

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ СЛАБОГО НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИЙ В РЕКОНСТРУИРОВАННОМ АТТРАКТОРЕ

Никульчев Е.В.¹

¹НОУ ВО «Московский технологический институт», Москва, Россия (117292, г. Москва, ул. Кедрова, д. 8, кор. 2), e-mail: nikulchev@mail.ru

В настоящее время свойства динамического хаоса используются при моделировании различных прикладных систем. В статье предлагается использовать метод исследования хаотичности процессов на основе выявления слабого нарушения симметрий восстановленного аттрактора. Показано, как результаты вычислений могут быть использованы для идентификации систем. Разработан алгоритм построения конечно-разностных моделей, включающий: вычисление численными методами необходимых условий существования хаоса, реконструкцию аттрактора по временному ряду, поиск симметричных фрагментов аттрактора в условиях слабого нарушения симметрии, определение вида нелинейностей, параметрической идентификации. Результатом алгоритма является система конечно-разностных уравнений в пространстве состояний. Введены критерии оценки нарушения симметрий на основе оценок расхождения фрагментов фазовых траекторий. Приведены примеры моделирования систем с хаотической динамикой. Рассмотрены вопросы генерации робастного хаоса. С учетом того, что робастный хаос генерируется на основе кусочно-гладких функций, предложена форма моделей. Приведены результаты генерации. На основании предложенного комплекса решений могут быть построены и идентифицированы математические модели процессов, в которых наблюдаются хаотические явления, а также сгенерирован робастный хаотический сигнал с заданными свойствами.

Ключевые слова: хаос, нелинейная хаотическая динамика, нарушение симметрий, идентификация нелинейных систем, качественная динамика.

MODELING CHAOTIC SYSTEMS BASED ON THE CALCULATED WEAK SYMMETRY VIOLATION IN THE RECONSTRUCTED ATTRACTOR

Nikulchev E.V.¹

¹Moscow Technological Institute, Moscow, Russia (117292, Moscow, Kedrov St., 8, box. 2), e-mail: nikulchev@mail.ru

Currently properties dynamic chaos is used in the simulation of various processes and application systems. The paper proposes to use as a criterion of chaos attractor of the reduced ability to detect weak symmetry breaking. Displaying the results of computations may be used for identification systems. An algorithm for constructing models of affine models, comprising: calculating numerically the necessary conditions for the existence of chaos, attractor reconstruction from time series, search for symmetric fragments attractor in low-symmetry breaking, the definition of nonlinearities in the central invariant manifold of parametric identification. The result of the algorithm is the system of finite-difference equations in the state space. For evaluating the symmetry violation on the basis of estimates of divergence phase trajectories fragments are introduced criteria. This is examples of modeling chaotic systems. The problems of generating robust chaos considered. Given that robust chaos is generated based on piecewise smooth functions, proposed form of models. The results of the generation is a given. Based on the proposed set of solutions can be identified and built mathematical models of processes in which the observed phenomena of chaos and generated robust chaotic signal with the desired properties.

Key words: chaos, nonlinear chaotic dynamics, symmetry breaking, the identification of nonlinear systems, qualitative theory.

В настоящее время хаотические сигналы применяются в различных областях науки и технологий — в металлургии [2], машиностроении [17], задачах автоматизации технологических процессов [6; 8; 20], финансовой сфере [1; 20], геологии [18], медицине [14], для моделирования трафика в компьютерных сетях [4, 16], для обеспечения безопасности в кор-

поративных сетях [9] и облачных инфраструктурах [23], в сельском хозяйстве [24] и многих других. Это говорит о большом междисциплинарном значении научных результатов в области теории хаотической динамики. Во многих практических приложениях исследователям представляется удобным действовать в предположении о хаотическом характере наблюдаемого процесса. Аттрактор просто восстановить, существует множество численных методов оценки размерности. Разработаны методы приближенного решения обратной задачи динамики, т.е. восстановления заданного вида дифференциальных уравнений по экспериментальным данным [2; 3; 7; 11; 12; 19].

Однако предположение о хаотичности динамики часто строится только на оценках необходимых условий существования хаоса, таких как оценка старшего показателя Ляпунова. В статье изложен алгоритм выявления слабого нарушения симметрий для анализа хаотичности восстановленного фазового портрета [15; 25]. Показано, как результаты вычислений могут быть использованы для идентификации систем.

1. Постановка задачи

Для исследования используется временной ряд $\{y_0, y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots\}$, при этом предполагается, что временной ряд порожден системой, дискретизированная форма которой имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0), \\ y_k &= g(\mathbf{x}_k), \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{x} — n -мерная точка в пространстве состояний; y — наблюдаемый одномерный процесс; k — дискретное время (номер); f, g — вектор функции.

Использование дискретных моделей позволяет оперировать с данными, полученными в результате эксперимента, и не накапливать ошибки, связанные с переходом к непрерывным моделям, однако это усложняет качественный анализ процессов.

Фазовая траектория, как известно, это траектория, изображающая, как изменяется со временем t состояние динамической системы \mathbf{x} . Для дискретных систем, состояния соединяются линиями, в соответствии с последовательностью отсчетов $k = 1, 2, \dots$. Область, к которой эволюционируют (сходятся) все возможные траектории движения систем, называется аттрактором. Для дискретных систем, так же как и для непрерывных, аттрактор представляет собой точку, для колебательных систем — замкнутые траектории (циклы). Для хаотических систем существует аттрактор, который называется странным, в этом случае траектории стягиваются, но не в точку, кривую, тор, а в некоторое подмножество фазового пространства.

В настоящее время существуют различные точки зрения на число и характер сценариев перехода к хаосу:

1) сценарий Фейгенбаума (через каскад бифуркаций удвоения периода);

- 2) сценарий Афраймовича-Шильникова (модель Рюэля-Такенса) (через разрушение двумерного тора или через разрушение замкнутой инвариантной кривой);
- 3) сценарий Помо-Манневиля (чередование во времени почти регулярных колебаний с интервалами хаотического поведения).

Исследование сценариев перехода к хаосу играет важную роль на практике, так как в ряде случаев позволяет предсказать возможность наступления хаотического режима поведения динамической системы при изменении управляющих параметров. При разработке метода использовался второй тип сценария, который позволяет использовать методы качественной нелинейной динамики.

Аттрактор является инвариантной характеристикой системы, т.е. сохраняется при действиях преобразований. Динамические системы, для которых n -мерный фазовый объем уменьшается, называются диссипативными, если фазовый объем сохраняется, то такие системы носят название консервативных. У консервативных систем всегда существует хотя бы один закон сохранения. Законы сохранения определяются симметриями, допускаемыми системой.

Задача, рассматриваемая в статье, состоит в построении модели вида (1) по наблюдаемому временному ряду.

2. Моделирование систем с хаотической динамикой на основе оценки слабого нарушения симметрий в реконструированном аттракторе

Разработан метод моделирования систем с хаотической динамикой [7; 19; 21], позволяющий находить решение обратной задачи динамики на минимальном инвариантом многообразии в классе аффинных систем.

Суть метода состоит в следующем. Исходными данным является временной ряд, порожденный (предположительно) системой с хаотической динамикой.

1. Вычисляются численными методами необходимые условия существования хаоса — старший показатель Ляпунова (для хаотической динамики должен быть больше нуля) и др. [4; 7].
2. Восстанавливается аттрактор по методу Паккадра (метод задержки) [7].
3. Если подтверждается предположение о хаотической динамике, то исследования продолжаются.
4. На основе анализа реконструированного аттрактора проверяется наличие симметрий (в условиях слабого нарушения симметрий) [21].
5. По принятым симметриям по формуле Хаусдорфа-Ли строится вид уравнений в минимальном инвариантом многообразии [19].
6. Структура уравнений параметрически идентифицируется [8].

7. Оценивается качественное расхождение динамики модели и исходного ряда.

На выходе – модель в форме конечноразностных уравнений.

Первым двум этапам метода посвящено значительное количество работ, поэтому их обсуждение выходит за рамки настоящей статьи. Остановимся подробно на четвертом этапе.

Алгоритм поиска симметричных участков реконструированных траекторий в условиях слабого нарушения симметрий был разработан О.В. Козловым [5]. Надо отметить, что в данной постановке задача поиска почти симметричных фрагментов является NP-полной. Алгоритм состоит из пяти этапов. Исходными данными алгоритма служат n -мерные точки, принадлежащие реконструированному аттрактору в фазовом пространстве.

1 этап. *Выделение монотонных фрагментов с единственным локальным экстремумом.* В n -мерном фазовом пространстве выделяется фрагмент F , состоящий из m действительных точек, представляется в виде матрицы $m \times n$:

$$F = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_m],$$

т.е. в виде матрицы $m \times n$.

2 этап. *Преобразование фрагмента в дескриптор* — образ, инвариантный относительно переноса, поворота и масштабирования исходного фрагмента, а также получение численных показателей этого преобразования. Результатом процедуры нормализации является дескриптор фрагмента $F_{\text{норм}}$, матрица, осуществляющая преобразование фрагмента в его дескриптор, а также набор показателей и матриц всех промежуточных преобразований: $n-1$ матриц. Данная процедура изложена в [21].

3 этап. *Оценка нарушения симметрии.* После получения дескрипторов двух предположительно симметричных фрагментов F_A и F_B можно дать численную оценку расхождения (расстояния) между ними D_{AB} , на основе разложения в ряд Фурье.

Для вычисления расстояния между фрагментами предлагается суммировать расхождения соответствующих элементов спектров этих контуров после дискретного преобразования Фурье, причем более высокочастотные (пары, близкие к центру спектра) элементы спектра имеют меньшее влияние на показатель близости, чем низкочастотные.

Соответствующий критерий имеет вид:

$$D_{A,B} = \sum_{i=1}^q \left(\left(\sqrt{\sum_{j=1}^n (\text{Im}(S_{B,i,j}) - \text{Im}(S_{A,i,j}))^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n (\text{Re}(S_{B,i,j}) - \text{Re}(S_{A,i,j}))^2} \right) \cdot \beta_i \right), \quad (2)$$

где q — количество сопряженных пар элементов спектра, n — размерность фазового пространства, β_i — коэффициенты дисконтирования ($i = \overline{1, q}$), определяющие степень важности составляющих спектра по частотам, $S_{(i)}$ — соответствующие элементы спектра контуров

А и В. В практических приложениях использовался экспоненциальный вид зависимости β_i от номера члена ряда разложения Фурье.

Для оценки схожести дескрипторов вводится показатель

$$N_{A,B} = \frac{1}{1 + D_{A,B}}, \quad (3)$$

где $D_{A,B}$ — оценка, вычисляемая по формуле (2).

Предложены критерии оценки решения. Средний показатель схожести пар дескрипторов фрагментов, входящих в решение:

$$K_n = \frac{1}{(k^2 - k) / 2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k N_{i,j} \rightarrow \max, \quad (4)$$

где k — количество фрагментов в решении n , а $N_{i,j}$ — схожесть фрагментов i и j , вычисляемая в соответствии с (3). Длина покрытия фрагментами исходного контура:

$$M_n = \sum_{i=1}^{k-1} L_i \rightarrow \max, \quad (5)$$

где k — количество фрагментов в решении n , а L_i — длина фрагмента i .

Задача поиска решения многокритериальна. Происходит однокритериальный поиск последовательными этапами, на каждом из которых длина покрытия фрагментами решений исходного контура ограничена снизу, а в качестве оценки используется критерий (4). Этап завершается при выполнении условий сходимости, количество этапов задается изначально.

Обобщенный критерий оценки для выбора единственного решения:

$$\Phi_n = K_n \cdot \frac{M_n}{L} \rightarrow \max,$$

где n — номер особи; L — длина исходного контура; M_n вычисляется по (5).

4 этап. *Итеративная процедура генетического отбора решений.* Для решения использовался генетический отбор [21].

Весь алгоритм реализован в форме программы в среде MATLAB.

Заметим, что по сути происходит проверка, допускает ли система заданные преобразования, в условиях слабого нарушения симметрии. Последнее проверяется как существование некоторой малой величины, незначительно отклоняющейся от симметричного отображения. (Например, слабое нарушение симметрии видно, как почти похожие петли в аттракторе.)

Приведем тестовый пример для иллюстрации работы алгоритма и оценки его работоспособности. В качестве исходных данных будем использовать временной ряд, приведенный на рис. 1а. Исходный набор данных состоит из 1000 точек. Реконструированный портрет при-

веден на рис. 1б. Контур был подвергнут расстановке маркеров (рис. 2а). Общее количество маркеров: 126. После маркировки из 7860 возможных контуров было отобрано 2807, остальные не удовлетворили ограничениям по длине: от 2 до 200 точек исходного контура. Каждый фрагмент интерполирован 60 равномерно расположенными по его длине точками и подвергнут процедуре нормализации. После этого была построена матрица смежности фрагментов (рис. 2б).

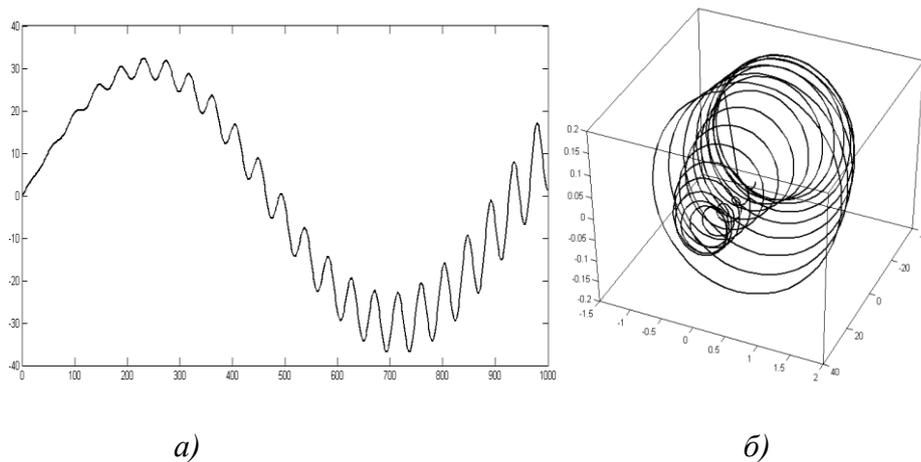


Рис. 1. Исходные временной ряд (а) и реконструированный фазовый портрет (б)

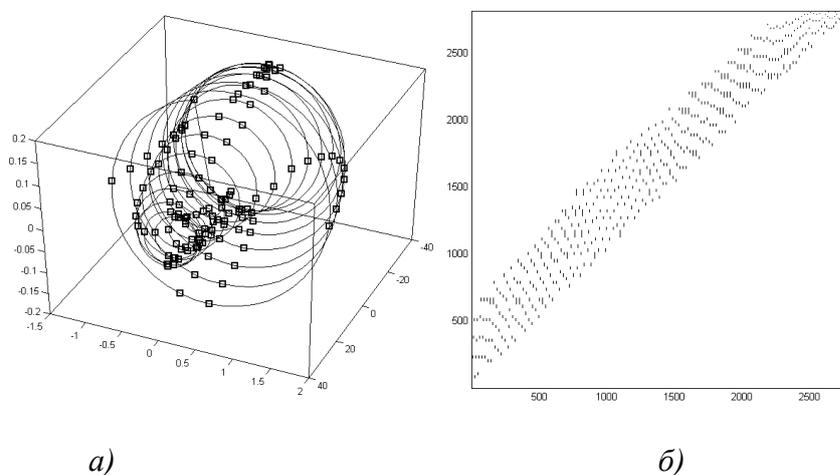


Рис. 2. Размеченный фазовый портрет (а) и матрица смежности фрагментов (б)

Осуществлен эволюционный подбор решения (размер популяции 200, показатели вероятности мутации $\alpha = 0,3$ и $\beta = 0,1$; количество шагов ограничения длины: 8, элитарный отбор в новое поколение, тип выбора родителей — аутбридинг, особи в популяции уникальны), и отобрано решение-победитель. Популяция сошлась 8 раз за 817 итераций, решение-победитель: схожесть фрагментов 0.6271, длина 682.

Симметричные фрагменты фазовой траектории в условиях слабого нарушения (почти симметричные фрагменты) показаны на рис. За сплошной линией, соответствующие им фрагменты временного ряда на рис. 3б.

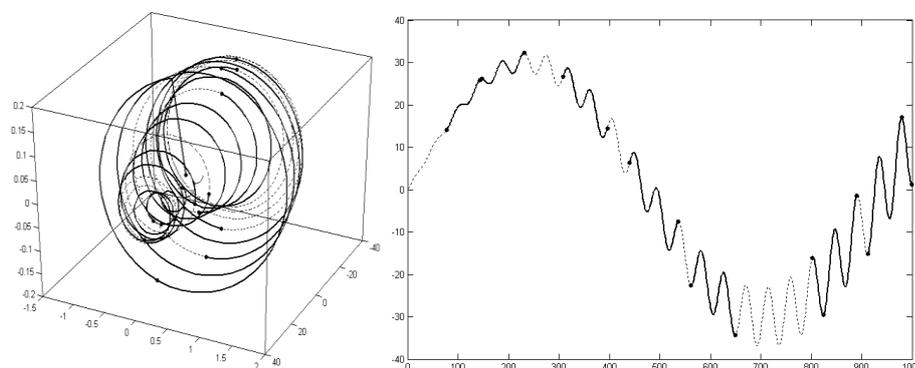


Рис. 3. Почти симметричные участки фазовой траектории (а), исходных данных (б)

4. Моделирование и генерация хаотического сигнала

В [13] показано, что робастный хаос может возникнуть в кусочно-гладких системах. Этот результат облегчает задачу моделирования систем с хаотической динамикой. Попытки провести параметрическую идентификацию модели с произвольно выбранными видами нелинейностей, как правило, вообще не находят решения. Если решение найдено (что, скорее, случайность, чем закономерное явление), то решения будут естественно чувствительны к незначительным изменениям параметров. Действительно, во многих физических явлениях хаос возникает при незначительном изменении параметра, однако в технических приложениях использование хаотического режима, как правило, требует поиска менее чувствительных, т.е. робастных моделей. Этого требует сама суть экспериментов с техническими системами, а также ошибки вычислений и измерений. Кроме того, для задач синтеза управлений эффективно использовать хаотические свойства систем, но при условии, что хаотический режим не изменяет качественного поведения в некотором диапазоне параметров.

Предложено использовать модель в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\Psi u_k, \\ y_k &= C\mathbf{x}_k, \end{aligned}$$

Здесь нелинейная функция $\Psi(t)$ определяется из найденных симметрических свойств фазовой траектории по формуле Хаусдорфа-Ли [см. доказательство в 19]; u_k — дискретизированная кусочно-непрерывная функция времени (например, кусочно-линейная).

Такой вид представления модели позволяет использовать методы параметрической идентификации, например метод наименьших квадратов, реализованный в System Identification Toolbox в MATLAB. В качестве параметров функции `ident` используются исследуемый $\{y_k\}$ (output) и сгенерированный кусочно-непрерывный ряд $\{\Psi u_k\}$ (input). Выходом функции

является матрица A , B , C найденных размерностей. Заметим, что размерность пространства состояний, полученных в результате идентификации системы, всегда равна численным оценкам первоначально реконструированного аттрактора.

Здесь хаос генерируется как периодическое изменение линейной траектории, не дающей динамике прийти к устойчивой или периодической траектории. Конечно, не во всех приложениях такие модели представляются удобными, но для систем управления использование вида (5) позволяет использовать известные методы синтеза и оценок параметров. Кроме того, для инженерных задач, обеспечения безопасности информационных систем, где широко используются хаотические сигналы, данный метод позволяет генерировать робастный хаос с заданными свойствами (вид аттрактора, степень нарушения симметрии и др.).

Для примера приведем вид моделей, полученных для системы теплообмена [6]:

$$A = \begin{pmatrix} 0,998 & 0,006 & -0,009 & 0,007 & -0,001 & -0,007 \\ 0,008 & 0,913 & 0,238 & 0,142 & 0,091 & -0,215 \\ 0,006 & 0,132 & 0,091 & -0,928 & -0,459 & -0,038 \\ -8,12 \cdot 10^{-5} & 0,008 & -0,177 & 0,356 & -0,956 & 0,097 \\ -0,001 & -0,06 & 0,803 & 0,203 & -0,145 & 0,139 \\ 0,002 & -0,006 & 0,006 & -0,003 & 0,010 & 0,661 \end{pmatrix};$$

$$\Psi = \exp(10k) \left(-7,24 \cdot 10^{-4}; -0,087; 0,209; -0,074; -0,440; -0,061 \right)^T;$$

$$C = \begin{pmatrix} 129,8 & -144,2 & 18,43 & -23,21 & -3,233 & -4,911 \\ 582,1 & 4,995 & 2,230 & -1,596 & 2,587 & 4,100 \end{pmatrix}.$$

Сравнение моделируемого выходного процесса с реальными данными показано на рис. 4. Видно, что модель демонстрирует сложное динамическое поведение, адекватное рассматриваемому теплообменному процессу. На рис. 5 показано сравнение сгенерированного по построенной модели графика переходных процессов во времени для решения задачи оптимального быстрогодействия.

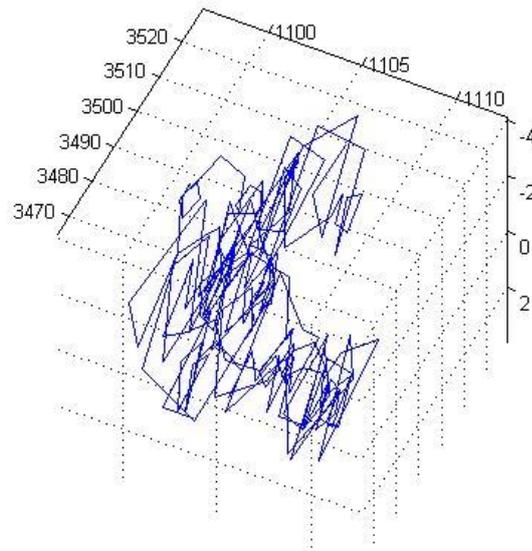


Рис. 4. Реконструированный фазовый портрет

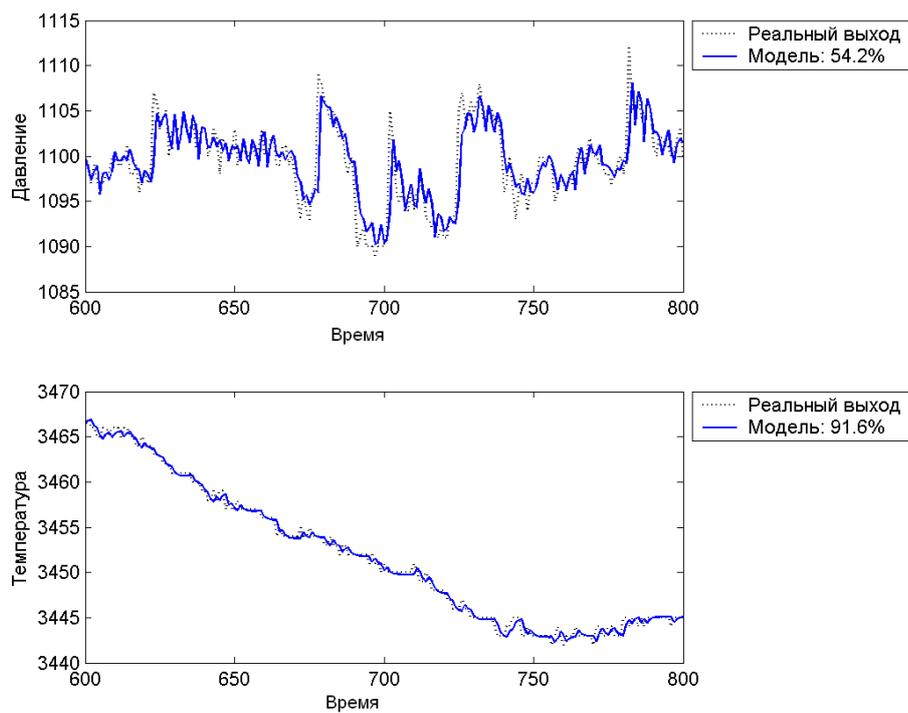


Рис. 5. Сравнение динамики реальной системы и ряда, сгенерированного по построенной модели

Полученные модели использованы для синтеза управления с учетом нескольких критериев качества, и результаты были внедрены при управлении реальной системой теплообмена (функционировала около 10 лет), что свидетельствует о надежности подхода.

Заключение

Разработан метод построения математических моделей хаотических процессов. Полученные модели могут быть использованы для построения робастного хаоса [22], а также для генерации хаоса с заданными качественными свойствами.

Существует широкое использование хаотических моделей для моделирования систем обмена данными в компьютерных сетях, сформирован экспериментальный стенд для разработки систем управления обменом данными [10]. При использовании протоколов TCP/IP в системах обмена данными возникают фрактальные явления. Использование динамических моделей хаотических процессов позволяет обеспечивать прогнозирующее управление для динамического распределения ресурсов в сложных инфраструктурах. При этом важной задачей является выбор формы модели. Использование предложенной формы позволит получить вычислительно надежные модели, которые, с одной стороны, отражают необходимые качественные свойства нелинейных систем, с другой — не чувствительны к незначительному изменению параметров.

Список литературы

1. Борисов Ю.Ю. Метод пошаговой реконструкции для построения локальных прогнозирующих моделей хаотических временных рядов // Известия вузов. Проблемы полиграфии и издательского дела. - 2007. - № 2. - С. 051–056.
2. Волкова В.Е. Критерии идентификации нелинейных моделей динамических систем // Металлические конструкции. - 2010. - Т. 16. - № 3. - С. 171–178.
3. Гришин И.В., Манкевич Е.И., Телегина К.В., Шелудько А.С., Ширяев В.И. О решении задач параметрической идентификации процессов с хаотической динамикой // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. - 2008. - № 3 (103). - С. 44-50.
4. Карпухин А.В., Ткаченко А.А. Моделирование хаотических явлений в инфокоммуникационных сетях: синергетический подход // Проблемы телекоммуникаций. - 2013. - № 3. (12). - С. 36–52.
5. Козлов О.В. Методика эволюционного выявления преобразований симметрий в многомерных числовых последовательностях : дис. ... канд. техн. наук: 05.13. — М. : МГУП, 2008.
6. Никульчев Е.В. Моделирование систем с нелинейной динамикой на основании экспериментальных данных // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2006. - № 5. - С. 6–14.
7. Никульчев Е.В. Геометрический подход к моделированию нелинейных систем по экспериментальным данным. — М. : МГУП, 2007.

8. Никульчев Е.В. Моделирование и идентификация динамически сложных систем на основе группового анализа // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2004. - № 10. - С. 2–7.
9. Никульчев Е.В., Паяин С.В., Плужник Е.В., Питиков Д.А. Вычисление характеристик динамического хаоса по трафику компьютерных сетей // Фундаментальные исследования. - 2014. - № 8–4. - С. 812–816.
10. Плужник Е.В., Никульчев Е.В., Паяин С.В. Лабораторный экспериментальный стенд облачных и сетевых технологий // Cloud of Science. - Т. 1. - № 1. - С. 78–78.
11. Шульгин А.О., Демурчев Н.Г., Якушев Д.В. Моделирование хаотической динамической системы с помощью дробно-рационального интерполирования // Наука. Инновации. Технологии. - 2011. - № 4. - С. 117–122.
12. Шелудько А.С., Ширяев В.И. Алгоритм минимаксной фильтрации для одномерного хаотического процесса // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2014. - № 5. - С. 8–12.
13. Banerjee S., Yorke J. A., Grebogi C. Robust chaos // Physical Review Letters. - 1998. - V. 80. - N. 14. - С. 3049.
14. Garzón A., Grigoriev R. O., Fenton F. H. Model-based control of cardiac alternans on a ring // Physical Review E. - 2009. - V. 80. - N. 2. - P. 021932. (doi: 10.1103/PhysRevE.80.021932).
15. Grigoriev R. O. Identification and Control of Symmetric Systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. - 2000. - Vol. 140. - № 3–4. - P. 171–192. (doi: 10.1016/S0167-2789(00)00014-2).
16. Karpukhin A. V., Kudryavtsev I. N., Borisov A. V. Gritsiv, D. I. Cho H. Computer Simulation of Chaotic Phenomena in High-Speed Communication Networks // Journal of Korean Institute of Information Technology. - 2013. - Vol. 11. - №. 3. - P. 113–122.
17. Kong F., Liu P., Wang X. Experimental Investigation of Evolution Process of Nonlinear Characteristics from Chatter Free to Chatter // Journal of Modern Physics. - 2011. - Т. 2. - №. 9. (doi:10.4236/jmp.2011.29126).
18. Mokritskaya T. The phase portrait and degradation in soil // International Journal of Engineering Science Invention. - 2013. - Vol. 2. - № 4. - P. 27–31. ([http://www.ijesi.org/papers/Vol%202\(4\)/Version-6/E242731.pdf](http://www.ijesi.org/papers/Vol%202(4)/Version-6/E242731.pdf)).
19. Nikulchev E. Geometric Method of Reconstructing Evolution Equations from Experimental Data // Evolution Equations / Ed.: A. L. Claes.— New York : Nova Science Publishers, 2011. - P. 373–379.
20. Nikulchev E.V. Reconstruction models for attractors in the technical and economic processes // International Journal of Computer Trends and Technology. - 2013. - V. 6. - N. 3. - P. 171–175.
21. Nikulchev E.V., Kozlov O.V. Identification of structural model for chaotic systems // Journal of Modern Physics. - 2013. - V. 4. - N. 10. - P. 1381–1392 (doi: 10.4236/jmp.2013.410166).

22. Nikulchev E.V. Robust chaos generation on the basis of symmetry violations in attractors // Proc. ICCTPEA-2014, Saint-Petersburg, Russia. - 2014. - P. 133.
23. Xiong W., Hu H., Xiong N., Yang L.T., Peng W.C., Wang X., Qu Y. Anomaly secure detection methods by analyzing dynamic characteristics of the network traffic in cloud communications // Information Sciences. - 2014. - V. 258. - P. 403–415. (doi: 10.1016/j.ins.2013.04.009).
24. Mangiarotti S., Drapeau L., Letellier C. Two chaotic global models for cereal crops cycles observed from satellite in northern Morocco // Chaos. - 2014. - V. 24. - N. 2. - P. 023130 (doi: 10.1063/1.4882376)
25. Jiang J.J., Zhang Y., Stern J. Modeling of chaotic vibrations in symmetric vocal folds // The Journal of the Acoustical Society of America. - 2001. - V. 110. - N. 4. - P. 2120–2128 (doi: 10.1121/1.1395596).

Рецензенты:

Горяшко А.П., д.т.н., профессор, профессор кафедры информатики и автоматизации Московского технологического института, г. Москва.

Пылькин А.Н., д.т.н., профессор, декан факультета вычислительной техники, заведующий кафедрой вычислительной и прикладной математики Рязанского государственного радиотехнического университета, г. Москва.