УДК 519.684.6

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО ДЕЛЬТА-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЕЙ

Бутусов Д.Н., Каримов Т.И., Каримов А.И.

ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», Санкт-Петербург, Россия (197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д.5), e-mail: butusovdn@mail.ru

В статье рассматривается способ дискретизации непрерывных моделей динамических систем, известный как дельта-преобразование. Показывается, что в арифметике с фиксированной запятой дельта-преобразование обеспечивает большую точность, чем широко известное дискретное преобразование Лапласа (z-преобразование), однако имеет малое отношение сигнала к шуму квантования на низких частотах. В статье вводится модификация дельта преобразования, называемая дельта-кси-преобразованием, которое свободно от этого недостатка. Проводится сравнительный анализ стандартного и модифицированного дельта-преобразования на примере моделирования фильтра Бесселя. Анализ проводится в частотной и временной области. Полученные теоретические результаты подтверждаются авторами с помощью ряда компьютерных экспериментов в инструментальном пакете MATLAB с применением модуля FilterDesignToolbox.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, динамические системы, дискретное преобразование Лапласа, дельта-преобразование, арифметика с фиксированной запятой.

MODIFIED DELTA-TRANSFORM FOR SPECIAL COMPUTING DEVICES DESIGN

Butusov D.N., Karimov T.I., Karimov A.I.

Saint-Petersburg State Electrotechnical University, Saint-Petersburg, Russia. (197376, 5, Professora Popova st., Saint-Petersburg, Russia), e-mail: butusovdn@mail.ru

In this paper a continuous model of dynamic system discretization technique, known as delta-transform, is considered. Delta transform shows better accuracy than Laplace discrete transform (z-transform) in fixed-point arithmetic, but has poor signal to noise ratio when input signal frequency is low. A Delta-xi-transform, that does not have this negative feature, is introduced. New discretization method is compared with delta-transform in a series of computer experiments. Accuracy and frequency analysis is performed for the Bessel filter example model. Theoretical results are verified by various computer experiments, performed in MATLAB withFilter Design Toolbox.

Keywords: computer modeling, dynamic systems, discrete Laplace transform, delta-transform, fixed-point arithmetic.

Введение

При разработке устройств управления и обработки сигналов требуется соблюсти баланс между производительностью, энергопотреблением и габаритами системы. Особенно актуальным это становится при создании миниатюрных устройств, например, систем RFID, встраиваемых видео- и аудиосистем. Широкое применение в таких системах находят процессоры малой разрядности, использующие представление чисел с фиксированной точкой. В то же время рост частотного диапазона работы и быстродействия микропроцессоров предъявляет новые требования к математическому обеспечению, используемому для построения вычислительных моделей динамических систем.

Z-преобразование является стандартным и наиболее распространенным методом преобразования непрерывных моделей динамических систем в дискретные при реализации их средствами цифровой электроники. Однако у z-преобразования есть существенный недостаток: при стремлении периода дискретизации T к нулю корни и полюса системы в z-области стремятся к единице [1]. При ограниченной точности машинного представления чисел различные корни стремятся «слиться» друг с другом и с единицей, и динамическая характеристика исходной цифровой системы может существенно отличаться от динамической характеристики непрерывной системы. Этот эффект можно уменьшить, если использовать представление чисел с плавающей точкой, однако на аппаратном уровне его поддерживает довольно ограниченное число контроллеров.

В то же время дельта-преобразование специально предназначено для того, чтобы устранить вышеописанный недостаток. При уменьшении периода дискретизации динамическая характеристика дельта-системы стремится к характеристике непрерывной. Но и дельта-преобразованию присущ недостаток: дельта-интегратор имеет неустойчивый полюс $z=1$, что при определенных условиях приводит к падению точности модели. В данной статье рассматриваются условия возникновения неустойчивости и предлагается метод повышения точности дельта-преобразования.

Введение в дельта-преобразование

Разложим переменную $z=e^{sT}$ в ряд Тейлора и сгруппируем его:

$$z=1+sT+\frac{(sT)^2}{2}+\frac{(sT)^3}{6}+...=1+T\cdot\underbrace{\left(s+\frac{sT^2}{2}+\frac{s^2T^3}{6}+...\right)}_{\delta} \tag{1}$$

При малых T все члены ряда (1), начиная с sT, становятся много меньше единицы, и в числах с фиксированной запятой точность их представления оказывается неудовлетворительной. Основная идея Миддлтона и Гудвина [4] – использовать замену вида:

$$z=1+T\delta \tag{2}$$

Это равносильно внесению первого члена ряда (2.1) – единицы – в коэффициенты передаточной функции, чтобы они более равномерно заполняли разрядную сетку [4]. Здесь δ – новая операторная переменная, которая вводится вместо z. Формула (2) легко модифицируется:

$$z=1+\Delta\delta \tag{3}$$

где $\Delta=k\cdot T$ – параметр, обеспечивающий масштабирование коэффициентов дискретной модели от переменной δ.

Подстановка выражения (3) в преобразование Тастина дает:

$$s=\frac{2}{T}\frac{\Delta\delta}{\Delta\delta+2}, \tag{4}$$

что позволяет строить дельта-модели на основе имеющихся непрерывных моделей. На практике удобнее сначала получить z-преобразование системы по Тастину, и только потом преобразовывать ее с помощью дельта-преобразования. При этом требуется соответствующий пересчет коэффициентов модели (описанный, например, в [1]).

Получив коэффициенты передаточной функции, требуется преобразовать вычислительную модель к виду кода, исполняемого на целевом устройстве. Каноническая форма (англ. *directformII*) имеет наименьший уровень шума квантования при реализации дельта-модели в арифметике с фиксированной запятой [3], а потому наиболее предпочтительна. В случае обычной дискретной канонической формы, когда используется оператор задержки z^{-1}, верно соотношение:

$$d_k = d[n] \Rightarrow d_{k+1} = z^{-1} d_k = d[n-1].$$

Передаточная функция дельта-интегратора выводится из (3):

$$\delta^{-1} = \frac{\Delta z^{-1}}{1 - z^{-1}}. \qquad (5)$$

Для дельта-системы: $d_{k+1} = \delta^{-1} d_k$, откуда, используя (5):

$$d_{k+1} - z^{-1} d_{k+1} = \Delta z^{-1} d_k \Rightarrow d_{k+1}[n] = \Delta d_k[n-1] + d_{k+1}[n-1] \qquad (6)$$

Тогда выражение для вычисления отклика дельта-системы в прямой форме 2 для звена 2-го порядка аналитически может быть записано:

$$\begin{aligned} & d_1[n] = \Delta \cdot d_0[n-1] + d_1[n-1] \\ & d_2[n] = \Delta \cdot d_1[n-1] + d_2[n-1] \\ & d_0 = x[n] - a_1 d_1[n] - a_2 d_2[n], \\ & y[n] = b_0 d_0[n] + b_1 d_1[n] + b_2 d_2[n]. \end{aligned} \qquad (7)$$

Неустойчивость дельта-интегратора

Рассмотрим поведение переменных состояния $d_i, i = \overline{0..2}$ дискретной модели ЛДС 2-го порядка, полученной с помощью дельта-преобразования. Введем функцию передачи $W_2 = d_2 / d_0$. Непосредственно из (5) следует:

$$d_2 = \delta^{-1} d_1 = \delta^{-2} d_0 \Rightarrow W_2(z) = \delta^{-2} = \frac{\Delta^2}{(z-1)^2} = \frac{\Delta^2}{z^2 - 2z + 1} \qquad (8)$$

Дискретное звено второго порядка $W_2(z)$ содержит неустойчивый полюс $z = 1$ и является астатическим фильтром нижних частот. Это означает, что при низких частотах переменная состояния d_2 имеет величину много большую, чем d_0, а при высоких частотах стремится к нулю и имеет величину много меньшую, чем d_2. Переменная d_1 при этом занимает «промежуточное» положение.

Из структурной схемы канонической формы после подстановки выражения для δ^{-1} может быть определена передаточная функция $H_0(z) = d_0 / u$:

$$H_0(z) = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 + a_1 z + a_2}, \qquad (9)$$

где a_i – коэффициенты знаменателя исходной передаточной функции от переменной z. В свою очередь, (9) является фильтром верхних частот, при этом:

$$\lim_{\omega \to 0} |H_0(\omega)| = 0,\ \lim_{\omega \to \infty} |H_0(\omega)| = 1.$$

Частотные свойства переменной состояния d_2 определяются передаточной функцией $H_2(z) = d_2 / u$, которая является дискретным фильтром нижних частот:

$$H_2(z) = W_2(z) \cdot H_0(z) = \frac{\Delta^2}{z^2 + a_1 z + a_2}.$$

Таким образом, из свойств H_0 и H_2 следует, что переменные состояния дельта-модели являются ограниченными сверху. Однако они могут принимать очень малые значения, что в арифметике с фиксированной запятой приводит к повышению влияния шума квантования. Заметим, что использование транспонированной канонической формы не разрешает проблему неустойчивости дельта-интегратора.

Дельта-кси-преобразование

Введем следующую модификацию выражения (3):

$$z = 1 + \varepsilon + \Delta\delta,$$

где $\varepsilon \in (0;1)$ – некоторое малое число. Смысл введения ε – устранить корень $z = 1$. Введя обозначение $\xi = 1 + \varepsilon$, получим исходную формулу для дельта-кси-преобразования:

$$z = \xi + \Delta\delta_\xi.$$

Здесь индекс ξ при переменной δ_ξ введен для явного указания на то, что используется именно дельта-кси преобразование. Выражения для пересчета коэффициентов обычной дискретной модели в форме z-преобразования (полученной, например, с помощью преобразования Тастина) в коэффициенты дельта-кси-модели звена второго порядка приведены в таблице 1.

Таблица 1. Пересчет коэффициентов z-модели в коэффициенты дельта-кси-модели

β_0	$\beta_0 = b_0$	α_0	$\alpha_0 = 1$
β_1	$\beta_1 = \frac{2b_0 + \xi \cdot b_1}{\Delta}$	α_1	$\alpha_1 = \frac{2 + \xi \cdot a_1}{\Delta}$
β_2	$\beta_2 = \frac{b_0 + \xi \cdot b_1 + \xi^2 \cdot b_2}{\Delta^2}$	α_2	$\alpha_2 = \frac{1 + \xi \cdot a_1 + \xi^2 \cdot a_2}{\Delta^2}$

Оператор δ_ξ^{-1} будет записан как:

$$\delta_\xi^{-1} = \frac{\Delta z^{-1}}{\xi - z^{-1}}. \tag{10}$$

Формула (10) также является дискретным фильтром нижних частот, но теперь не астатическим. Легко показать, что

$$\lim_{\omega \to 0} \left| \delta_\xi^{-1}(\omega) \right| = \frac{\Delta}{\sqrt{\xi^2 - 2\xi + 1}}, \tag{11}$$

то есть в области низких частот усиление уже не бесконечно велико. Функция передачи $W_2 = d_2 / d_0$ для дельта-кси-преобразования определяется как

$$W_2(z) = \frac{\Delta^2}{\xi^2 z^2 - 2\xi \cdot z + 1}. \tag{12}$$

Выбор оптимального параметра ξ^* может быть осуществлен из следующего условия: если $\left| W_2(\omega) \right\|_{\omega \to 0} = 1$, то в области нижних частот, вплоть до частоты среза дискретного ФНЧ (11), все переменные состояния будут иметь одинаковые амплитуды, и их значения заполнят практически всю разрядную сетку. Таким образом, шум квантования будет существенно снижен. Из (12) найдем выражение для расчета ξ^* при условии, что в области нижних частот переменные состояния имеют одинаковую амплитуду:

$$\frac{\Delta^2}{\xi^{*2} - 2\xi^* + 1} = 1.$$

Оно имеет единственное решение при дополнительном ограничении $\xi^* > 1$:

$$\xi^* = 1 + \Delta. \tag{13}$$

Окончательно, субоптимальное $\tilde{\xi}$:

$$\tilde{\xi} = 1 + \tilde{\Delta} + \varepsilon,$$

где ε – малое число для варьирования $\tilde{\xi}$. Дело в том, что при реализации дельта-кси-преобразования в арифметике с фиксированной запятой требуется умножение на ξ^{-1}, что порождает дополнительный шум квантования. Действительно, выражения для вычисления отклика звена второго порядка в случае дельта-кси-преобразования:

$$\begin{aligned}
d_1[n] &= \xi^{-1}\left(\Delta \cdot d_0[n-1] + d_1[n-1]\right) \\
d_2[n] &= \xi^{-1}\left(\Delta \cdot d_1[n-1] + d_2[n-1]\right) \\
d_0 &= x[n] - a_1 d_1[n] - a_2 d_2[n], \\
y[n] &= b_0 d_0[n] + b_1 d_1[n] + b_2 d_2[n].
\end{aligned} \tag{14}$$

Первые две строки модели (14) содержат умножение на ξ^{-1}, которое может быть выполнено точно, только если ξ является степенью двойки. Однако в случае вычисления ξ по формуле (13) это невозможно. Поэтому необходимо экспериментальное исследование дельта-кси-модели с коррекцией значения ξ^*. Эксперименты показывают, что для достижения наилучших результатов коррекции должны подвергаться десятитысячные доли ξ^*.

Выбор соответствующей амплитуды переменной состояния d_0 обеспечивается масштабированием входного сигнала по максимальному значению амплитуды этой переменной состояния, определенной передаточной функцией:

$$H_0(z) = \frac{z^2 - \dfrac{2}{\xi}z + \dfrac{1}{\xi^2}}{z^2 + a_1 z + a_2}.$$

Возьмем фильтр Бесселя нижних частот с частотой среза 50 Гц, заданный выражением в качестве эталонной непрерывной ЛДС, и примем период дискретизации $T_s = 0{,}1$ мс. Для дельта-модели этого фильтра аплитудно-частотные характеристики функций передачи H_0 и W_2 представлены на рисунке 1.

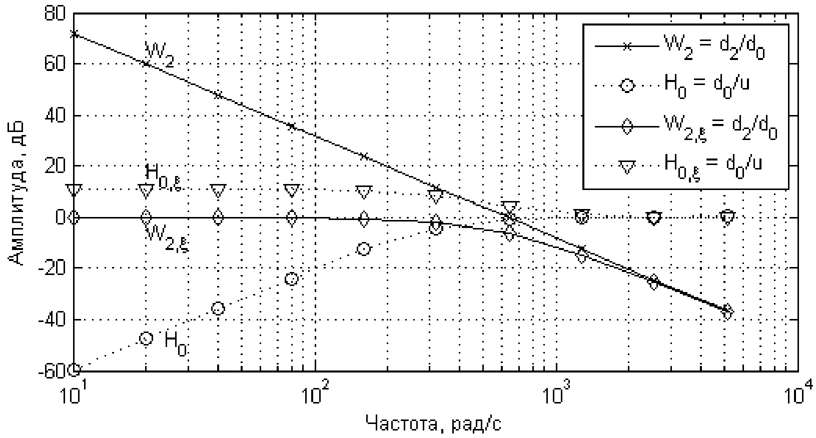

Рисунок 1. Амплитудно-частотные характеристики функций передачи H_0 и W_2

Графики нам демонстрируют полученное выше качественное описание поведения переменных состояния для конкретного примера. Сравнение отклика дельта-модели и дельта-кси-модели представлено на рисунке 2.

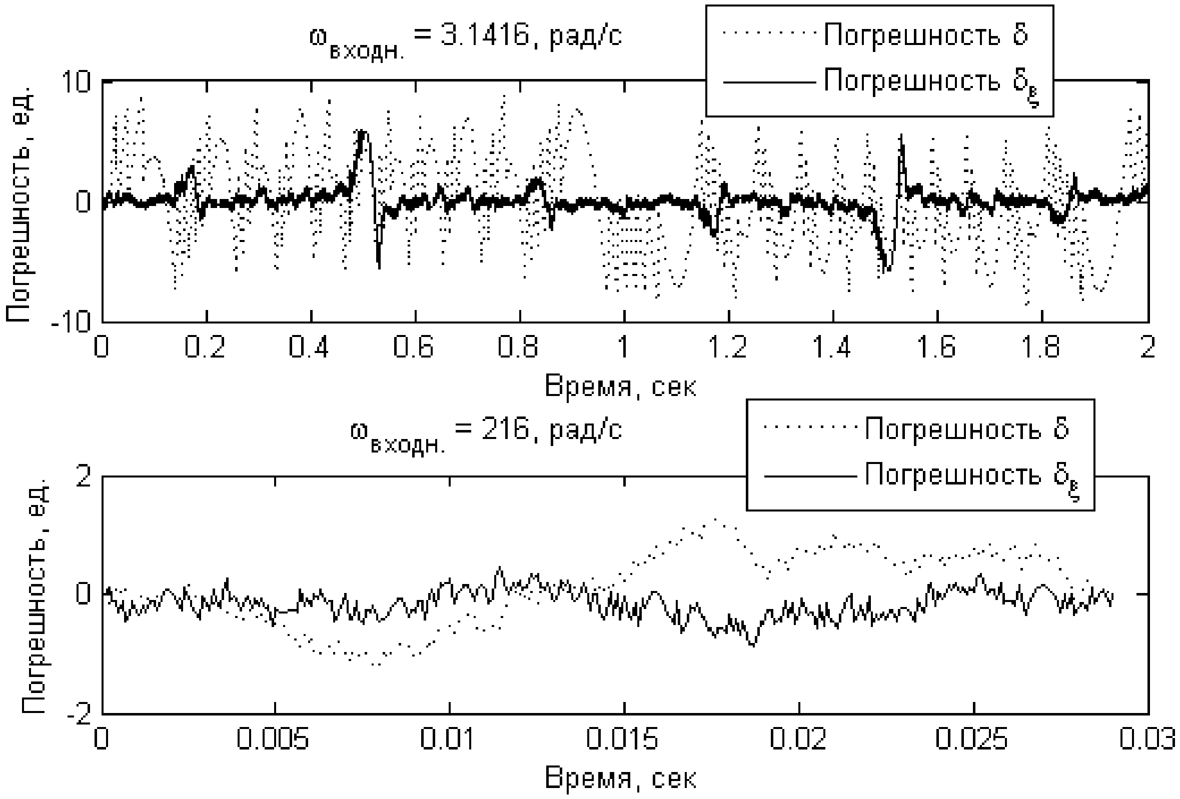

Рисунок 2. Сравнение отклика дельта-модели и дельта-кси-модели фильтра Бесселя

Сравнение показывает, что на малых частотах дельта-кси-преобразование обеспечивает существенно лучшую точность, чем дельта-преобразование, в то время как на больших частотах не хуже его и также может быть точнее. Так, в приведенном примере интеграл ошибки на частоте 3,14 рад/с дельта-модели в 26 раз больше, чем дельта-кси-модели, а СКО отклика – в 3,3 раза больше. На частоте 216 рад/с интегральные ошибки приблизительно равны, в то время как СКО отклика дельта-модели больше в 2,2 раза, чем дельта-кси-модели. При реализации на специальных вычислителях систем, которые должны иметь высокие точностные характеристики в области низких частот, такое улучшение существенно.

Заключение

В данной статье рассмотрено поведение переменных состояния дискретной модели звена второго порядка, полученной с помощью дельта-преобразования. Показано, что при реализации дельта-модели в канонической форме переменные состояния на разных частотах имеют различную амплитуду, что при реализации на специальных вычислителях при использовании арифметики с фиксированной точкой приводит к повышению шума квантования. Введено дельта-кси-преобразование, выравнивающее амплитуду переменных состояния в области нижних частот, что позволяет в этом частотном диапазоне уменьшить интеграл погрешности в десятки раз.

Работа выполнена в СПбГЭТУ при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках договора № 02.G25.31.0058 от 12.02.2013 г.

Список литературы

1. Андреев В.С., Бутусов Д.Н., Каримов Т.И., Липкин С.М., Сотнин М.И. Анализ эффективности применения дельта-преобразования при моделировании звеньев второго порядка [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – №1. – Режим доступа: www.science-education.ru/107-8128.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. 2-е изд., испр. – М.: Техносфера, 2009.
3. Kauraniemi J., Laakso T.I., Hartimo I., Ovaska S.J., Delta operator realization of direct-form IIR filters, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 45, pp. 41-51, Jan. 1998.
4. Middleton R.H., Goodwin G.C., Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 31, pp. 1015-1021, Nov. 1986.
5. Newman M.J., Holmes D.G., Delta operator digital filter for high performance inverter applications/ IEEE Transactions on Power Electronics, vol.18, no.1, part 2, 2003.

Рецензенты:

Авдеев Б.Я., д.т.н., профессор кафедры информационно-измерительных систем и технологий. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург.

Пузанков Д.В., д.т.н., профессор кафедры вычислительной техники. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург.