УДК 517.929

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Колпаков И.Ю.[1]

[1]*ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь, Россия (614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29), e-mail: kolpakov.ilia@mail.ru*

В работе найдены условия разрешимости периодической краевой задачи для одного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Построение математических моделей некоторых реальных процессов приводит к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, и в частности к задаче, рассматриваемой в работе. Поэтому исследование таких задач является актуальным. С помощью метода явной линеаризации исходная задача сводится к квазилинейной краевой задаче, для доказательства существования решения которой применяется теорема о неявном операторе. В работе доказывается существование решения рассматриваемой задачи на шаре радиуса *R* с центром в нуле пространства непрерывно дифференцируемых функций. Результаты работы могут быть использованы при исследовании краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.

Ключевые слова: периодическая краевая задача, существование решения, теорема о неявном операторе.

ABOUT EXISTENCE PERIODIC SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST ORDER WHICH HASN'T BEEN RESOLVED BY RATHER DERIVATIVE

Kolpakov I.Y.[1]

[1]*Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia (614990, Perm, Komsomolsky ave., 29), e-mail: kolpakov.ilia@mail.ru*

Conditions of solvability of a periodic boundary value problem for one differential equation of the first order which hasn't been resolved by rather derivative are found in work. Creation of mathematical models of some real processes leads to problems for the ordinary differential equations which haven't been resolved by rather senior derivative and, in particular, to a task, considered in work. Therefore research of such problems is actual. By means of a method of obvious linearization the initial task is reduced to a quasilinear boundary value problem, the theorem of the implicit operator is applied to the proof of which existence of the solution. In work existence of the solution of a considered problem on a sphere of radius *R* with the center in zero of space of continuously differentiable functions is proved. Results of work can be used at research of boundary value problems for the ordinary differential equations of the first order which haven't been resolved by rather derivative.

Keywords: periodic boundary value problem, existence of solution, theorem of the implicit operator.

Рассмотрим периодическую краевую задачу для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

$$\begin{cases} g(t,\dot{x}) = f(t,x), \\ x(0) = x(T),\, t \in [0;T], \end{cases} \qquad (1)$$

где функции $f, g : [0;T] \times R^1 \to R^1$ и предполагается, что функция g непрерывна, функция f удовлетворяет условию Каратеодори.

Пусть C - пространство непрерывных на отрезке $[0;T]$ функций, L_∞ – пространство измеримых ограниченных в существенном на отрезке $[0;T]$ функций, C^1 - пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0;T]$ функций с нормой

$$\|x\|_{C^1} = \|x\|_C + \|\dot{x}\|_C.$$

Под решением понимается такой элемент пространства C^1, который почти всюду удовлетворяет уравнению и краевому условию задачи (1).

В работе доказывается существование решения задачи (1) в шаре радиуса R с центром в точке $x = 0$ пространства C^1. С помощью метода явной линеаризации задача (1) сводится к квазилинейной краевой задаче, для доказательства существования решения которой применяется теорема из работы [8].

Будем рассматривать задачу (1) в предположении, что существует такая функция $g_0(t,v) = l(t)v$, удовлетворяющая условиям:

- для каждого фиксированного $t \in [0;T]$ на искомом шаре с центром в точке $x = 0$ пространства C^1 выполняется неравенство: $|g_0(t,v) - g(t,v)| \le k_1|v|$ (данное условие предполагает, что функция $g(t,v)$ должна удовлетворять условию $g_0(t,0) - g(t,0) \equiv 0$);

- оператор $M : C^1 \to C^1$, определенный равенством: $(Mx)(t) = \int\limits_0^t l^{-1}(s)\big(g_0(s,\dot{x}(s)) - g(s,\dot{x}(s))\big)ds$, является вполне непрерывным оператором.

Некоторые математические модели реальных процессов приводят к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, и в частности к задаче (1). Обычно при исследовании нелинейных задач, в том числе и задачи (1), используется явная или неявная линеаризация. В частности, в работах [4; 6; 9] используется редукция нелинейной задачи к некоторой вспомогательной квазилинейной, к которой применяются известные схемы исследования на разрешимость квазилинейных или резонансных краевых задач. К числу методов, использующих неявную линеаризацию нелинейных задач, можно отнести метод Ньютона-Канторовича, метод применения теорем о неявной функции, методы теории нелинейных фредгольмовых операторов. В этом случае нелинейный оператор аппроксимируется своей производной [2; 3; 5; 10].

Как уже было указано ранее, в работе используется первый подход. Отметим, что в отличие от ранее цитируемых работ в настоящей работе предполагается, что нелинейную задачу для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной, можно записать в виде (1) и что существует такая функция $g_0(t,v)=l(t)v$, для которой выполняется неравенство $|g_0(t,v)-g(t,v)|\le k_1|v|$. Помимо этого, в работе используется подход, предложенный автором [1] для доказательства разрешимости квазилинейных краевых задач в случае резонанса.

Обозначим через $h(t)=\dfrac{1}{l(t)}$, при этом будем предполагать, что функция $l^{-1}(t)\in L_\infty$ на отрезке $[0;T]$. Существование такой функции позволяет задачу (1) переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=h(t)\big(g_0(t,\dot{x})-g(t,\dot{x})+f(t,x)\big), \\ x(0)=x(T),\, t\in[0;T]. \end{cases} \qquad (2)$$

Обозначим через X и Y пространства $X=\left\{x\in C^1[0;T] \,\middle|\, x(0)=x(T)\right\}$ и $Y=C[0;T]$ соответственно. Тогда задачу (2) можно записать в виде операторного уравнения

$$Lx=Fx \qquad (2^*)$$

в пространстве X, где операторы $L, F: X\to Y$ определены равенствами

$$Lx=\dot{x},\ Fx=h(t)n(t,x,\dot{x}),$$

где $n(t,x,\dot{x})=g_0(t,\dot{x})-g(t,\dot{x})+f(t,x)$. Отметим, что краевая задача (2) является резонансной, так как оператор $L:X\to Y$ не обратим.

Обозначим ядро и образ линейного оператора L через $\ker L$ и $R(L)$ соответственно. Непосредственная проверка показывает, что ядро оператора L имеет вид:

$$\ker L=\left\{\, x\in X \,\middle|\, x(t)\equiv const\right\}.$$

Оператор L является нетеровым оператором. Пространство X представимо в виде: $X=X_0\oplus\ker L$, где подпространство $X_0=\left\{\, x\in X \,\middle|\, x(0)=0\right\}$. Тогда элемент $x\in X$ представим в виде $x=\chi+u$, где $\chi\in X_0$ и $u\in\ker L$.

Пусть $P:X\to X$ проектор на $\ker L$, определенный равенством $(Px)(t)=x(0)$, а $Q:Y\to Y$ проектор на $R(L)$, $Qy=y-\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T y(s)\,ds$. Тогда соответствующий дополнительный проектор Q^c имеет вид $Q^c y=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T y(s)\,ds$, откуда образ оператора L:

$$R(L)=\left\{y\in Y \,\middle|\, \int_0^T y(s)\,ds=0\right\}.$$

Дадим определение обобщенно обратного оператора [1]: оператор $K_p : R(L) \to X$ называется обобщенно обратным к линейному оператору $L : X \to Y$, ассоциированным с проектором $P : X \to X$, если справедливы равенства:

1) $LK_p y = y$ для любого $y \in R(L)$;

2) $K_p Lx = P^c x$ для любого $x \in X$;

3) $P^c K_p y = K_p y$ для любого $y \in R(L)$.

Условимся в дальнейшем обобщенно обратный к L оператор K_p записывать просто K.

Из нетеровости оператора L следует, что существует обобщенно обратный к L оператор $K : R(L) \to X_0$, определяемый по формуле: $(Ky)(t) = \int\limits_0^t y(s)\,ds$.

Так как оператор L не обратим ($R(L) \neq Y$), то нужно доказать существование таких множества M и непрерывного оператора $T : X_0 \to \ker L$, что оператор $F(I+T)$ переводит это множество в образ оператора L. Для этого применяется теорема о неявном операторе к операторному уравнению:

$$Q^c F(\chi, u) = 0. \qquad (3)$$

Замечание. Следуя [7, с. 670], будем отождествлять пространства $X \oplus Y$ и $X \times Y$ с согласованными нормами: $\|(x;y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ (то есть $X \oplus Y \leftrightarrow X \times Y$, $x + y \leftrightarrow (x;y)$). Поэтому далее при необходимости прямую топологическую сумму $X_0 \oplus \ker L$ будем рассматривать как прямое произведение $X_0 \times \ker L$ с изометричной нормой, при этом значение оператора F на элементе $x = \chi + u$ будем записывать в виде $F(\chi, u)$.

Рассмотрим производную оператора F в некоторой точке (χ_0, u_0) как оператор вида:

$$F'(\chi_0, u_0) : X_0 \oplus \ker L \to Y,$$

тогда оператор $F'(\chi_0, u_0)$ можно представить в виде суммы операторов

$$F'(\chi_0, u_0) = F'_\chi(\chi_0, u_0) + F'_u(\chi_0, u_0),$$

где $F'_\chi(x_0, u_0) : X_0 \to Y$ и $F'_u(\chi_0, u_0) : \ker L \to Y$.

Для решения вопроса о разрешимости уравнения (2*), а, следовательно, и задачи (1), воспользуемся теоремой из [8].

Теорема 1. Пусть оператор L - нетеров, K - обобщенно обратный к L оператор, произведение KF вполне непрерывно, оператор F непрерывен и имеет частную производную $F'_u(\chi_0, u_0)$, непрерывную в нуле $\theta \in X$ (в дальнейшем положим $\theta = (0;0)$). Пусть далее $F(0,0) \in R(L)$, оператор $Q^c F'_u(0,0)$ непрерывно обратим и справедливы следующие оценки:

1) $\left\| \left[Q^c F'_u(0,0) \right]^{-1} \right\| \le m$;

2) $\left\| Q^c \left(F'_u(\chi, u) - F'_u(0,0) \right) \right\| \le c\left(\|\chi\| + \|u\| \right)$, $\forall\, (\chi, u) \in X$;

3) $\left\| Q^c \left(F(\chi, 0) - F(0,0) \right) \right\| \le k\|\chi\|$, $\forall\, \chi \in X_0$;

4) $\|Fx\| \le a + b\|x\|$;

5) $b\|K\| < 1$;

6) $\dfrac{\|K\|(a + b\rho)}{1 - b\|K\|} \le \dfrac{1}{mc\left(\sqrt{mk+1} + \sqrt{mk}\right)^2}$, где $\rho = \dfrac{\sqrt{mk}}{mc\left(\sqrt{mk+1} + \sqrt{mk}\right)}$.

Тогда существует решение уравнения $Lx = Fx$.

Будем проверять условия теоремы 1 для операторного уравнения (2*) последовательно, с приведением требуемых при этом ограничений.

1. Покажем, что оператор F является непрерывным. Поскольку функция $h(t) \in L_\infty$, а функция $n(t, x, \dot{x})$ представляет разность непрерывной функции $g(t, v)$ и функции $f(t, x)$, удовлетворяющей условию Каратеодори, то оператор $Fx = h(t) n(t, x, \dot{x})$ - непрерывен.

2. Перейдем к условию $F(0,0) \in R(L)$. Запишем уравнение (3) для операторного уравнения (2*), для этого определим вид оператора F на элементе $(\chi, u) \in X$:

$$F(\chi, u) = h(t)\left(g_0(t, \dot{\chi}, 0) - g(t, \dot{\chi}, 0) + f(t, \chi, u) \right).$$

Откуда $Q^c F(\chi, u) = \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T h(s) n(s, \chi + u, \dot{\chi})\, ds$ и, следовательно, уравнение (3) запишется в виде:

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T h(s) n(s, \chi + u, \dot{\chi})\, ds = 0.$$

Согласно теореме 1 должно выполняться условие $F(0,0) \in R(L)$, с учетом того, что условие $\left| g_0(t, v) - g(t, v) \right| \le k_1 |v|$ предполагает выполнение равенства $g_0(t, 0) - g(t, 0) \equiv 0$, получим: $F(0,0) = h(t)\left(g_0(t,0,0) - g(t,0,0) + f(t,0,0) \right) = h(t)\, f(t,0,0)$.

Тогда, поскольку условие $F(0,0) \in R(L)$ означает, что $Q^c F(0,0) = 0$, получим условие:

$$\frac{1}{T}\int_0^T h(s)\, f(s,0,0)\,ds = 0 .$$

3. Далее определим вид оператора $F'_u(\chi_0,u_0): \ker L \to Y$. Поскольку у оператора $F(\chi,u)$ элемент $u \in \ker L$ содержит только функция $f(t,\chi,u)$, то

$$F'_u(\chi,u) = h(t)\, f'_{2,u}(t,\chi,u),$$

где $f'_{2,u}(t,\chi,u)$ означает частную производную функции $f(t,x)$ по второму аргументу, действующую из $\ker L$ в Y. Тогда обратный оператор для оператора $Q^c F'_u(0,0)$ имеет вид:

$$\left(Q^c F'_u(0,0)\right)^{-1} = T\left(\int_0^T h(s)\, f'_{2,u}(s,0,0)\,ds\right)^{-1}.$$

Таким образом, оценка его нормы $\left\|\left[Q^c F'_u(0,0)\right]^{-1}\right\| \le m$ определяется константой:

$$m = T\left|\int_0^T h(s)\, f'_{2,u}(s,0,0)\,ds\right|^{-1}.$$

4. Найдем константу c из условия $\left\|Q^c\left(F'_u(\chi,u) - F'_u(0,0)\right)\right\| \le c\left(\|\chi\| + \|u\|\right)$, в предположении, что частная производная функции $f(t,x)$ по x удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с константой c_2: $\left|f'_2(t,x_1) - f'_2(t,x_2)\right| \le c_2\left|x_1 - x_2\right|$:

$$\left\|Q^c\left(F'_u(\chi,u) - F'_u(0,0)\right)\right\|_C = \max_{[0;T]}\left|\frac{1}{T}\int_0^T h(s)\left(f'_{2,u}(s,\chi,u) - f'_{2,u}(s,0,0)\right)ds\right| \le$$

$$\le \beta\left\|f'_{2,u}(t,\chi,u) - f'_{2,u}(t,0,0)\right\|_C \le \beta c_2\|\chi + u\|_C \le \beta c_2\|\chi + u\|_{C^1} \le \beta c_2\left(\|\chi\|_{C^1} + \|u\|_{C^1}\right).$$

Таким образом, константа $c = \beta c_2$, где $\beta = vrai\sup\left|h(t)\right|$.

5. Далее найдем константу k из условия $\left\|Q^c\left(F(\chi,0) - F(0,0)\right)\right\| \le k\|\chi\|$, в предположении, что функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с константой k_2: $\left|f(t,x_1) - f(t,x_2)\right| \le k_2\left|x_1 - x_2\right|$, и с учетом условия $\left|g_0(t,v) - g(t,v)\right| \le k_1|v|$:

$$\left\|Q^c\left(F(\chi,0) - F(0,0)\right)\right\|_C = \max_{[0;T]}\left|\frac{1}{T}\int_0^T h(s)\left(n(s,\chi,\dot{\chi}) - n(s,0,0)\right)ds\right| \le$$

$$\le \beta\left\|\left(g_0(t,\dot{\chi},0) - g(t,\dot{\chi},0)\right) + \left(f(t,\chi,0) - f(t,0,0)\right)\right\|_C \le$$

$$\leq \beta\left(\left\|g_0(t,\dot{\chi},0)-g(t,\dot{\chi},0)\right\|_C+\left\|f(t,\chi,0)-f(t,0,0)\right\|_C\right)\leq \beta\left(k_1\|\dot{\chi}\|_C+k_2\|\chi\|_C\right)\leq \beta\gamma\|\chi\|_{C^1}.$$

Таким образом, константа $k=\beta\gamma$, где $\gamma=max(k_1;k_2)$.

6. Найдем теперь оценку нормы $\|Fx\|\leq a+b\|x\|$, в предположении, что функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию: $\left|f(t,x)\right|\leq a_1+b_1|x|$, и с учетом условия $\left|g_0(t,v)-g(t,v)\right|\leq k_1|v|$:

$$\|Fx\|_C=\max_{[0;T]}\left|h(s)n(s,x,\dot{x})\right|\leq \beta\left\|g_0(t,\dot{x})-g(t,\dot{x})+f(t,x)\right\|_C\leq$$
$$\leq \beta\left(\left\|g_0(t,\dot{x})-g(t,\dot{x})\right\|_C+\left\|f(t,x)\right\|_C\right)\leq \beta\left(k_1\|\dot{x}\|_C+\left(a_1+b_1\|x\|_C\right)\right)\leq \beta\left(a_1+\alpha\|x\|_{C^1}\right)$$

Таким образом, константы $a=\beta a_1,\quad b=\beta\alpha$, где $\alpha=\max(b_1;k_1)$.

Замечание. Для доказательства полной непрерывности произведения KF рассмотрим распространение оператора K на пространство C, то есть будем считать, что оператор K действует из пространства C в C. Тогда оператор K вполне непрерывен, а, следовательно, произведение KF также вполне непрерывно. Нетрудно показать, что $\|K\|_{C\to C}\leq T$.

Докажем существование решения уравнения $x(t)=\int\limits_0^t\left(F(I+T)x\right)(s)ds$ на подпространстве X_0, содержащемся в пространстве C. Тогда, вследствие непрерывности оператора F, правая часть данного уравнения принадлежит C^1 и, следовательно, само решение $x(t)$ также принадлежит C^1. Это доказывает существование решения исходной задачи (1) в пространстве C^1.

7. Проверим выполнение условия $b\|K\|<1$. С учетом $\|K\|_{C\to C}\leq T$ и равенства $b=\beta\alpha$ получим следующее условие: $\alpha\beta T<1$.

8. Наконец остается проверить условие $\dfrac{\|K\|(a+b\rho)}{1-b\|K\|}\leq\dfrac{1}{mc\left(\sqrt{mk+1}+\sqrt{mk}\right)^2}$, где $\rho=\dfrac{\sqrt{mk}}{mc\left(\sqrt{mk+1}+\sqrt{mk}\right)}$. Для этого подставим найденные выше константы в левую часть неравенства:

$$\frac{T\beta(a_1+\alpha\rho)}{1-\beta\alpha T}\leq\frac{1}{mc\left(\sqrt{mk+1}+\sqrt{mk}\right)^2}.$$

Таким образом, объединяя найденные ранее оценки, получим условия разрешимости краевой задачи (1).

Теорема 2. Пусть функция $f(t,x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и вместе со своей частной производной по x удовлетворяют условию Липшица по второму аргументу с константами k_2 и c_2 для всех $(t,x)\in\{(t,x) \mid t\in[0;T], -\infty < x < +\infty\}$, то есть

$$\left| f(t,x_1) - f(t,x_2)\right| \le k_2 |x_1 - x_2|,$$

$$\left| f_2'(t,x_1) - f_2'(t,x_2)\right| \le c_2 |x_1 - x_2|.$$

Пусть далее $f_2'(t,x)$ непрерывна в точке $x=0$, $T\left|\int_0^T h(s)\, f_2'(s,0)\,ds\right|^{-1} = m$, функция $g(t,v)$ непрерывна и существует такая функция $g_0(t,v) = l(t)v$, удовлетворяющая условиям:

- для каждого фиксированного $t\in[0;T]$ на искомом шаре с центром в точке $x=0$ пространства C^1 выполняется неравенство: $\left|g_0(t,v) - g(t,v)\right| \le k_1 |v|$;

- оператор $M : C^1 \to C^1$, определенный равенством: $(Mx)(t) = \int_0^t l^{-1}(s)\big(g_0(s,\dot{x}(s)) - g(s,\dot{x}(s))\big)ds$, является вполне непрерывным оператором.

Тогда если функция $h(t) = \dfrac{1}{l(t)} \in L_\infty[0;T]$ и выполнены условия:

1) $\int_0^T h(s)\, f(s,0)\,ds = 0$;

2) $\left| f(t,x)\right| \le a_1 + b_1 |x|$;

3) $\alpha\beta T < 1$

4) $\dfrac{\beta(a_1 + \alpha\rho)T}{1-\beta\alpha T} \le \dfrac{1}{mc\left(\sqrt{mk+1} + \sqrt{mk}\right)^2}$, где $\alpha = \max(b_1;k_1)$, $\beta = vrai\sup|h(t)|$,

$\gamma = max(k_1;k_2)$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$, $\rho = \dfrac{\sqrt{mk}}{mc\left(\sqrt{mk+1} + \sqrt{mk}\right)}$, $k = \beta\gamma,\ c = \beta c_2$,

то существует решение задачи (1) на шаре $\overline{S_R(0)} \subset C^1[0;T]$ с радиусом $R = \dfrac{\beta(a_1 + \alpha\rho)T}{1-\beta\alpha T}$.

Список литературы

1. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. Элементы теории топологически нетеровых операторов. – Челябинск : Изд-во ЧелГУ, 1994. – 93 с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / пер. с англ. - М., 1968. - 184 с.
3. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера // УМН. - 1977. - Т. 32, № 4. - С. 3-54.
4. Диблик Й. Существование и единственность решения начальной краевой задачи для дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных // Деп. в ВИНИТИ. – 1984. - № 908-84.
5. Дмитриенко В.Т. Двухточечная краевая задача для дифференциальных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. - Куйбышев, 1982. - С. 47-58.
6. Елисеенко М.Н. О периодических решениях обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, не разрешенных относительно производных // Дифференциальные уравнения. – 1985. - Т. 21, № 9. - С. 1618-1621.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М. : Наука, 1965. - 752 с.
8. Колпаков И.Ю. О разрешимости квазилинейных операторных уравнений // Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика. – Пермь, 2002. - С. 21-27.
9. Просенюк Л.Г. Существование и асимптотика О-решений дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Украинский математический журнал. - 1987. - Т. 39, № 6. - С. 796-799.
10. Щеглова А.А. Метод Ньютона для решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал. - 1998. - Т. 39, № 6. - С. 1428-1434.

Рецензенты:

Абдуллаев А.Р., д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики Пермского национального исследовательского политехнического университета, г. Пермь.

Аристов С.Н., д.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, г. Пермь.