УДК 51-7

РЕШЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ: ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА

[1]Гарькина И.А., [1]Данилов А.М., [1]Петренко В.О.

[1]ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», Пенза, Россия (440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28), e-mail: fmatem@pguas.ru

В приложении к исследованию пространственного движения управляемого объекта приводятся приближенные методы декомпозиции характеристического полинома. Методы основаны на использовании приближенного характеристического уравнения (рассматривается как основное уравнение; с точными числами). Используется и дополнительная информация, учитывающая степень неопределенности как самого урав нения, так и его решений; сводится к заданию абсолютных погрешностей используемых приближенных чисел. Погрешности чисел, участвующих в вычислениях, учитываются только для определения погрешности корня характеристического полинома при заданной максимальной погрешности округления, допустимой в процессе вычислений. По предложенной методике осуществляется декомпозиция продольного и бокового движений управляемого объекта. Методика рекомендуется для использования при когнитивном анализе и последующем синтезе композиционных материалов как сложных систем.

Ключевые слова: динамическая система, пространственное движение, управляемый объект, декомпозиция, приближенное уравнение, основное уравнение, решение.

SOLUTIONS OF APPROXIMATE EQUATIONS: DECOMPOSITION OF SPATIAL MOVEMENT OF MANAGED OBJECT

[1]Garkina I.A., [1]Danilov A.M.,[1]Petrenko V.O.

[1]Penza state university of architecture and construction (Russia, 440028, Penza, Titov str., 28), e-mail:regas@pguas.ru

In the appendix to the study of spatial motion of the controlled object are given approximate decomposition methods for the characteristic polynomial. The methods are based on the use of the approximate characteristic equation (considered as a basic equation; with the exact numbers). Used and additional information, taking into account the degree of uncertainty of both the equation and its solutions; reduces to the specification of the absolute errors of the approximation numbers. Error numbers involved in the calculations are taken into account only to determine the error of the root of the characteristic polynomial for a given maximum rounding error permitted in the process of computing. The proposed method is carried out decomposition of longitudinal and lateral movements of the controlled object. The technique is recommended for use in cognitive analysis and subsequent synthesis of composite materials such as complex systems.

Keywords: dynamic system, spatial movement, the managed object, decomposition, the approximate equation, the basic equation, the solution.

Прибли жен ное уравнение можно рассматривать как некоторое уравнение (основное) с точными числами (роль которых играют ос новные числа соответствующих приближенных чисел) при наличии некоторой дополнительной информации о степени неопределенности самого урав нения (его решений; сводится к заданию абсолютных погрешностей приближенных чисел).

Решается основное уравнение; участвующие в его записи чис ла в процессе решения считаются точными. Погрешности же этих чисел учитываются только для определения погрешности корня и максимальной погрешности округления, допустимой в процессе вычислений.

Участвующие в записи уравнения приближенные числа варьируются в пределах их погрешностей. Тогда каждый из корней уравнения (с изменяющимися параметрами) описывает некоторое замкнутое множество. Модуль разности между *переменным* корнем, описывающим это множество, и корнем основного уравнения будет изменяться от нуля (когда переменное уравнение совпадет с основным) до некоторого наибольшего значения. Это наибольшее значение модуля разности даст безусловную погрешность. Абсолютная величина разности (между найденным и ближайшим к нему точным решениями основного уравнения) определяют условную погрешность (зависит от вычислителя: он при желании может сделать ее как угодно малой). Сумма безусловной и условной погрешностей корня даст полную погрешность корня.

Если заданное приближение уравнения имеет вид

$$f\left((x, a_1(\pm\Delta a_1),\ a_2(\pm\Delta a_2),\ \cdots,\ a_m(\pm a_m)\right) = 0,$$

то основное уравнение имеет вид

$$f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0;$$

x - неизвестное; $a_1(\pm\Delta a_1),\ a_2(\pm\Delta a_2),\ \cdots,\ a_m(\pm a_m)$ - заданные приближенные числа.

В окрестности каждого однократного корня x_0 определяет x как неявную функцию от $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Справедливо

$$dx = -\frac{1}{f'_{x_0}}\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}da_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2}da_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_m}da_m\right).$$

Если погрешности $\Delta a_1, \Delta a_2, \ldots, \Delta a_m$ достаточно малы, то это соотношение можно использовать для определения безусловной погрешности корня x_0:

$$\frac{1}{|f'(x_0)|}\left(|f'(a_1)|\Delta a_1 + |f'(a_2)|\Delta a_2 + \cdots + |f'(a_m)|\Delta a_m\right).$$

В частности, для алгебраического уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

получаем:

$$\frac{1}{|f'(x_0)|}\left(|x_0|^n \Delta a_0 + |x_0|^{n-1}\Delta a_1 + \ldots + \Delta a_m\right).$$

Если все коэффициенты заданы с одинаковой абсолютной погрешностью ε, то

$$\frac{(1-|x_0|)^{n+1}}{(1-|x_0|)\cdot|f'(x_0)|}\varepsilon \; .$$

Как уже отмечалось, решение приближенного уравнения сводится к приближенному решению основного уравнения. После того как ориентировочно найдена величина одного из корней, вычисляется безусловная погрешность этого корня. Ориентируясь на требуемую величину условной погрешности результата, можно определить точность, с которой следует вести вычисления. Потерей точности будет отношение условной абсолютной погрешности к абсолютной погрешности округления, если вычис ле ния ведутся с одинаковым порядком последней значащей цифры, и от но шение соответствующих относительных погрешностей, если вы чис ления ведутся с постоянным числом значащих цифр. После определения корня для контроля вычисляется условная погрешность (до бесконечно малых второго по рядка для однократного корня $\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|$).

Отметим, определение условной погрешности корня x_0 , не пре во с ходящей его безусловной погрешности, может быть произведена и без вычисления самих погрешностей по формуле

$$|f(x_0)| \le |f'(a_1)|\Delta a_1 + |f'(a_2)|\Delta a_2 + \cdots + |f'(a_m)|\Delta a_m.$$

В частности, для алгебраического уравнения, коэффициенты ко то рого заданы с одинаковой погрешностью ε, справедливо

$$|P(x_0)| \le \frac{1-|x_0|^{n+1}}{1-|x_0|}\varepsilon.$$

Например, для квадратного уравнения

$$P(x_0) = 1{,}2741x^2 - 12{,}362x + 0{,}72483 = 0$$

или

$$x^2 - 9{,}70x + 0{,}568 = 0$$

(приближенное деление коэффициентов уравнения на 1,274) получим

$x_1 = 9{,}64;\ x_2 = 0{,}059$.

Безусловные погрешности корней:

$$x_1 = \frac{1}{1{,}21}\left(9{,}64^2 \cdot 0{,}0001 + 9{,}64 \cdot 0{,}001 + 0{,}00001\right) = 0{,}00156,$$

$$x_2 = \frac{1}{0{,}58}\left(0{,}059^2 \cdot 0{,}0001 + 0{,}059 \cdot 0{,}001 + 0{,}00001\right) = 0{,}000069.$$

Чтобы условная погрешность не пре вос хо дила безусловной, x_1 следует вычислить с точ нос тью до тысячных, а x_2 – до стотысячных;

$$x_{1,2} = \frac{6{,}18100 \pm \sqrt{6{,}18100^2 - 1{,}27410 \cdot 0{,}72483}}{1{,}27410}.$$

Так как здесь определяются одновременно оба корня, то вы чис ления следует вести с таким расчетом, чтобы результат получился с пя тью верными знаками после запятой. С этой целью добавляются дополнительные значащие цифры 00 в числе 12,362 и цифра 0 – в числе 1,2741. Потеря точности в дан ном случае невелика (так как производятся всего четыре округ ле ния), так что в промежуточных операциях достаточно сохранить пять десятичных знаков:

$$x_{1,2} = \frac{6{,}18100 \pm 6{,}10584}{1{,}27410},\ x_1 = 9{,}644, x_2 = 0{,}05899.$$

Отметим, что вычисления, произведенные без запасных зна ча щих цифр, дали бы неверное значение $x_2 = 0{,}05887$. Это под тверж дает правильность сделанного ранее замечания о том, что погреш ности заданных чисел следует учитывать лишь при определении безусловной погрешности корня. После этого при решении урав не ния заданные числа нужно считать точными (то есть решить основ ное уравнение). Погрешностями участвующих в вычислениях чисел считаются только погрешности округления.

Для иллюстрации рассмотрим декомпозицию динамической системы [3; 5-7], характеристики которого приняты в соответствии с таблицей 2.1 [10] для случая M=0,9; H=12 км.

Продольное движение. Характеристический многочлен системы имеет вид

$$x^4 + 1{,}88x^3 + 8{,}53x^2 + 3{,}68x + 3{,}6\ .$$

Заменой переменной $z = x + 0{,}47$ получим многочлен

$$z^4 + 7{,}22z^2 - 3{,}507z + 3{,}604;$$

$$(p = 7{,}22;\ q = 3{,}507;\ z = 3{,}604;\ p_r = \frac{p}{\sqrt{r}} = 3{,}8;\ q_r = \frac{q^2}{r\sqrt{r}} = 1{,}8).$$

Действительных корней у многочлена нет. В соответствии с [10] при приближенных вычислениях $g_1(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha},\ g_2(\alpha) = 3{,}8 + 1{,}8\left(\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\right)$ воспользуемся таблицей значений функций

α	$g_1(\alpha)$	$g_2(\alpha)$
0	-	3,8
0,2	5,2	3,88
0,3	3,63	4,01
0,27	3,97	3,95

Таким образом, без построения графиков $g_1(\alpha)$ и $g_2(\alpha)$ с точностью до 0,002 можно принять $\alpha_0 = 0{,}275$;

$$\gamma_0 = \alpha_0\sqrt{r} = 0{,}275\sqrt{3{,}604} = 0{,}5225;$$

$$b_0 = \frac{q\gamma_0}{\left(r - \gamma_0^2\right)} = \frac{3{,}507 \cdot 0{,}5225}{3{,}604 - 0{,}5225^2} = -0{,}535.$$

Откуда

$$z^4+7{,}22z^2-3{,}507z+3{,}604=\left(z^2-0{,}535z+0{,}5225\right)\left(z^2+0{,}535z+6{,}917\right),$$
$$z_{1,2}=0{,}267\pm\sqrt{0{,}0713-0{,}5225}=0{,}267\pm0{,}67j\,,$$
$$z_{3,4}=-0{,}267\pm\sqrt{0{,}0713-6{,}917}=-0{,}267\pm2{,}62j\,,$$
$$x_{1,2}=z_{1,2}-0{,}47=-0{,}203\pm0{,}67j\,,$$
$$x_{3,4}=z_{3,4}-0{,}47=-0{,}737\pm2{,}62j.$$

Боковое движение. Вычислив коэффициенты характеристического многочлена по таблице 2.2 [10], получим

$$x^4+1{,}48x^3-6{,}46x^2-7{,}7x+0{,}087$$

или

$$z^4-7{,}26z^2-2{,}56z+2{,}04\,,\qquad z=x+0{,}37,\qquad \left(z=x+\frac{a_3}{4}\right).$$

Построив графики функций $y=2{,}56z,\ y=z^4-7{,}26z^2+2{,}04$, убеждаемся, что все корни многочлена действительные (рис. 1).

$$z_1=-2{,}41,\qquad z_2=-0{,}781,\qquad z_3=0{,}381,\qquad z_4=2{,}81.$$

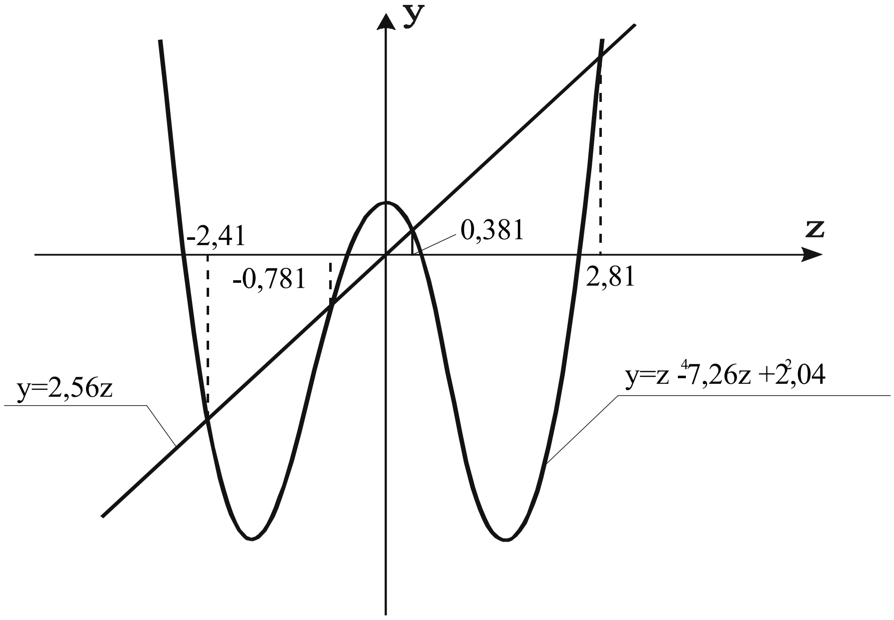

Рис. 1. К декомпозиции бокового движения.

Соответственно

$$x_1=-2{,}78,\qquad x_2=-1{,}151,\qquad x_3=0{,}011,\qquad x_4=2{,}44.$$

В уравнении

$$AS_1(\alpha)=B+S_2(\alpha)$$

имеем:

$$A=\frac{r\sqrt{r}}{q_r}=0{,}445\,,\qquad B=\frac{pr}{q_r}=-2{,}26.$$

Пользуясь таблицей значений $S_1(\alpha)$ и $S_2(\alpha)$, находим решение уравнения $\alpha=0{,}76$, соответственно $\gamma=1{,}088$, $b=-3{,}26$.

Декомпозиция полинома представится в виде

$$z^4 - 7{,}26z^2 - 2{,}56z + 2{,}04 = \left(z^2 - 3{,}26z + 1{,}088\right)\left(z^2 + 3{,}26z + 1{,}875\right).$$

С точностью до 10^{-2} получатся те же корни z_i и соответственно x_i.

Рассмотренный подход успешно использовался и при идентификации параметров кинетических процессов формирования физико-механических характеристик полидисперсных материалов [2; 4; 8; 9].

Список литературы

1.Баженов Ю.М., Гарькина И.А., Данилов А.М., Королев Е.В. Системный анализ в строительном материаловедении : монография. – М. : МГСУ: Библиотека научных разработок и проектов, 2012. – 432 с.

2.Будылина Е.А., Гарькина И.А., Данилов А.М. Моделирование с позиций управления в технических системах // Региональная архитектура и строительство. – 2012. – № 2. – С. 138.

3.Будылина Е.А., Гарькина И.А., Данилов А.М. Приближенные методы декомпозиции при настройке имитаторов динамических систем // Региональная архитектура и строительство. – 2013. – № 3. – С. 150-156.

4.Гарькина И.А., Данилов А.М. Опыт разработки композиционных материалов: некоторые аспекты математического моделирования // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2013. – № 8 (656). – С. 28-33.

5.Гарькина И.А., Данилов А.М., Домке Э.Р. Математическое моделирование управляющих воздействий оператора в эргатической системе // Вестник Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ). – 2011. – № 2. – С. 18-23.

6.Гарькина И.А., Данилов А.М., Домке Э.Р. Промышленные приложения системных методологий, теорий идентификации и управления // Вестник Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ). – 2009. – № 2. – С. 77-81.

7.Гарькина И.А., Данилов А.М., Пылайкин С.А. Тренажеры и имитаторы транспортных систем: выбор параметров вычислений, оценка качества // Мир транспорта и технологических машин. – 2013. – № 3 (42). – С. 115-120.

8.Данилов А.М., Гарькина И.А. Математическое моделирование сложных систем: состояние, перспективы, пример реализации // Вестник гражданских инженеров. – 2012. – № 2. – С. 333-337.

9.Данилов А.М., Гарькина И.А., Королева О.В., Смирнов В.А. Математические методы при разработке и управлении качеством материалов специального назначения // Строительные

материалы. – 2010. – № 3. – С. 112-117.
10.Красовский А.А., Вавилов Ю.А., Сучков А.И. Системы автоматического управления летательных аппаратов. - М. : ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1986. – 479 с.

Рецензенты:

Кошев А.Н., д.т.н., профессор, профессор кафедры «Информационно-вычислительные системы», ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», г. Пенза.

Логанина В.И., д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Управление качеством и технологии строительного производства», ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», г. Пенза.