принципа работы рассматриваемой модели следует привести пример с конкретными числовыми значениями. Рассмотрим случай, когда фирмой производятся два вида продукции с использованием трех типов ресурсов. Предположим, что нам известно рыночное предложение ресурсов, а чистая прибыль от единицы реализованной продукции в следующем временном интервале останется неизменной. Пусть минимальная сумма чистой прибыли, позволяющая предприятию поддерживать свою деятельность в момент времени $t=1$, составляет 1500 денежных единиц. Тогда модель управления запасами для двух временных интервалов $t \in [1,2]$ будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} F: 18x_1^1 + 24x_2^1 + 18x_1^2 + 24x_2^2 + 18x_3^2 + 24x_4^2 + 18x_5^2 + 24x_6^2 + 18x_7^2 + 24x_8^2 + 18x_9^2 + 24x_{10}^2 + \\ \quad + 18x_{11}^2 + 24x_{12}^2 + 18x_{13}^2 + 24x_{14}^2 + 18x_{15}^2 + 24x_{16}^2 - 1,1r_1^1 - 0,4r_2^1 - 0,8r_3^1 \rightarrow \max \\ \quad 3x_1^1 + 1,7x_2^1 + r_1^1 \leq 300 \\ \quad 2x_1^1 + 4x_2^1 + r_2^1 \leq 250 \\ \quad 1,2x_1^1 + 5x_2^1 + r_3^1 \leq 300 \\ 3x_1^2 + 1,7x_2^2 + 3x_1^1 + 1,7x_2^1 + 3x_1^2 + 1,7x_2^2 + 0 + 0 + 3x_1^1 + 1,7x_2^1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \leq 300 \\ \quad 2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1^1 + 4x_2^1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2x_1^1 + 4x_2^1 + 0 + 0 + 2x_1^2 + 4x_2^2 \leq 250 \\ 1,2x_1^2 + 5x_2^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1,2x_1^1 + 5x_2^1 + 1,2x_1^2 + 5x_2^2 + 1,2x_1^1 + 5x_2^1 + 0 + 0 \leq 100 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 3x_1^2 + 1,7x_2^2 + 0 + 0 + 3x_1^1 + 1,7x_2^1 + 3x_1^2 + 1,7x_2^2 + 3x_1^1 + 1,7x_2^1 \leq r_1^1 \\ \quad 0 + 0 + 0 + 0 + 2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1^1 + 4x_2^1 + 2x_1^2 + 4x_2^2 + 0 + 0 + 2x_1^1 + 4x_2^1 + 0 + 0 \leq r_2^1 \\ 0 + 0 + 1,2x_1^2 + 5x_2^2 + 1,2x_1^1 + 5x_2^1 + 1,2x_1^2 + 5x_2^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1,2x_1^1 + 5x_2^1 \leq r_3^1 \\ \quad 18x_1^1 + 24x_2^1 \geq 1500 \end{array} \right.$$

Оптимальное решение данной задачи будет определяться, как было сказано выше, двумя векторами, описывающими объемы производства каждого вида продукции с учетом

производственной программы и объемы запасов ресурсов. Данные вектора будут иметь следующие координаты:

$$X = (90,12; 17,44; 10,66; 17,44; 79,46; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0), \bar{r} = (0; 0; 95,35)$$

Вектора двойственных оценок будут иметь следующий вид:

$$\bar{d}_b = (2,79; 4,81; 0; 3,27; 3,61; 0,8), \bar{d}_r = (3,89; 3,61; 0,8)$$

Как видно из решения задачи, предполагаемый дефицит рыночного предложения ресурса третьего типа в момент времени $t=2$ можно скомпенсировать созданием запаса в размере 95,35 единиц в момент времени $t=1$. Также стоит отметить, что размеры и условия рыночного предложения ресурса третьего типа в моменты времени $t=1$ и $t=2$ таковы, что востребованность в данном ресурсе, на фоне предложения других ресурсов, для компании равна нулю.

Стоит обратить внимание на тот факт, что при равных размерах чистой прибыли, получаемой в различных производственных программах, то есть, когда мы предполагаем, что цена ресурсов остается неизменной для различных временных интервалов, двойственные оценки для одного типа ресурса, берущегося со склада и закупаемого на рынке, будут равны. Однако, если увеличение запасов ресурса на 1 ед. даст прирост к значению целевой функции не более чем на величину равную $d_{ir}^t - c_i^t$, то увеличение рыночного предложения того же ресурса на 1 ед. даст прирост целевой функции в размере d_{ib}^{t+1} , и в этом случае увеличение рыночного предложения в модели приведет к замещению ресурсов, используемых из запасов, на ресурсы, предлагаемые на рынке.

Подводя итоги всего сказанного, можно сделать следующие выводы касательно общей эффективности, актуальности и практического значения использования предлагаемой модели:

- 1) Модель позволяет находить объемы запасов ресурсов различных типов, ориентируясь не только на сложившиеся в данный момент времени экономические условия в сфере деятельности компании, но и опираясь на предполагаемые изменения этих условий в обозримом будущем.
- 2) Набор двойственных оценок, получаемый в ходе нахождения оптимального решения, является удобным и наглядным инструментом для лица, принимающего решение, поскольку он позволяет оценить полезность того или иного ресурса в некотором интервале устойчивости без применения дополнительных и сложных вычислений.
- 3) В указанном виде модель можно использовать для получения практических результатов и оценочных значений, которые позволят составить представление о востребованности ресурсов для компании и объемах предполагаемых запасов ресурсов для использования в будущих периодах.

4) Модель имеет потенциал дальнейшего развития. В ней с помощью дальнейших модификаций можно учесть ряд важных факторов, к примеру, факторы временной стоимости денег или ликвидности различных типов ресурсов.

Список литературы

1. Дорохина Е.Ю., Халиков М.А. Моделирование микроэкономики. – М.: Экзамен, 2000.
2. Минько Э.В., Минько А.Э. Методы прогнозирования и исследования операций: Учеб. пособие / под ред. Будагова А.С. – М.: Финансы и статистика : ИНФРА-М, 2010.
3. Сагитов Р.Р., Шершенев В.Г. Линейная алгебра. Ч. II: учеб.-метод.пособие // Рос. экон. акад. им. Г. В. Плеханова. – М. : Менеджер, 2007.
4. Суровцев Л.К. Математическая экономика: учеб. пособие. – М.: Экономика, 2011.
5. Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю. Линейное и целочисленное линейное программирование. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2004.

Рецензенты:

Тихомирова Е.И., д.э.н., профессор, декан факультета математической экономики и информатики ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова» Министерства образования и науки РФ, г. Москва.

Татарников О.В., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова» Министерства образования и науки РФ, г. Москва.