УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ВИДЕ ТРЕУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНКИ

Мусаев В.К., Ситник С.В., Тарасенко А.А., Ситник В.Г., Зюбина М.В.

Группа компаний АВМ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

В работе приводится информация о моделировании нестационарных волн напряжений в деформируемых твердых телах с помощью численного метода в перемещениях. Приводится нормальное напряжение при интерференции треугольного импульса в характерной точке исследуемой области пластинки. Задачи решаются с помощью численного моделирования двумерных плоских уравнений волновой теории упругости. В настоящее время активно применяются численные методы для решения различных задач нестационарной механики деформируемого твердого тела. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на конструкции и сооружения.

Ключевые слова: численное моделирование, волны, импульсное воздействие, интерференция, объект, перемещение, напряжение, теория упругости, конечные элементы, алгоритм, комплекс программ, пластинка

MATHEMATICAL MODELING OF INTERFERENCE NONSTATIONARY ELASTIC WAVES STRESSES IN THE FORM OF A TRIANGULAR PULSE FROM THE FREE SURFACE OF A PLATE

Musayev V.K., Sitnik S.V., Tarasenko A.A., Sitnik V.G., Zyubina M.V.

The group of companies AVM, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

The paper contains information on the modelling of non-stationary waves stresses in deformable solids using a numerical method for movement. Is the normal voltage interference triangular pulse characteristic point of the investigated areas of the plate. The tasks solved with the help of numerical simulation of two-dimensional planar wave equations of elasticity theory. Currently actively applied numerical methods for solving different problems of nonstationary mechanics of deformable solids. On the basis of a method of final elements in the movements of the algorithm and the program complex for solving linear flat two-dimensional problems, which allow solving difficult tasks in the non-stationary dynamic impact on design and construction.

Keywords: numerical simulation of waves, pulse influence, interference, object, movement, tension, elasticity theory, finite elements, algorithm, a set of programs, record

При динамическом и импульсном воздействии в сооружении распространяются волны напряжений. Волны напряжений образуют области возмущений. Материал находится в напряженно-деформированном состоянии. В зависимости от скорости воздействия области возмущений могут быть локальными или занимать все тело. Локальное возмущение имеет место при сильном динамическом (импульсном) воздействии. Возмущение, занимающее все тело, происходит при слабом динамическом (статическом) воздействии. При импульсном (волновом) воздействии существуют локализованные напряжения и деформации, способствующие возникновению разрушения в одной части тела независимо оттого, что происходит в другой его части. При интерференции волн напряжений их интенсивности складываются. Они могут достигать значений, превосходящих предел прочности материала. В этом случае наступает разрушение материала. Напряженное состояние импульсного (волнового) нагруженного тела может изменяться так быстро, что возникающие деформации и разрушения еще не успевают распространиться, как распределение напряжений изменится, так как скорости распространения волн напряжений достигают 6000 м/с, а нарушение прочности (трещины) распространяются со скоростью не более 1500 м/с. В настоящее время активно применяются численные методы для решения различных задач нестационарной механики деформируемого твердого тела. Однако, при решении сложных задач возникают проблемы оценки достоверности полученных результатов. В работах [1, 3–4, 9–10] приведена информация о постановке волновых задах теории упругости.

Для решения задачи о моделировании упругих взрывных волн в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат ХОУ, которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие. Предположим, что тело Г изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

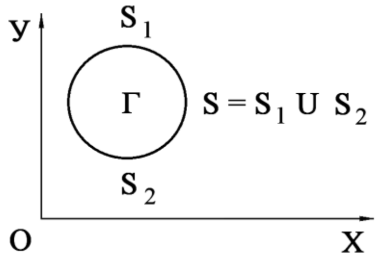

Рис. 1. Некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат XOY

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \ (x, y) \in \Gamma,$$

$$\sigma_x = \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho (C_p^2 - 2C_s^2)\varepsilon_y, \ \sigma_y = \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho (C_p^2 - 2C_s^2)\varepsilon_x, \tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (x, y) \in (\Gamma \cup S), \tag{1}$$

где: σ_x, σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x, ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей ОХ и ОУ соответственно; ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; S $(S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Γ.

Систему (1) в области, занимаемой телом Г, следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Начальные условия в области Γ зададим в виде

$$u\big|_{t=0} = u_0 \ , v\big|_{t=0} = v_0 , \ \dot{u}\big|_{t=0} = \dot{u}_0 , \ \dot{v}\big|_{t=0} = \dot{v}_0 , \ (x, y) \in \Gamma , \qquad (2)$$

где: u_0, v_0, $\dot{u}_0$ и $\dot{v}_0$ – заданные в области Г функции.

Граничные условия зададим в виде:

составляющих компонентов тензора упругих напряжений на границе S_1

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = A_x , \quad \tau_{xy} l + \sigma_y m = A_y , \ (x, y) \in S_1 ; \qquad (3)$$

составляющих компонентов вектора упругих перемещений на границе S_2

$$u = B_x , \quad v = B_y , \quad (x, y) \in S_2 , \qquad (4)$$

где: l и m – направляющие косинусы; A_x, A_y, B_x и B_y – заданные на границе S функции.

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями – используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\overline{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \overline{K}\vec{\Phi} = \vec{R} , \quad \vec{\Phi}\big|_{t=0} = \vec{\Phi}_0 , \quad \dot{\vec{\Phi}}\big|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0 , \qquad (5)$$

где: $\overline{H}$ – матрица инерции; $\overline{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (5) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями. Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши (5). В работах [1, 3–10] приведена информация о численном моделировании нестационарных волн напряжений в деформируемых телах. Рассмотрим интегрирование системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Для интегрирования уравнения (5) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\overline{H}\frac{d}{dt}\vec{\dot{\Phi}}+\overline{K}\vec{\Phi}=\vec{R}\,,\quad \frac{d}{dt}\vec{\Phi}=\vec{\dot{\Phi}}\,. \tag{6}$$

Интегрируя по временной координате соотношение (6) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\vec{\dot{\Phi}}_{i+1}=\vec{\dot{\Phi}}_i+\Delta t\overline{H}^{-1}(-\overline{K}\vec{\Phi}_i+\vec{R}_i)\,,\quad \vec{\Phi}_{i+1}=\vec{\Phi}_i+\Delta t\vec{\dot{\Phi}}_{i+1}\,. \tag{7}$$

где: Δt – шаг по временной координате.

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина. Рассмотрим устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках. Система уравнений (5) для внутренних и граничных узловых точек, полученная в результате интегрирования уравнения движения теории упругости, должна давать решение, сходящееся к решению исходной системы (1).

Шаг по временной переменной Δt определяем из следующего соотношения

$$\Delta t=k\frac{\min\Delta l_i}{C_p}\ (i=1,\ 2,\ 3,\ ...,\ r)\,, \tag{8}$$

где: Δl – длина стороны конечного элемента.

Результаты численного эксперимента показали, что при k = 0,5 обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на сооружения. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Некоторые вопросы в области постановки, разработки методики, алгоритма и результатах решенных нестационарных динамических задач рассмотрены в работах [1–10]. Рассмотрим задачу об интерференции плоских продольных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса.

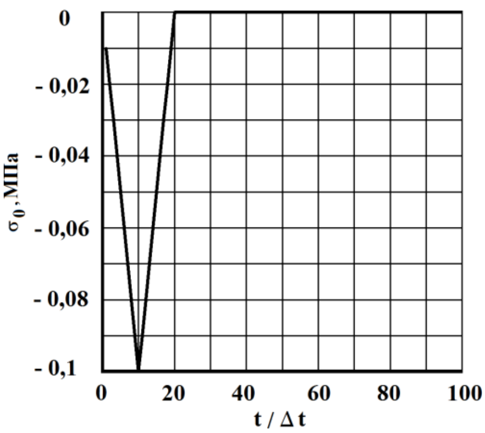

Рис. 2. Воздействие в виде треугольного импульса

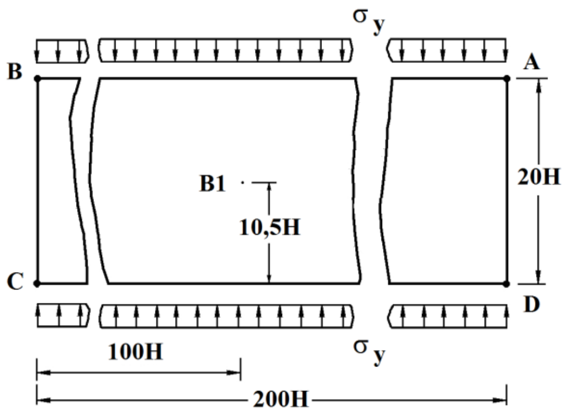

Рис. 3. Постановка задачи об интерференции волн напряжений

На границе пластинки AB (рис. 3) приложено нормальное напряжение σ_y (рис. 2), которое при $0 \leq n \leq 10$ $(n = t/\Delta t)$ изменяется линейно от 0 до P, а при $n \geq 10$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0{,}1$ МПа (–1 кгс/см^2)). На границе пластинки CD (рис. 3) приложено нормальное напряжение σ_y, которое при $0 \leq n \leq 10$ изменяется линейно от 0 до P, а при $n \geq 10$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0{,}1$ МПа (1 кгс/см^2)). Граничные условия для контуров BC и AD при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контуров BC и AD не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 190$. Исследуемая расчетная область имеет 4221 узловую точку и 4000 конечных элементов. Решается система уравнений из 16884 неизвестных. Для примера на рис. 4 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ $(\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|)$ во времени n в точках $B1$. Сравнение с результатами других методов показало хорошее совпадение, что позволяет сделать вывод о физической и математической достоверности результатов численного решения динамических задач, полученных методом конечных элементов в перемещениях.

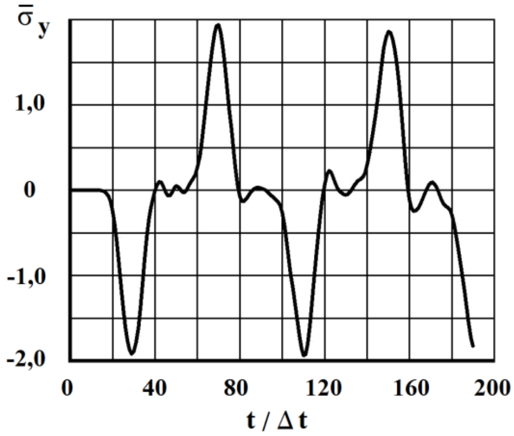

Рис. 4. Изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени n в точке B1

Достоверность численного метода приведена в следующих работах [1, 3–7, 9–10]. Методика, алгоритм, комплекс программ и результаты решенных задач рекомендуются для использования в научно-технических организациях, специализирующихся в области динамического расчета технических объектов.

Список литературы

1. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87-110.
2. Мусаев В.К., Жидков Е.П., Севастьянов Л.А. Аналитические методы теоретической физики в задачах моделирования катастроф / В.К. Мусаев, Е.П. Жидков, Л.А. Севастьянов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. –2005. — № 1. – С. 6-8.
3. Мусаев В.К. О моделировании интерференции плоских продольных волн напряжений в виде дельта функции // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 3. – С. 51-59.
4. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55-80.
5. Ситник С.В. Решение задачи об интерференции плоских продольных упругих волн напряжений в виде дельта функции с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях / С.В. Ситник, В.А. Куранцов, Д.А. Денисюк, А.Н. Денисенков, В.А. Савичев // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы

Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 63-67.

6. Акатьев С.В. Сопоставление результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях с интерференцией плоских продольных упругих волн напряжений в виде дельта функции / С.В. Акатьев, В.А. Куранцов, А.Н. Денисенков, Н.Г. Черникова, А.И. Кормилицин // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго и ресурсосбережение: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XIV. В 3 т. – Том 2. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2012. – С. 270-278.

7. Сущев Т.С. О моделировании интерференции плоских продольных упругих волн напряжений в виде дельта функции с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях / Т.С. Сущев, Н.С. Юзбеков, В.Г. Ситник, А.А. Тарасенко, Д.А. Денисюк // Актуальные проблемы техногенной и экологической безопасности. Сборник научных работ. Выпуск 7. – М.: РГСУ, 2012. – С. 454-462.

8. Мусаев В.К. О моделировании безопасности технических объектов от взрывных воздействий // Стратегическая стабильность. – 2013. – № 1. – С. 69-72.

9. Мусаев В.К. О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71-76.

10. Musayev V.K. Structure design with seismic resistance foundations // Proceedings of the ninth European conference on earthquake engineering. – Moscow: TsNIISK, 1990. – V. 4-A. – P. 191-200.

Рецензенты:

Савчин В.М., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры Математического анализа и теории функций факультета Физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов, г.Москва.

Зволинский В.П., д.х.н., профессор, профессор кафедры Экологического мониторинга и прогнозирования Экологического факультета Российского университета дружбы народов, г.Москва.