УДК 001.2

О ПЕРСПЕКТИВНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ И СРЕДСТВАХ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЭКОЛОГИИ

[1]Шведовская Т.Л., [1]Владимиров С.Н.

[1]*ФГБОУ ВПО «Московский государственный открытый университет им. В.С. Черномырдина», Москва, Россия (107996, г. Москва, ул. Павла Корчагина, 22),* e-mail: snvl@mail.ru

Методы математического моделирования состоят не только из построения компьютерного образа, но и из проведения с ним вычислительного эксперимента. В этом – основное преимущество перед мысленным экспериментом теоретического метода в проведении многих начальных и граничных условий стартов компьютерных вычислений. Особенно актуально математическое моделирование в экологии, когда невозможно представить различные экологические ситуации в режиме реального времени. В статье рассматриваются конкретные примеры различных ситуаций. Значительную роль в методологии и методике математического моделирования в экологии обрели созданные математические пакеты, так называемые модельные конструкторы - «Математика», Mathlab, Mapl и MathCad. Элементарная топология позволяет содержательное описание процесса или явления представить через набор взаимодействующих факторов, а затем двигаться в направлении построения дискретной системы рекуррентных уравнений, описывающих динамику процесса или изменений явления.

Ключевые слова: прикладные математические программы, математическое моделирование, экология, образование.

ABOUT THE DIRECTIONS AND MEANS OF TEACHING MATHEMATICAL MODELLING IN ECOLOGY

[1]Shvedovskaya T.L., [1]Vladimirov S.N.

[1]*Moscow state Open University named Chernomyrdin, Moscow, Russia (107996, Moscow, Pavel Korchagin Street, 22), e-mail: snvl@mail.ru*

Methods of mathematical modeling consists of not only construction of computer and from settlements with the computational experiment. This is the main advantage before the mind experiment theoretical method in conducting many initial and boundary conditions starts computing. Especially important mathematical modelling in ecology, when it is impossible to imagine different ecological situation in the real-time mode. The article considers specific examples of different situations. A significant role in methodology and methods of mathematical modeling in ecology has found the mathematical packages, so-called "model designers" – «Mathematics», «Mathlab», «Mapl» and «MathCad». Elementary topology allows a narrative description of the process or phenomenon to present through a set of interacting factors, and then move in the direction of creation of a discrete system of recurrence equations describing the dynamics of the process or change phenomena.

Keywords: applied mathematical programs, mathematical modeling, ecology, education.

Современный специалист, оканчивающий вуз, и взявший на вооружение третий метод познания – математическое моделирование, в определённом смысле может быть уподоблен лётчику-любителю, получающему пилотское свидетельство. Он научился взлетать и приземляться, выбирать курс и эшелон полёта и обучен ряду лётных премудростей, но из этого не следует, что он разбирается в теоретических вопросах аэродинамики и инженерных тонкостях самолётостроения, - он классический современный пользователь авиатехники. Наша цель: дать студенту-старшекурснику аналогичный пользовательский багаж приёмов и инструментов, необходимых при построении математических моделей и проведении с ними вычислительных экспериментов для получения важных исследовательских результатов в интересующей области, в данном случае – в экологии.

Описанная в работе [6] методология и методика математического моделирования в экологии обрела неукротимый потенциал роста после того, как было создано несколько математических пакетов, сразу завоевавших статус модельных конструкторов, - «Математика», Mathlab, Mapl и MathCad. Наиболее простым и доступным в освоении даже представителям гуманитарных профессий – социологам, экономистам, психологам и экологам - оказался последний из представленного списка. На рабочем поле этого конструктора записываются системы уравнений, начальные данные и коэффициенты модели практически так же, как мелом или маркером на доске, а затем ставится вычислительный эксперимент, и сразу можно получить динамические графики и фазовые диаграммы.

В этой же публикации [6] в качестве простейшего примера, иллюстрирующего применение названного математического аппарата к анализу экологической ситуации в промышленной зоне крупного города, приведён знаковый ориентированный граф, где в его вершинах записаны переменные модели:

X1 (З(1)) – число заводских предприятий в промышленной зоне города;

X2 (Н) – численность населения города;

X3 (Р(3)) – численность рабочих мест;

X4 (С(4)) – показатель состояния окружающей среды – процент её загрязнения. Переменные влияют друг на друга так, как это показано дугами орграфа (рис. 1).

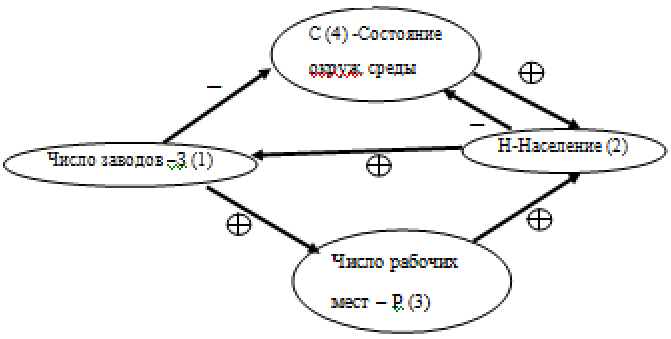

Рис. 1. Орграф связей между переменными макромодели города.

В модели, представленной на графе, прочитывается отрицательная обратная связь, стабилизирующая экологическую ситуацию: рост числа заводских предприятий - З(X1) негативно (знак минус на дуге) влияет на состояние окружающей среды – С(X4); пропорционально её ухудшению идёт уменьшение численности населения города – Н(X2); уменьшение численности населения Н(X2) ведёт к банкротству и закрытию части заводов - З(X1), т.е. и к уменьшению Р(X3); поскольку дуга З(X1) - С(X4) несёт на себе отрицательный знак, то выше описанное в контуре уменьшение численности заводов приводит к улучшению экологической ситуации, а далее цикл повторяется. Примеры подобного применения знаковых ориентированных графов, более сложные по характеру и решающие прикладные эколого-экономические проблемы, содержатся в списке литературы [1-5].

Опыт обучения студентов по дисциплинам «Социальное прогнозирование и проектирование», «Математическое моделирование социальных процессов», «Математические модели в гуманитарных науках» показал, что наиболее целесообразно начинать эти дисциплины с именно с когнитивного моделирования на ориентированных графах [1; 4]. Именно элементарная топология позволяет содержательное описание процесса или явления представить через набор взаимодействующих факторов, а затем двигаться в направлении построения дискретной системы рекуррентных уравнений, описывающих динамику процесса или изменений явления. При наличии подходящих условий и соответствующих эмпирических референтов эта система может преобразоваться или в конечно-разностные уравнения - КРУ, или в систему обыкновенных дифференциальных уравнений – ОДУ.

Условием перехода СРС в конечно-разностные уравнения (КРУ) являются требования (на примере 2-слойной схемы; в целом рассматриваются модели процессов с числом слоев ≤ 3):

$$\mathbf{X_{n+1} = X_n + \tau * F(t_n, X_n)}, \text{ где } \mathbf{t_n = n*\tau}, \text{ где } \boldsymbol{\tau} \text{ - шаг квантования времени}$$

Условием перехода КРУ в ОДУ – обыкновенные дифференциальные уравнения - является существование конечного предела:

$$\mathbf{\lim (X_{n+1} - X_n)/(t_{n+1} - t_n) < \infty \ \text{при} \ (t_{n+1} - t_n) = \tau \to 0}$$

Для системы ОДУ на конечном интервале времени всегда может быть поставлена и решена задача Коши – ЗК или краевая задача - КЗ, т.е. по начальным и граничным условиям рассчитываются значения *X(t)*. Однако в случае плохой обусловленности матрицы оператора системы ОДУ или КРУ, что зачастую вполне вероятно из-за совмещения в одном процессе быстрых и медленных переменных, эффективный прогноз возможен только на весьма ограниченном отрезке времени [8]. Принято считать, что число обусловленности (conde) должно быть не более 400-500. Смысл этого числа в оценке скорости роста ошибки прогноза значений переменных модели.

С этой постановкой вопроса корреспондирует проблема устойчивости моделируемого социального процесса или проблема устойчивости процесса воспроизводства возникшей в новом ноосферном порядке некоторой типичной целостности, например биоценоза. «Кратко, устойчивость – У. движения системы может пониматься как свойство «а) движущейся системы… мало отклоняться от некоторого движения при малых возмущениях начального положения системы (*в фазовом пространстве*), причём малость отклонения равномерна по t≥0 (У. по Ляпунову, Орбитальная устойчивость)»; б) «системы сохранять некоторые черты фазового портрета при малых возмущениях закона движения» (Структурная устойчивость, грубая система); в) «системы в процессе движения оставаться в ограниченной области фазового пространства» (У. по Лагранжу); г) «системы в процессе движения сколь угодно поздно возвращаться как угодно близко к своему начальному положению (в фазовом пространстве)» (У. по Пуассону), - ясно, что это не все виды У» [8]. Однако MathCad позволяет пользователю достаточно легко определиться с решением проблемы устойчивости описываемого явления или конструируемого механизма некоторого процесса. Но начнём по порядку с описания самой модели.

Э к о л о г и я г о р о д а 2014

$k11 := 1.8 \quad k22 := 1.7 \quad k33 := 1.75 \quad k44 := 1.95 \quad k13 := 100$

$k21 := 0.00000 \quad k24 := 0.000000 \quad k32 := 1 \quad k42 := 1 \quad k14 := 0.01$

$$\begin{pmatrix} x1_0 \\ x2_0 \\ x3_0 \\ x4_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \cdot 10^5 \\ 10^5 \\ 30 \end{pmatrix}$$

ч и с л о з а в о д о в

ч и с л е н н о с т ь н а с е л е н и я

ч и с л о р а б о ч и х м е с т

с т е п е н ь з а г р я з н е н и я

$n := 0..8$

$$\begin{pmatrix} x1_{n+1} \\ x2_{n+1} \\ x3_{n+1} \\ x4_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} (k11-1) \cdot x1_n + k21 \cdot x2_n \\ (k22-1) \cdot x2_n + k32 \cdot x3_n + k42 \cdot x4_n \\ (k33-1) \cdot x3_n + k13 \cdot x1_n \\ (k44-1) \cdot x4_n - k14 \cdot x1_n - k24 \cdot x2_n \end{bmatrix}$$

Система конечно-разностных уравнений откалибрована так, что описывает достаточно узнаваемый в динамических графиках сценарий развития современного среднерусского города, попавшего в посткризисную ситуацию после 2008-09 гг. (рис. 2-5).

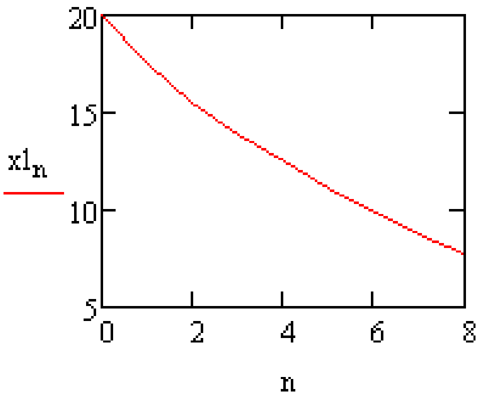

Рис. 2. Динамика численности заводов.

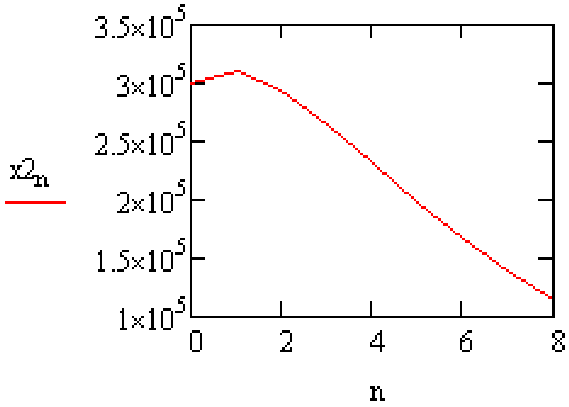

Рис. 3. Динамика численности населения.

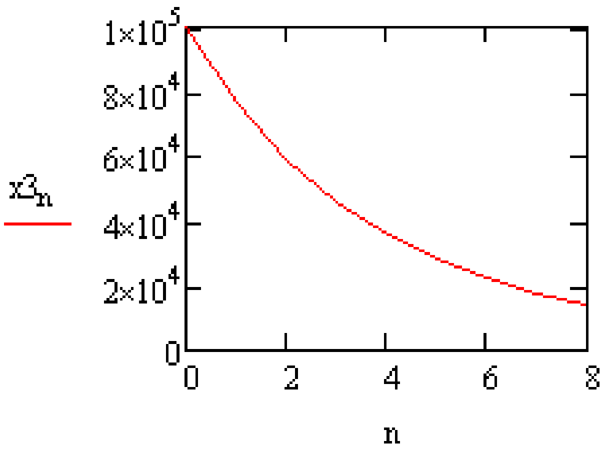

Рис. 4. Динамика численности рабочих мест.

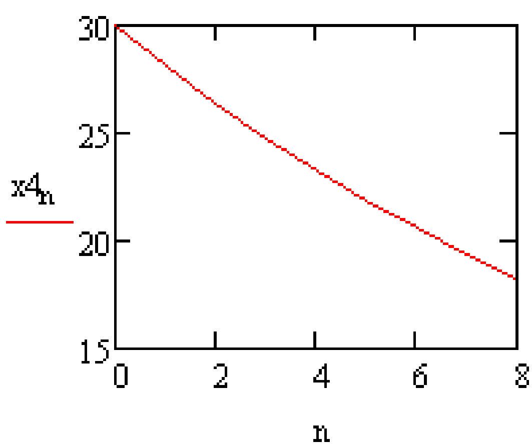

Рис. 5. Динамика степени загрязнения (%).

Чтобы выяснить, обладает ли построенная и откалиброванная система КРУ каким-либо видом устойчивости, для написанной системы конечно-разностных уравнений модели сначала строится квадратная 4х4 матрица *M* оператора системы уравнений. Как её строить, легко уразуметь, разглядывая систему КРУ. Построив матрицу *M*, опускаем курсор ниже матрицы и к её правому углу. Далее с помощью функции *f(x)*, кнопка для которой расположена во второй сверху строке, нажав её, открываем окно с меню, в котором находим слова «векторы и матрицы». Подведя курсор к строке с этими словами и нажав на ввод, открываем окно с дополнительным меню, в котором находим слово eigenvals и также, используя курсор и клавишу «ввод», выводим eigenvals (). Поставив в ячейку, которая обнаруживается в скобках символ *M*, сдвигаем синий уголок так, чтобы он оказался на строке eigenvals (*M*) справа самым крайним. После этого, вызвав нажатием на кнопку с изображением калькулятора, находим на калькуляторе в правом нижнем углу знак = и нажимаем «ввод». Тотчас под матрицей справа от eigenvals (M) = появится столбец с набором «собственных значений» матрицы M (рис. 6).

$$M := \begin{pmatrix} k11-1 & k21 & 0 & 0 \\ 0 & k22-1 & k32 & k42 \\ k13 & 0 & k33-1 & 0 \\ -k14 & -k24 & 0 & k44-1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{eigenvals}(M) = \begin{pmatrix} 0.705 + 0.06i \\ 0.705 - 0.06i \\ 0.84 \\ 0.95 \end{pmatrix}$$

Рис. 6. Матрица M оператора системы КРУ и вектор её собственных значений.

Если все действительные части компонент этого вектора отрицательны, то система обладает устойчивостью по Ляпунову. Если хотя бы в одном случае будут положительные величины, то таковой устойчивости нет. Если модули всех компонент собственных значений меньше 1, как в нашем случае, то система уравнений модели обладает устойчивостью по Лагранжу. Кстати, в нашем случае число обусловленности неважное, и оно равно $2.904\ 10^4$.

Довольно долго, главным образом под влиянием авторитета французского математика – создателя теории катастроф Рене Тома и исходя из того, что процессы в естественных науках породили представления об устойчивых стационарных моделях как основе описания явлений мира, господствовала точка зрения, что в реальности значение имеют только устойчивые процессы, т.е. существующее устойчиво.

Однако исследования сложных систем в науках о живой материи (биологии, физиологии, психологии и т.д.) и неравновесных процессов в физике, физической химии обосновали другой заглавный постулат: ***предсказуемость существующего, что допускает ценность и неустойчивых процессов.***

Тем не менее, если модельер берётся конструировать какой-то механизм, то в этом случае, безусловно, необходимо представить устойчивую реализацию, хотя бы частичную.

Список литературы

1. Медоуз Д., Форрестер Д. Пределы роста : доклад (Вашингтон, Смитсоновский институт, 12 марта 1972 г.).

2. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов : учебное пособие для высших учебных заведений. - Изд. 2-е перераб. и доп. - М. : Логос, 2001.

3. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. - М. : Наука, 1986.
4. Шведовская Т.Л., Шведовский В.А. Математическое моделирование в экологии. - Методические указания. - М. : Изд.- во МГОУ, 2009.
5. Шведовская Т.Л., Шведовский В.А. Математическое моделирование динамики экологических ситуаций : методические указания к изучению курса и решению задач. - М. : Изд-во МГОУ, 2010.
6. Шведовская Т.Л., Владимиров С.Н. О методологии и методике преподавания математического моделирования в экологии // Современные проблемы науки и образования. – 2014. - № 3.
7. Шведовский В.А. Математические методы моделирования социальных процессов : учебно-методический комплекс. - М. : Международная академия бизнеса и управления, 2008.
8. Шведовский В.А. Социолого-математические модели в исследовании социальных процессов : дис. … докт. соц. наук. - М. : РГСУ, 2010.

Рецензенты:

Шведовский В.А., д.соц.н., социологический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, г.Москва.

Невская Г. Ф., д.м.н., профессор, зав. кафедрой «Безопасность и экология», МГОУ, г.Москва.