

## О СУЩНОСТИ ОБОБЩЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Арюткина С.В.

*Арзамасский филиал Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», Арзамас, Россия (607220, г. Арзамас, ул. К. Маркса, 36), e-mail: [mzaykin@yandex.ru](mailto:mzaykin@yandex.ru)*

**В статье рассматриваются различные аспекты процесса обобщения, описываются философские, психолого-педагогические и научно-методические основы этого процесса применительно к обучению математике. Проведен теоретико-методологический анализ существующих подходов к определению понятия обобщения с позиций их применимости к выявлению сущности обобщения математической задачи. Выявляется специфика имеющихся трактовок, а также базисные положения, определяющие закономерности процесса обобщения как психологической, педагогической и методической категории. Устанавливаются некоторые подходы к обобщению математических теорий. Они во многом определяют сущность обобщения математической задачи как абстрагирования от некоторых свойств ее содержания. Кроме того, в статье подчеркиваются возможности и перспективы использования для развития у учащихся понимания обобщенных математических задач.**

Ключевые слова: методика математики, математическое развитие школьников, обобщение математических задач.

## ABOUT ESSENCE OF GENERALIZATION OF A MATHEMATICAL PROBLEM

Aryutkina S.V.

*Arzamas branch of the NNGU, Arzamas, Russia (607220, Arzamas, street K. Marksa, 36), e-mail: [mzaykin@yandex.ru](mailto:mzaykin@yandex.ru)*

**In article various aspects of process of generalization are considered, philosophical, psychological -pedagogical and scientifically-methodical bases of this process with reference to training to the mathematician are described. The teoretiko-methodological analysis of existing approaches to definition of concept of generalization from positions of their applicability to identification of essence of generalization of a mathematical task is carried out. Specifics of available treatments, and also the basic provisions defining regularities of process of generalization as psychological, pedagogical and methodical category come to light. Some approaches to synthesis of mathematical theories are established. They in many respects define essence of generalization of a mathematical problem as abstraction from some properties of its content. Besides, in article opportunities and use prospects for development of pupils of vicinities of the generalized mathematical tasks are emphasized.**

Keywords: procedure of mathematics, mathematical progress of students, generalization of mathematical problems.

В современной методике обучения математике все более актуальными становятся проблемы, связанные с формированием и развитием у школьников обобщенных структур мышления и деятельности (общеучебных, универсальных учебных действий, обобщенных приемов математической деятельности и др.). А потому необходимо рассматривать возможности, методы, приемы и средства, соответствующие указанным целям, для поиска и создания которых следует, прежде всего, определить теоретические основы процесса обобщения не только математического материала, но и одного из основных средств обучения математике – математических задач.

Особенности обобщения математических фактов, положений и задач учащимися во многом изначально определяются сущностью процесса обобщения, которая раскрывается в философской, психологической и педагогической науках.

Современное *общефилософское* понимание категории обобщения связано с интерпретацией его либо как логического приема, с помощью которого выявляются общие свойства и признаки предметов (в случае обобщения любых свойств результат будет носить характер абстрактно-общего; если же обобщаются существенные свойства, то – конкретно-общего); либо как логического *процесса* перехода от единичного к общему, от менее общего к более общему знанию, а также результата этого процесса (в формальной логике – переход от видового к родовому понятию). При этом подчеркивается, что обобщение тесно связано с абстрагированием и индукцией [9].

Применительно к обобщению математической задачи следует, возможно, опираться на его представление как некоего процесса, опирающегося на результат определенного абстрагирования от ее конкретного содержания, поскольку оно направлено, скорее, не на выявление общих свойств и признаков, а на развитие задачи, переход от частной задачной ситуации к более общей.

В *психологической* науке обобщение трактуется как одна из основных характеристик познавательных процессов, состоящая в выделении и фиксации относительно устойчивых, инвариантных свойств предметов и их отношений. При этом принято говорить об эмпирическом обобщении, функция которого состоит в упорядочении многообразия предметов (в их классификации), оно характерно для начальных этапов познания, в его основе лежит действие сравнения; а также о теоретическом обобщении, основанном на анализе эмпирических данных; оперируя теоретическим понятием, человек соотносит в единое целое частные особенности объекта, детализирует знание о нем, при таком восхождении от абстрактного к конкретному происходит мысленное воспроизведение объекта; такой тип обобщения соответствует теоретическому этапу развития науки (оно характерно подростковому, юношескому возрасту) [6; с. 226]. Применительно к формированию знаний и понятий обобщение принято считать следующим за абстрагированием элементом обучения [1, с. 200]. Таким образом, в процессе обучения школьников необходимо учитывать, что процесс обобщения понятий, фактов и задачных ситуаций основывается на результатах абстрагирования от некоторых свойств рассматриваемых объектов.

В теории обучения философские и психологические взгляды на возможности обобщения в процессе обучения школьников отдельным учебным предметам развиваются и конкретизируются в различных аспектах. Так, В.Ф. Паламарчук, считая развитие мышления учащихся одной из главных задач обучения, подчеркивает необходимость формирования умения обобщать знания, методы и приемы работы для того, чтобы мышление школьника приобрело такое качество, как системность [4; 90 с.]. При этом автор подчеркивает, что объектом обобщения могут быть свойства предметов, факты, события, явления, качества, при-

знаки, отношения, связи, процессы, которые имеют определенное сходство (т.е. сравнимые понятия) и хорошо известны учащимся [там же, с. 66].

Придерживаясь точки зрения на виды обобщений, близкой к В.В. Давыдову, она также различает два вида обобщений: эмпирическое (закрывающееся в сравнении внешних признаков с целью выделения общего признака) и теоретическое (более сложное по сравнению с первым, осуществляющееся на основе движения от абстрактного к конкретному) [там же, с. 68-69]. Кроме того, вслед за Ю.А. Самариным, автор различает обобщения по степени абстрагирования: частичные, поурочные, тематические, итоговые и межпредметные.

Важно отметить, что, по мнению В.Ф. Паламарчук, для формирования у школьников умения обобщать знания, методы и приемы работы, для развития такого важного качества мышления школьника, как системность, необходимо использовать обобщающие проблемные задания (в том числе и задания на обобщения), которые, кроме всего указанного, особенно способствуют воспитанию проблемного видения мира [там же, с. 67].

И.Я. Лернер, описывая основные качества формируемых у школьников знаний, рассматривает взаимосвязанно их конкретность и обобщенность. «Обобщенность знания предполагает способность подвести конкретное знание под обобщенное, а конкретность знания имеет в виду показать конкретное как проявление обобщенного» [2; с. 31]. Автор подчеркивает, что всякое обобщение, производимое человеком, содержит в скрытом для постороннего виде систему конкретных знаний и образов, при этом важно, чтобы для самой личности эта система была ясной. Кроме того, И.Я. Лернер акцентирует внимание на необходимости целенаправленных мер по постепенному обобщению связей для формирования у учащихся систематичности знаний (систематичность знаний понимается при этом как осознание состава некоторой совокупности знаний, их иерархии и последовательности) [там же, с. 18-21].

В.А. Ситаров, рассматривая вопросы, связанные с развитием мышления школьников и особенностями их интеллектуального развития в процессе обучения, опирается на определение мышления как обобщенного отражения человеком действительности в ее существенных связях и отношениях, а среди его основных компонент называет такие мыслительные операции, как анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, обобщение, классификацию и систематизацию. Обобщение характеризуется им как процесс, позволяющий объединять процессы или явления по их существенным признакам и свойствам, которые были выделены при абстрагировании от других [7; с. 99-101].

Дидактические основы реализации процесса обобщения как элемента математического развития школьников детализировались и конкретизировались в работах многих методистов (Д. Пойа, Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой, В.В. Орлова, В.П. Радченко, В.В. Крылова, В.Е. Ярмолюка, В.И. Снегуровой, И.А. Иванова, А.А. Темербековой, Р.С. Черкасова и

др.). Так, А.А. Темербекова в связи с необходимостью развития математического мышления школьников (его основных мыслительных операций) рассматривает обобщение как мысленное выделение общих свойств (инвариантов) в двух или нескольких объектах и объединение этих объектов на основе выделенной общности, а также существенных свойств объекта в результате анализа их в виде общего понятия для целого класса объектов (научно-теоретическое обобщение) [8, с. 46].

Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова, В.В. Орлов, В.П. Радченко, В.В. Крылов, В.Е. Ярмолюк, В.И. Снегурова, И.А. Иванов, описывая методы психологии, используемые в обучении математике, придерживаются точки зрения С.Л. Рубинштейна, трактующего процесс мышления как анализирование и синтезирование того, что выделяется анализом; а затем абстракция и обобщение, являющиеся производными от них. Под обобщением при этом понимают мысленное выделение, фиксирование каких-либо свойств, принадлежащих только данному множеству объектов и объединяющих эти объекты воедино [3, с. 147].

Д. Пойа в работе «Математика и правдоподобные рассуждения» характеризует процесс обобщения как переход от рассмотрения данного множества предметов к рассмотрению большего множества, содержащего данное. Например, ... когда переходим от рассмотрения треугольников к рассмотрению многоугольников с произвольным числом сторон. ... Или когда переходим от изучения тригонометрических функций острого угла к изучению тригонометрических функций произвольного угла. Можно заметить, что в этих двух примерах обобщение осуществляется в двух характерно различных направлениях. В первом примере, в переходе от треугольников к многоугольникам с  $n$  сторонами, постоянная заменяется переменной, фиксированное число 3 произвольным числом  $n$  (ограниченным только неравенством  $n \geq 3$ ). Во втором примере, в переходе от острых углов к произвольным углам  $\alpha$ , отбрасывается ограничение, именно ограничение  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  [5, с. 34]. Такие направления характерны как в целом для процесса обобщения в математике, так и для обобщения некоторых математических задачных ситуаций (например, когда треугольник в ходе решения необходимо «достроить» до определенного многоугольника; или когда в некоторой «недоопределенной» ситуации величина одного из измерений может принимать различные значения).

Р.С. Черкасов применительно к развитию творческого математического мышления учащихся подчеркивает особое значение его интуитивно-образных компонентов, для которых необходимо использовать в процессе обучения математике специально ориентированные задачи, прежде всего задачи на *обобщение*, т.е. на его виды, характерные для преподавания математики (обобщение посредством перехода от конкретных высказываний к предложениям, содержащим переменные; введения новых правил, понятий, операций, законов; анализа смысла некоторых выражений, возникающих в ходе развития науки; перенесения зако-

номерностей, действительных для одной области, на новые предметные области; индукции – от суждений, имеющих частное значение, к общим закономерностям; объединения двух или нескольких закономерностей в одну более общую закономерность) [10]. Для развития указанных видов обобщения автор предлагает использовать специальные группы заданий (планиметрических и стереометрических), включающие задачи различного уровня трудности, которые могут быть использованы не только на уроках математики, но и во внеурочной деятельности по развитию творческого математического мышления и пространственных представлений учащихся. Выделенные автором направления обобщения геометрического материала во многом могут определять и процесс обобщения математической (в большей степени, геометрической) задачи.

В целом можно заметить, что и в психологической, и в педагогической, и в методической трактовках понятия обобщения имеется общефилософское его понимание как процесса, опирающегося на результат определенного абстрагирования от некоторого конкретного содержания. А потому и *под обобщением математической задачи* следует понимать процесс, связанный с абстрагированием от определенных элементов содержания математической ситуации, описанной в ней. В современной методике обучения математике определены и возможные направления этого процесса обобщения (введение переменных; введение новых понятий; перенесение закономерностей, действительных для одной области, на новые предметные области; индукция - от суждений, имеющих частное значение, к общим закономерностям и др.), многие из которых могут быть использованы в качестве основы определения стратегии обобщения математической задачи и последующего построения окрестностей обобщенных задач.

*Статья подготовлена по результатам научных исследований в рамках Федерального задания Минобрнауки России, регистрационный номер 01201458168 «Видовое многообразие задачных конструкций продуктивного обучения математике».*

### Список литературы

1. Возрастная и педагогическая психология / под ред. А.В. Петровского. – М. : Просвещение, 1973. – 288 с.
2. Лернер И.Я. Качества знаний учащихся. Какими они должны быть? – М. : Знание, 1978. – 48 с.
3. Методика и технология обучения математике / под ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М. : Дрофа, 2005. – 416 с.
4. Паламарчук В.Ф. Школа учит мыслить. – М. : Просвещение, 1979. – 144 с.

5. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М. : Наука, 1975. – 464 с.
6. Психологический словарь / под ред. В.П. Зинченко, Б.Г. Мещерякова. – М. : Педагогика-Пресс, 1999. – 440 с.
7. Ситаров В.А. Дидактика. – М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 416 с.
8. Темербекова А.А. Методика преподавания математики. – М. : Владос, 2003. – 176 с.
9. Философский словарь / под ред. И.Т. Фролова. - М. : Политиздат, 1986. - 590 с.
10. Черкасов Р.С. К вопросу о роли обобщений в преподавании геометрии // Математика в школе. – 1996. - № 4. – С. 23-26.

**Рецензенты:**

Фролов И.В., д.п.н., профессор, заведующий кафедрой физики, теории и методики обучения физике Арзамасского филиала ННГУ, г. Арзамас.

Зайкин М.И., д.п.н., профессор, заведующий кафедрой математики, теории и методики обучения математике Арзамасского филиала ННГУ, г. Арзамас.