УДК 681.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДА КОНТРОЛЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ В СИСТЕМЕ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

Горденко Д.В.[1], Резеньков Д.Н.[2]

[1]ФБГОУ ВПО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь, Россия (355000, г.Ставрополь, пер. Зоотехнический, 12), e-mail: stgau.ru
[2]ФБГОУ ВПО «Филиал Российского государственного социального университета в г. Ставрополе», г.Ставрополь, Россия (355000, г. Ставрополь, ул. Октябрьская, 66), e-mail: mgsu_s@mail.ru

Модулярные коды системы остаточных классов обладают потенциальными возможностями по построению кодов, способных обнаруживать и исправлять ошибки в процессе выполнения операций независимо от природы возникновения арифметических ошибок. В случае обнаружения ошибки производится коррекция ошибочной комбинации. В статье представлен сравнительный анализ чисел, представленных в системе остаточных классов и *AN*-коде. Анализ показал, что естественная избыточность AN-кода намного выше, чем избыточность чисел, представленных в системе остаточных классов. Определены достоинства *AN*-кода. На основании проведенного анализа можно сделать вывод о том, что применение AN-кодов для контроля арифметических операций в системе остаточных классов имеет следующие достоинства: простота реализации; быстродействие; небольшой объем вычислений и уменьшение аппаратурных затрат.

Ключевые слова: система остаточных классов, коррекция ошибок, ортогональные базисы, *AN*-код.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE CONTROL METHOD OF ARITHMETIC OPERATIONS IN THE RESIDUE NUMBER SYSTEM

Gordenko D.V.[1], Rezenkov D.N.[1]

[1]Stavropol state agrarian university, Stavropol, Russia (355000, Stavropol, Zootekhnichesky Lane, 12), e-mail: stgau.ru
[2]Branch of the Russian state social university in Stavropol, Stavropol, Russia (355000, Stavropol, Oktyabrskaya St., 66), mgsuk_s@mail.ru

Modular codes of residue number system possess potential opportunities to create the codes, capable to find and correct errors in the course of operation performance, irrespective of the nature of emergence of arithmetic errors. In case of error detection the correction of a wrong combination is made. The comparative analysis of the numbers represented in the residue number system and AN code is given in the article. The analysis showed that natural redundancy of an AN code is much higher, than redundancy of the numbers represented in the residue number system. AN code advantages are determined. On the basis of the carried-out analysis it is possible to make a conclusion that application of AN codes to control the arithmetic operations in the residue number system has the following advantages: simplicity of realization; speed; not large volume of calculations and reduction of hardware expenses.

Keywords: residue number system, correction of mistakes, orthogonal bases, AN-code.

Модулярные коды системы остаточных классов обладают потенциальными возможностями по построению кодов, имеющих возможность обнаруживать и исправлять ошибки в процессе функционирования независимо от причины возникновения арифметических ошибок [2].

В случае обнаружения ошибки производится коррекция ошибочной комбинации.

Принцип использования *AN*-кодов для коррекции ошибок в системе остаточных классов заключается в следующем. Каждый остаток по модулю p_i представляется двоичным позиционным кодом N, который умножается на константу A. Далее производится выполнение арифметической операции над числами вида *AN* и последующее декодирование, включающее обнаружение и исправление ошибки.

Проведем сравнительный анализ чисел, представленных в СОК и *AN*-коде. Каждому остатку в СОК ставится однозначное соответствие, кодовая комбинация, содержащая n единичных элементов, где

$$n = \left]\log_2 p_i\right[. \qquad (1)$$

В этом случае общее число всех возможных кодовых комбинаций равно $N = 2^n$.

Выберем основания системы остаточных классов $p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=7$, $p_4=11$. Разрядность остатков по заданным основаниям системы согласно (1) будет равна:

$$n_1 = \left]\log_2 3\right[= 2,\ n_2 = \left]\log_2 5\right[= 3,\ n_3 = \left]\log_2 7\right[= 3,\ n_4 = \left]\log_2 11\right[= 4.$$

Число всех возможных кодовых комбинаций равно:

$$N_1 = 2^{n_1} = 4,\ N_2 = 2^{n_2} = 8,\ N_3 = 2^{n_3} = 8,\ N_4 = 2^{n_4} = 16.$$

Количество используемых кодовых комбинаций в одном основании СОК равно p_i.

Введем в рассмотрение коэффициент использования кода, под которым условимся понимать отношение количества используемых кодовых комбинаций к количеству возможных

$$\delta_i = \frac{p_i}{2^n} \cdot 100\%. \qquad (2)$$

Коэффициент использования кода по заданным основаниям СОК равен:

$$\delta_1 = \frac{p_1}{2^{n_1}} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 100\% = 75\%,\ \delta_2 = \frac{p_2}{2^{n_2}} \cdot 100\% = \frac{5}{8} \cdot 100\% = 62{,}5\%,$$

$$\delta_3 = \frac{p_3}{2^{n_3}} \cdot 100\% = \frac{7}{8} \cdot 100\% = 87{,}5\%,\ \delta_4 = \frac{p_4}{2^{n_4}} \cdot 100\% = \frac{11}{16} \cdot 100\% = 68{,}75\%.$$

Величину, равную

$$\omega_i = 100\% - \delta_i, \qquad (3)$$

будем называть коэффициентом избыточности кода.

$$\omega_1 = 100\% - \delta_1 = 25\%,\ \omega_2 = 100\% - \delta_2 = 37{,}5\%,$$

$$\omega_3 = 100\% - \delta_3 = 12{,}5\%,\ \omega_4 = 100\% - \delta_4 = 31{,}25\%.$$

При переводе чисел, представленных остатками СОК, в *AN*-код разрядность остатков будет равна

$$n' = \left]\left]\log_2 p_i\right[\cdot \delta_i \cdot \left]\log_2 A\right[\cdot \delta_A\right[, \qquad (4)$$

где p_i – основания системы остаточных классов; A – константа; δ_i, δ_A – коэффициенты использования кодов, представленные СОК и AN-кодом соответственно.

Выберем значение A=11, тогда

$$\delta_A = \frac{A}{2^{]\log_2 A[}} = \frac{11}{16} = 0{,}6875,$$

$$n'_1 =]]\log_2 p_1[\cdot \delta_1 \cdot]\log_2 A[\cdot \delta_A[=]2 \cdot 0{,}75 \cdot 4 \cdot 0{,}6875[= 5,$$

$$n'_2 =]]\log_2 p_2[\cdot \delta_2 \cdot]\log_2 A[\cdot \delta_A[=]3 \cdot 0{,}625 \cdot 4 \cdot 0{,}6875[= 6,$$

$$n'_3 =]]\log_2 p_3[\cdot \delta_3 \cdot]\log_2 A[\cdot \delta_A[=]3 \cdot 0{,}875 \cdot 4 \cdot 0{,}6875[= 7,$$

$$n'_4 =]]\log_2 p_4[\cdot \delta_4 \cdot]\log_2 A[\cdot \delta_A[=]4 \cdot 0{,}6875 \cdot 4 \cdot 0{,}6875[= 7.$$

Коэффициент использования AN-кода равен:

$$\delta_{A1} = \frac{p_1}{2^{n'_1}} \cdot 100\% = \frac{3}{2^5} \cdot 100\% = 9{,}375\%, \ \delta_{A2} = \frac{p_2}{2^{n'_2}} \cdot 100\% = \frac{5}{2^6} \cdot 100\% = 7{,}8125\%,$$

$$\delta_{A3} = \frac{p_3}{2^{n'_3}} \cdot 100\% = \frac{7}{2^7} \cdot 100\% = 5{,}46875\%, \ \delta_4 = \frac{p_4}{2^{n'_4}} \cdot 100\% = \frac{11}{2^7} \cdot 100\% = 8{,}59375\%.$$

Естественная избыточность кода равна

$$\omega'_1 = 100\% - \delta_{A1} = 90{,}625\%, \ \omega'_2 = 100\% - \delta_{A2} = 92{,}1875\%,$$

$$\omega'_3 = 100\% - \delta_{A3} = 94{,}53125\%, \ \omega'_4 = 100\% - \delta_{A4} = 91{,}40625\%.$$

Сравнительный анализ показал, что естественная избыточность AN-кода намного выше, чем в СОК. Таким образом, корректирующие способности AN-кода в арифметических операциях лучше, чем в СОК, за счет введения искусственной избыточности.

Сложность устройства может быть оценена в элементах памяти как

$$S = \mu \cdot \sum n, \quad (5)$$

где μ – коэффициент, учитывающий наличие, кроме памяти, дополнительных элементов. Проведем сравнительную оценку согласно выражению (5).

Для обнаружения и исправления однократной ошибки в СОК необходимо ввести не менее двух контрольных оснований, p_5=13, p_6=19. Сложность устройства согласно (5) будет равна [1]:

$$S_{COK} = \mu \cdot \sum n = \mu \cdot 21,$$

$$S_{AN} = \mu \cdot \sum n' = \mu \cdot 25.$$

Сложность устройства в AN-коде будет больше, чем устройства в СОК, если не брать во внимание коэффициент μ.

Для оценки объема вычислений при контроле арифметических операций проведем сравнительную оценку.

Известно, что коэффициенты системы счисления со смешанным основанием (обобщенная полиадическая система (ОПС)) могут быть использованы для обнаружения, локализации и исправления ошибки в системе остаточных классов. Целое число $A\in[0, P\text{-}1]$, где $P=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_n$ –диапазон представимых чисел, может быть представлено в виде

$$A=a_1+a_2p_1+a_3p_1p_2+...+a_np_1p_2...p_{n-1}, \tag{6}$$

где a_i – коэффициенты ОПС; p_i – основания системы счисления, для i=1, 2, …, n. Если принять p_1, p_2, p_3,…, p_n одновременно основаниями СОК и ОПС, тогда диапазоны представления чисел совпадают. Число A представляется в системе остаточных классов в виде набора наименьших неотрицательных вычетов (α_1, α_2, …, α_n), вычисленных по модулю каждого из оснований p_i , и определяются выражением

$$\alpha_i\equiv A(\mathrm{mod}\; p_i). \tag{7}$$

Число A=(α_1, α_2, …, α_n) можно восстановить в позиционной системе счисления с помощью выражения

$$A=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iB_i(\mathrm{mod}\,P), \tag{8}$$

где B_i - ортогональные базисы СОК, i=1,2,…, n; P - диапазон представимых чисел в СОК.

Представления числа СОК в ОПС имеет вид

$$A=[a_1,a_2,a_3,...,a_n], \tag{9}$$

где a_i – коэффициенты ОПС.

Преобразование данных, представленных в СОК, в представлении ОПС осуществляется следующим образом.

Вычисляются ортогональные базисы B_i системы в зависимости от выбранных оснований СОК [3]

$$B_i=m_i\frac{P}{p_i}, \tag{10}$$

$$m_i\frac{P}{p_i}\equiv 1(\mathrm{mod}\; p_i), \tag{11}$$

где m_i – веса ортогональных базисов; i=0, 1,…, n.

Представим ортогональные базисы B_i в ОПС, тогда

$$B_i=b_{i1}+b_{i2}p_1+b_{i3}p_1p_2+...+b_{in}p_1p_2...p_{n-1}, \tag{12}$$

где b_i – коэффициенты ОПС, нахождение которых может быть осуществлено выражением

$$\left[\frac{B_i}{p_1}\right]=B_{i1},\, B_i-B_{i1}p_1=b_{i1},$$

$$\left[\frac{B_{i1}}{p_2}\right]=B_{i2},\, B_i-B_{i2}p_2=b_{i2},$$

$$\left[\frac{B_{i2}}{p_3}\right]=B_{i3},\, B_i-B_{i3}p_3=b_{i3}, \tag{13}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$\left[\frac{B_{i(n-1)}}{p_n}\right]=B_{in},\, B_{i(n-1)}-B_{in}p_n=b_{in}.$$

Представления ортогональных базисов в ОПС имеет вид

$$B_i^{ОПС}=[b_{i1},b_{i2},b_{i3},...,b_{in}]. \tag{14}$$

Для последовательного получения коэффициентов ОПС необходимо выполнить следующие операции [5].

<u>1-й этап</u>

Производится произведение ортогональных базисов, представленных в обобщенной полиадической системе $B_i^{ОПС}=[b_{i1},b_{i2},b_{i3},...,b_{in}]$ на остатки α_i по модулю с учетом переноса при i=1,…, n. Перенос по основаниям p_1 и p_n не происходит.

$$K_1=[\left|\alpha_1 b_{11}\right|_{p_1},\left|\alpha_1 b_{12}\right|_{p_2},\left|\alpha_1 b_{13}\right|_{p_3},...,\left|\alpha_1 b_{1n}\right|_{p_n}],$$

$$K_2=[0,\left|\alpha_2 b_{22}\right|_{p_2},\left|\alpha_2 b_{23}\right|_{p_3},...,\left|\alpha_2 b_{2n}\right|_{p_n}], \tag{15}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$K_n=[0,0,0,...,\left|\alpha_i b_{in}\right|_{p_n}].$$

Представим соотношение (15) в виде матрицы для более простого восприятия [3],[4]

$$K_i=\begin{bmatrix} \left|\alpha_1 b_{11}\right|_{p_1} & \left|\alpha_1 b_{12}\right|_{p2} & \left|\alpha_1 b_{13}\right|_{p_3} & ... & \left|\alpha_1 b_{1n}\right|_{p_n} \\ 0 & \left|\alpha_2 b_{22}\right|_{p_2} & \left|\alpha_2 b_{23}\right|_{p_3} & ... & \left|\alpha_2 b_{2n}\right|_{p_n} \\ 0 & 0 & \left|\alpha_3 b_{33}\right|_{p_3} & ... & \left|\alpha_3 b_{3n}\right|_{p_n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \left|\alpha_i b_{in}\right|_{p_n} \end{bmatrix}$$

где α_i – остатки по заданным основаниям СОК; i=1,…, n.

<u>2-й этап</u>

Получение коэффициентов ОПС a_i осуществляется суммированием по модулю p_i всех произведений k_{ij} (16) с учетом переноса при i=1,…, n. Перенос по основаниям p_1 и p_n не происходит.

$$a_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} k_{ij} (\mathrm{mod}\, p_i)\,. \tag{16}$$

Таким образом, перевод чисел из системы остаточных классов в обобщенную полиадическую систему для обнаружения ошибки мы производим в два этапа. Общее количество переносов N, будет определяться соотношением

$$N = 2(n-2)\,, \tag{17}$$

где n – количество оснований системы остаточных классов.

Исходя из вышеизложенного количество операций Q для обнаружения ошибки в системе остаточных классов при условии, что базисы СОК вычислены и переведены в ОПС, найдем по формуле

$$Q = G + L + N\,, \tag{18}$$

где G, L - количество операций на первом и втором этапах при переводе чисел, представленных в СОК в ОПС; N - общее количество переносов.

Подставляя (18) и приняв G=1, L=1, получим

$$Q = 2 + 2(n-2) = 2 + 2n - 4 = 2(n-1)\,. \tag{19}$$

Из соотношения (19) следует, что количество выполняемых операций для обнаружения ошибки будет зависеть от количества оснований системы остаточных классов.

Для определения места ошибки используется метод проекций. Проекция p_i обозначается как $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{n+r})$, т.е. A представлено в сокращенной избыточной СОК при исключении i-й остаточной цифры. Следовательно, если окажется такая ситуация, что для любого произвольного числа A одна из проекций числа A_i будет правильной для любого i=1,…, $n+r$, тогда все другие проекции X_j при $j \neq i$ являются неправильными и остаточная цифра α_i определяется как ошибочная. В этом состоит суть метода локализации ошибки.

Локализация ошибки может быть решена путем вычисления цифр ОПС для $n+r$ проекций и определения, которые из избыточных цифр ОПС нулевые.

Пусть $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ представлено в СОК по соответствующим основаниям p_1 , p_2,…, p_n, p_{n+1}, тогда при определении ошибки по основанию p_{n+1} потребуется p_n проекций. Следовательно, количество операций для локализации ошибки определится выражением

$$H = Q(n-1), \quad (20)$$

где Q - количество операций для вычисления коэффициентов ОПС.

Подставляя (19) в выражение (20), получим

$$H = Q(n-1) = 2(n-1)(n-1) = 2n^2 - 4n + 2 . \quad (21)$$

Таким образом, общее количество операций, необходимых для локализации ошибки в СОК, определится выражением

$$D = Q + H = 2(n-1) + 2n^2 - 4n + 2 = 2n^2 - 2n = nQ . \quad (22)$$

Исходя из проведенного анализа, сделаем вывод, что применение AN-кодов для контроля арифметических операций в системе остаточных классов имеет следующие достоинства: простота реализации; быстродействие; небольшой объем вычислений и уменьшение аппаратурных затрат.

Список литературы

1. Горденко Д.В., Резеньков Д.Н., Яйлаханов С.В. Высоконадежные комплексы и средства связи на нейросетевых элементах. – М., 2010.

2. Калмыков И.А., Резеньков Д.Н. Локализации ошибок в модулярных кодах полиномиальной системы классов вычетов с минимальной избыточностью // Фундаментальные исследования. - 2008. - № 3. - С. 23.

3. Калмыков И.А., Резеньков Д.Н., Горденко Д.В., Саркисов А.Б. Методы и алгоритмы реконфигурации непозиционных вычислительных структур для обеспечения отказоустойчивости спецпроцессоров : монография. – Ставрополь : Издательско-информационный центр «Фабула», 2014. – 180 с.

4. Минкина Т.В. Анализ математической модели кольцевой роторной печи // Вестник Донского государственного технического университета. - 2010. - Т. 10. - № 1. - С. 36-41.

5. Минкина Т.В., Павлюк Д.Н. Математическое моделирование распределенного высокоточного регулятора для системы управления температурным полем кольцевой роторной печи // Вестник СевКавГТИ. - 2012. - № 12. - С. 42-47.

Рецензенты:

Калмыков И.А., д.т.н., профессор, профессор кафедры информационной безопасности автоматизированных систем Института информационных технологий и телекоммуникаций ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет», г. Ставрополь.

Копытов В.В., д.т.н., профессор, директор ООО «ИС-Софт», г. Ставрополь.