

## **ПРАКТИКА ПРИМЕНЕНИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА В ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ "ОСНОВЫ ВИБРОДИАГНОСТИКИ КОНСТРУКЦИЙ И МАШИН"**

**Дербасов А.Н.**

*ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»,  
a.n.derbasov@mail.ru*

Определение диагностических признаков возникновения и развития трещины в конструкции является одной из основных задач вибродиагностики. Экспериментальное определение вибродиагностических признаков связано с большими материальными затратами. Для их определения в настоящее время используются расчетные методы. В статье в рамках учебного процесса на примере балки-стенки предлагается и показывается возможность применения Gap-элементов при конечно-элементном описании задач вибродиагностики для отражения в динамическом процессе "дыхания" трещины. При прохождении гармонического сигнала через линейный элемент, коим является упругая конструкция не имеющая трещину, сигнал (отклик) должен оставаться неизменным по форме, приобретая лишь другую амплитуду и начальную фазу. Это утверждение хорошо подтверждается при воздействии на линейную КЭ-модель упругой балки-стенки при отсутствии трещины одной и двух гармонических сил при различных сочетаниях частот. Для создания нелинейной КЭ-модели применяются Gap-элементы, расположенные в районе трещины. При прохождении гармонического сигнала через нелинейный элемент, коим является упругая конструкция, имеющая трещину, в спектре сигнала (отклика) должны появиться комбинационные частоты. Это утверждение также хорошо подтверждается при воздействии на нелинейную КЭ-модель одной и двух гармонических сил. По результатам численного эксперимента построены графики некоторых вибропараметров в зависимости от длины трещины, что позволит использовать их при мониторинге конструкций в процессе их эксплуатации.

Ключевые слова: конечно-элементный анализ, трещина, Gap-элемент, колебания, нелинейный анализ, спектр, комбинационные частоты, диагностические признаки.

## **PRACTICAL APPLICATION OF FINITE ELEMENT ANALYSIS IN THE TEACHING DISCIPLINE "FUNDAMENTALS OF VIBRATION OF STRUCTURES AND MACHINES"**

**Derbasov A.N.**

*Nizhny Novgorod state technical University n.a. R.E. Alekseev, a.n.derbasov@mail.ru*

Definition of diagnostic features of occurrence and development of cracks in structures is one of the main tasks of vibration. Experimental determination of vibrodiagnostics characteristics associated with high material costs. For their definitions currently used calculation methods. In an article in the framework of the educational process on the example of a beam-wall is proposed and shown the possibility of using Gap-elements in finite element description of tasks vibrodiagnostics to reflect the dynamic process of "breathing" of the crack. With the passage of the harmonic signal via the line element, which is of elastic design does not have a crack, signal (response) should remain unchanged in shape, getting only a different amplitude and initial phase. This assertion is well supported when subjected to linear FE-model of elastic beam-wall in the absence of cracks of one and two harmonic forces at different combinations of frequencies. To create a nonlinear FE-model used Gap-elements located in the region of the crack. With the passage of the harmonic signal through a nonlinear element, which is of elastic design, with a crack in the spectrum of the signal (response) should receive the frequency combination. This statement is also proved when subjected to nonlinear FE-model one and two harmonic forces. According to the results of the numerical experiment graphs of some vibro parameters depending on the crack length, which will allow their use in the monitoring of structures during their operation.

Keywords: finite element analysis, crack, Gap-element, vibrations, nonlinear analysis, the spectrum, the frequency combination, diagnostic signs.

Одной из основных задач вибродиагностики конструкций и машин является разработка диагностических признаков, характеризующих различные неисправности машин или повреждения конструкций. Экспериментальное определение диагностических признаков связано с большими материальными затратами в силу многообразия как конструкций, так и неисправностей или повреждений. Поэтому большое практическое значение приобретает

численное, конечно-элементное исследование динамического поведения конструкций.

В работе [2] приводится обзор работ, посвященных разработке методов и средств вибродиагностики трещин в виде разреза при ее динамическом нагружении. Предлагается кусочно-линейная модель трещины, использующая понятие эквивалентного шарнира.

В рассматриваемой ниже статье в рамках учебного процесса предлагается и исследуется возможность применения Гар-элементов при конечно-элементном анализе в задачах вибродиагностики конструкций с целью обнаружения возникновения и развития в них трещин. При этом конфигурация трещины может быть любой.

Применение Гар-элементов при динамическом нагружении отмечено только в работе [6], где показано, что использование нелинейного Гар-элемента в качестве модели демпфера сухого трения позволяет достаточно точно оценивать эффективность действия демпферных вставок.

При изложении курса "Основы вибродиагностики конструкций и машин" практические занятия и расчетно-графические работы основаны на построении конечно-элементной модели (КЭ-модели) для определения диагностических признаков в виброакустическом сигнале при появлении трещины в конструкции. В качестве объекта выбрана балка-стенка, позволяющая на всех этапах динамического анализа вести тестирование, сравнивая полученные результаты с аналитическими решениями там, где это возможно. Балка-стенка выполнена в виде прямоугольной стальной пластины с размерами  $1 \times 0,1 \times 0,01$  м.

Для оценки достоверности получаемых результатов расчеты выполняются в виде задач-тестов [4], в процессе решения которых студенты осваивают методику динамического анализа. Расчеты выполняются в конечно-элементном пакете, позволяющем производить динамический нелинейный анализ и имеющего элементы спектрального анализа, являющегося теоретической основой вибродиагностики [5]. Каждому студенту выдается индивидуальное задание. Далее рассматривается один из возможных вариантов задания.

В математическом плане поведение упругой конструкции при отсутствии в ней трещин при динамическом нагружении описывается матричным дифференциальным уравнением

$$[M]\{\ddot{W}\} + [D]\{\dot{W}\} + [K]\{W\} = \{P_{(t)}\}, \quad (1)$$

где  $[M]$ ,  $[D]$ ,  $[K]$  - матрицы масс, демпфирования и жесткости соответственно;  $\{W_{(t)}\}$  - вектор узловых перемещений;  $\{P_{(t)}\}$  - вектор узловой нагрузки.

При проведении натурального эксперимента и отцифровки аналогового сигнала с помощью аналого-цифрового преобразователя (АЦП) получается файл дискретных

вибропараметров (перемещений, скоростей, ускорений в зависимости от типа вибродатчика).

При численном решении уравнения (1) получаются вибропараметры на каждом временном шаге интегрирования. Поэтому шаг интегрирования уравнения (1) должен выбираться из того же условия, что и шаг дискретизации АЦП в натурном эксперименте. Таким образом, при возможном сопоставлении результатов натурального эксперимента с результатами численного расчета необходимо, чтобы шаг дискретизации АЦП в натурном эксперименте равнялся временному шагу при решении уравнения (1).

При проведении как натурального, так и численного эксперимента получаем функцию вибропараметров с ограниченным спектром, поэтому для выбора шага интегрирования уравнения (1) необходимо воспользоваться теоремой Котельникова В.А., которая в формулировке ее автора гласит, что "любую функцию  $f(t)$ , состоящую из частот от 0 до  $f_c$ , можно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом через  $1/2f_c$  секунд" [7]. Таким образом, чтобы аналоговый сигнал с вибродатчика мог быть отцифрован, а затем восстановлен, необходимо и достаточно, чтобы частота дискретизации была больше или равна удвоенной частоте  $f_c$  аналогового сигнала. Поэтому временной шаг численного решения уравнения (1) должен быть равным не более чем  $1/2f_c$ .

Принимая заданный студентам диапазон частот от 0 до  $\omega_c = 5000 \text{ рад/сек}$  ( $f_c = 795,775$  Гц), получаем, что шаг интегрирования по времени не должен быть более чем  $\Delta t = 0,628 \cdot 10^{-3}$  сек. При задании диапазона частот учитывалось, что первая частота свободных колебаний линейной конечно-элементной модели (КЭ-модели), представленной на рисунках 1-4, равна  $2265 \text{ рад/сек}$ .

В одной из задач задания студентам требуется определить амплитуду и спектр виброперемещений наблюдаемого узла (где предполагается установка вибродатчика в натурном эксперименте), если прикладываемая нагрузка вызвана мини-электродвигателем с редуктором, число оборотов которого  $n=3000$  об/мин. В редукторе имеется два балансира массой 50 гр. каждый и с эксцентриситетом 40 мм. Массой электродвигателя и редуктора пренебречь. В результате на балку-стенку будет действовать гармонически изменяющаяся во времени сосредоточенная сила с амплитудой 394 Н и круговой частотой  $\omega=314$  рад/сек.

Упругая конструкция при отсутствии в ней повреждений является линейной. При прохождении гармонического сигнала через линейный элемент, коим является упругая конструкция, сигнал (отклик) должен оставаться неизменным по форме, приобретая лишь другую амплитуду и начальную фазу [7]. Динамическое поведение линейной КЭ-модели в этом случае описывается линейным матричным дифференциальным уравнением

$$[M]\{\ddot{W}\} + [D]\{\dot{W}\} + [K]\{W\} = \{P\}\sin \omega t \quad (2)$$

На рис. 1 приведен отклик 21-го узла и его амплитудный спектр виброперемещений при воздействии гармонической силой  $P(t) = 394\sin(314t)$  на КЭ-модель, что подтверждает правильность конечно-элементного моделирования.

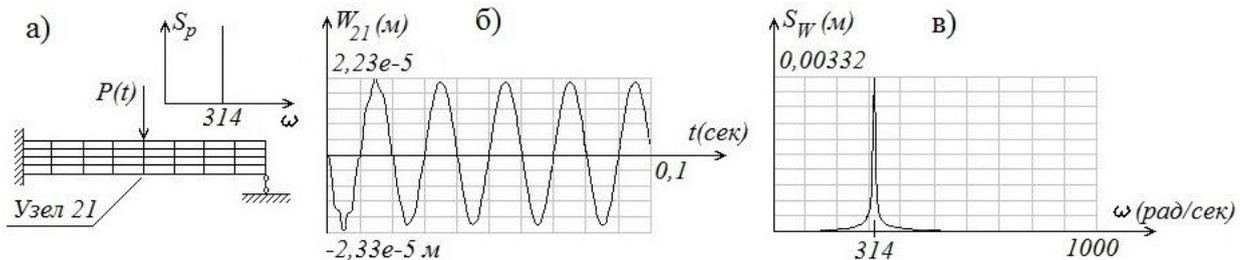


Рис. 1. Прохождение гармонического сигнала через линейную КЭ-модель: а – нагружение КЭ-модели и спектр приложенной силы; б – виброперемещения 21-го узла; в – амплитудный спектр виброперемещений 21-го узла

При воздействии на линейную КЭ-модель двух гармонических сигналов  $P(t) = 394\sin(314t) + 394\sin(200t)$  результат их воздействия показан на рис. 2.

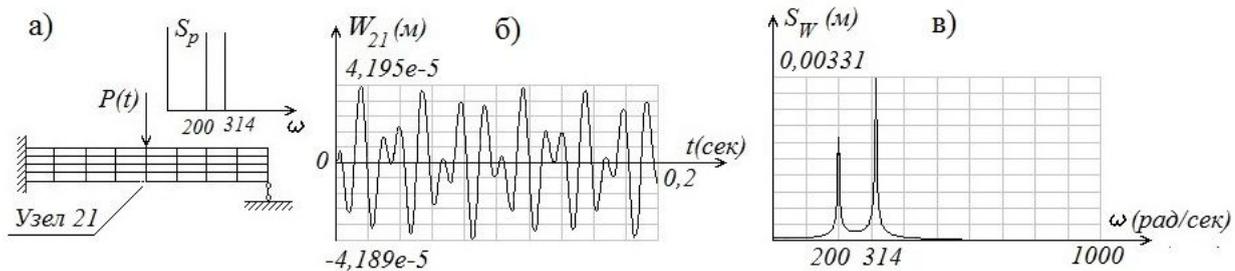


Рис. 2. Прохождение двух гармонических сигналов через линейную КЭ-модель: а – нагружение КЭ-модели и спектр приложенной силы; б – виброперемещения 21-го узла; в – амплитудный спектр виброперемещений 21-го узла

При приложении двух гармонических колебаний с близкими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , удовлетворяющими условию  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$ , и  $P(t) = A_1\sin\omega_1 + A_2\sin\omega_2$  должны наблюдаться биения [5]. На рис. 3 показаны результаты линейного КЭ-моделирования, подтверждающие справедливость этого утверждения. При этом принималось, что  $A_1=A_2=394$  Н,  $\omega_1=100$  рад/сек и  $\omega_2=125$  рад/сек. Теоретический подсчет периода биений по формуле

$$T_{\text{биений}} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = 0,251 \text{ сек}$$

совпадает с численным экспериментом, результаты которого приведены на рис.3.

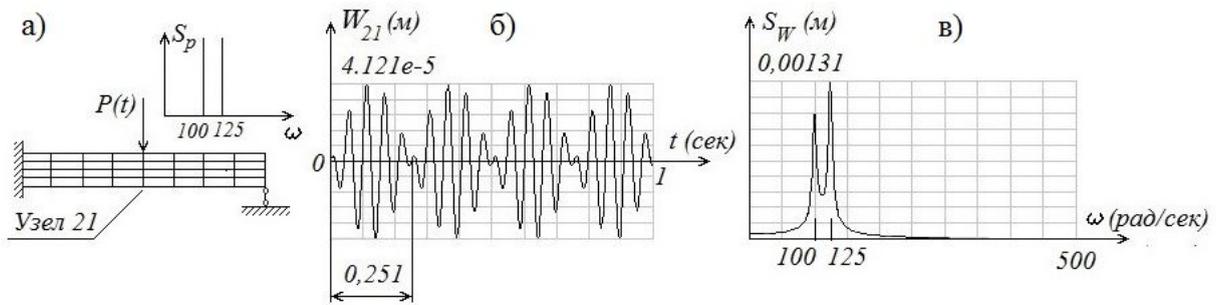


Рис. 3. Прохождение близких по частоте двух гармонических сигналов через линейную КЭ-модель: а – нагружение КЭ-модели и спектр приложенной силы; б – виброперемещения 21-го узла; в – амплитудный спектр виброперемещений 21-го узла

При аддитивном взаимодействии низкочастотного и высокочастотного гармонического сигнала, временная реализация отклика и его спектра представлена на рис. 4. При этом принималось, что  $A_1=A_2=394$  Н,  $\omega_1=150$  рад/сек и  $\omega_2=14$  рад/сек.

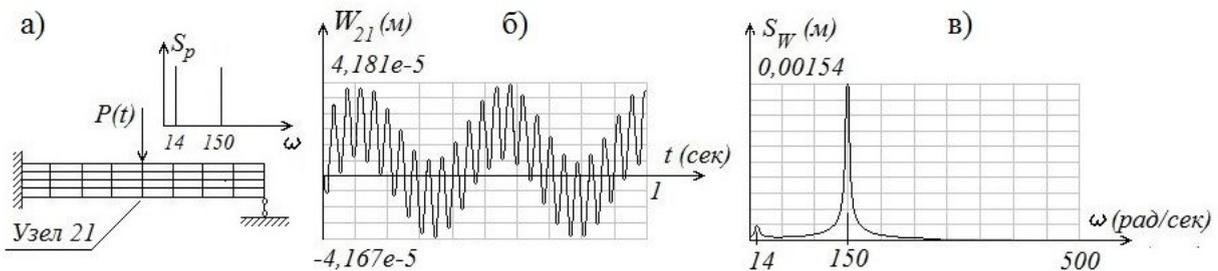


Рис. 4. Прохождение низкочастотного и высокочастотного гармонических сигналов через линейную КЭ-модель: а – нагружение КЭ-модели и спектр приложенной силы; б – вибро-перемещения 21-го узла; в – амплитудный спектр виброперемещений 21-го узла

При появлении трещины конструкция становится нелинейной в силу "дыхания" трещины: при деформации конструкции в направлении закрытия трещины жесткость конструкции равна бездефектному состоянию, при деформации конструкции в направлении раскрытия трещины жесткость мгновенно уменьшается и ее величина зависит от глубины трещины (рис.6). В этом случае динамическое поведение КЭ-модели описывается нелинейным матричным уравнением

$$[M]\{\ddot{W}\} + [D]\{\dot{W}\} + [K(W)]\{W\} = \{P\}\sin \omega t \quad (3)$$

в котором матрица жесткости является функцией от перемещений узлов КЭ-модели и, следовательно, зависит от времени. "Отслеживать" закрытие и открытие трещины в процессе динамического процесса деформирования КЭ-модели позволяют двухузловые Гар-элементы, работающие на сжатие.

На рис. 5 показан пример конструирования трещины длиной  $l=(3/4)h$  при использовании Гар-элементов, т. е. количество Гар-элементов в КЭ-модели зависит от глубины трещины. Поэтому при каждой длине трещины приходится создавать свою КЭ-модель.

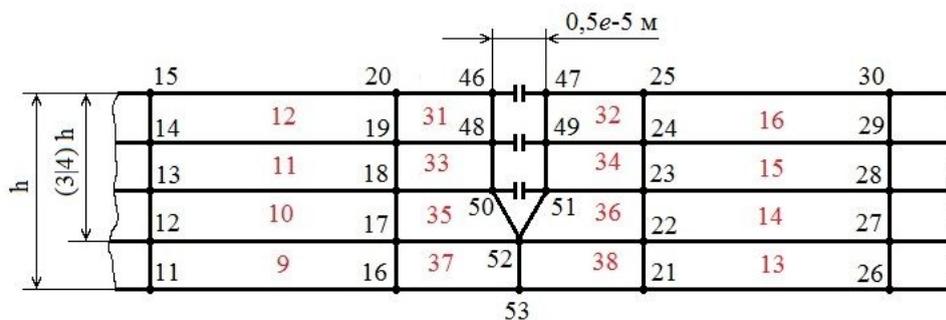


Рис. 5. Моделирование трещины из Гар-элементов

Из теории спектров известно [7], что, если некоторое периодическое колебание  $P(t)$  подвергнуть нелинейной операции (такую нелинейную операцию в натурном эксперименте выполняет упругая конструкция, имеющая трещину), то полученное в результате этой операции колебание будет обладать спектром, отличным от спектра  $P(t)$  и, как правило, более богатым. Так, например, если первоначальное колебание представляет собой сумму двух синусоид

$$P(t) = c_1 \sin \omega_1 t + c_2 \sin \omega_2 t \quad (4)$$

и, следовательно, имеет спектр, состоящий из двух спектральных линий, то после нелинейной операции получим в составе колебания спектральные составляющие с частотами

$$\omega_{mn} = m\omega_1 \pm n\omega_2, \quad (5)$$

где  $m$  и  $n$  – в общем случае любые положительные числа. Такого рода спектр носит название комбинационного.

Таким изменением спектра в радиотехнике пользуются для измерения степени отклонения данной системы от линейности. На вход системы подается колебание  $P(t)$ ; изучается спектр получаемого на выходе колебания  $W(t)$ . Комбинационные частоты  $\omega_{mn}$  не возникают в том единственном случае, когда система линейна.

На основании этого можно утверждать, что при динамическом нагружении КЭ-модели балки-стенки, имеющей трещину, гармонически изменяющейся во времени силой, на спектре должны появиться комбинационные частоты, кратные частоте вынужденных колебаний.

На рис. 6 приводятся примеры численного моделирования динамического процесса балки-стенки при различной длине трещины, при нагружении одной гармонической силой  $P(t) = 394 \sin(314t)$ , приложенной в 25 узле. При этом число учитываемых собственных частот и форм колебаний принималось равным 5. Шаг интегрирования принимался равным  $0,5e-4$  сек, так как при большем шаге не хватало итераций (ограничение равно 200). Наблюдение велось на интервале от 0 до 0,5 сек (10000 шагов). Частотный диапазон при расчете спектра виброперемещений 21-го узла принимался равным от 1 до 5000 рад/сек. При

этом можно определять как вибропараметры КЭ-модели, так и виброусилия, возникающие на Гар-элементах, что позволяет рассчитать напряженно-деформированное состояние в районе трещины в процессе динамического деформирования конструкции.

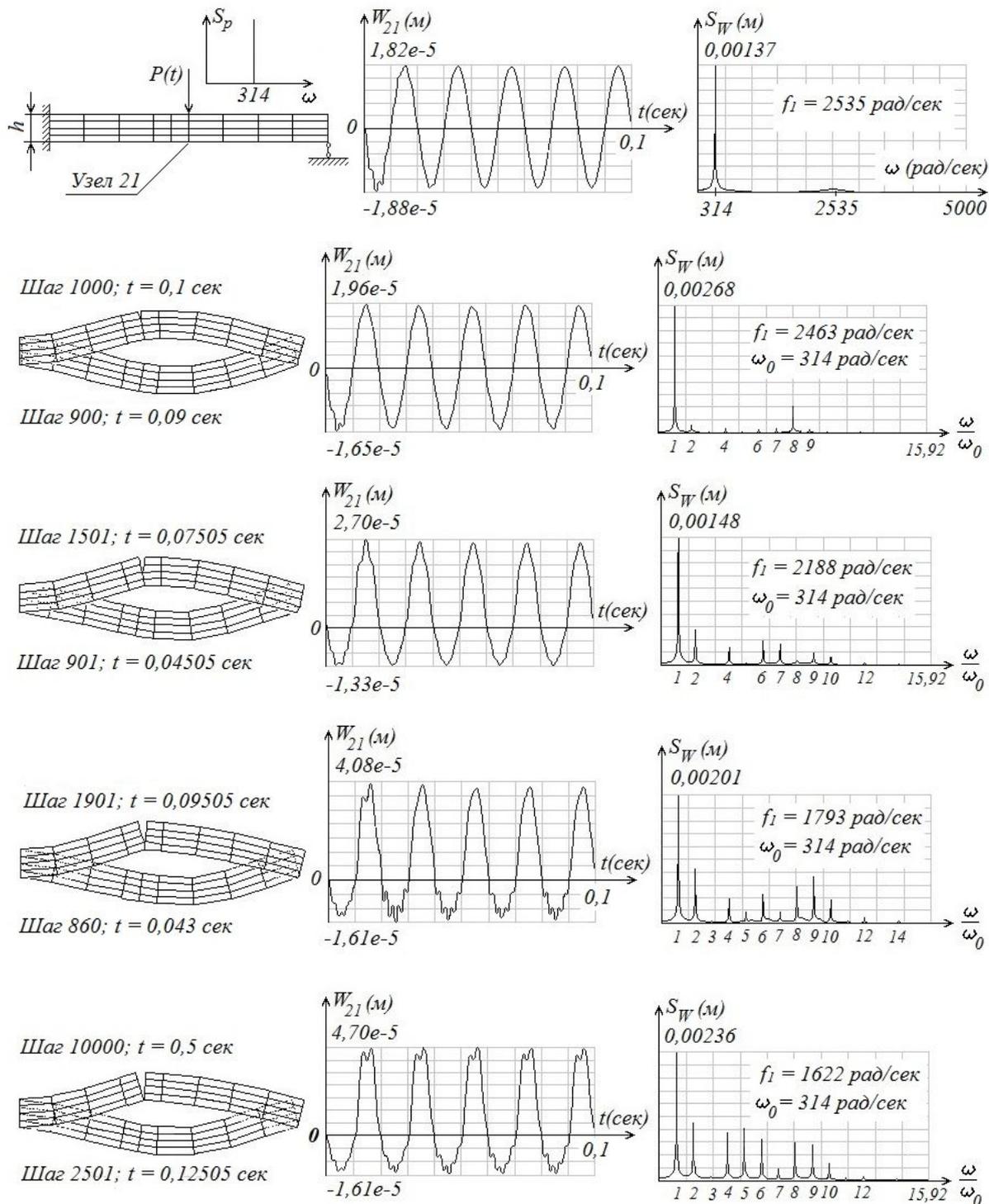


Рис. 6. Прохождение гармонического сигнала через КЭ-модели, имеющих трещину различной длины

На рис. 6 видно, как изменяется отклик 21-го узла КЭ-модели и его спектр в зависимости от длины трещины. На этом рисунке слева показаны деформированные состояния на различных временных шагах и при различной длине, которые показывают, что

при движении балки-стенки вверх трещина раскрывается, а при движении вниз трещина закрывается и берега трещины не "наползают" друг на друга, что объясняется работой Гар-элементов. В особенности это хорошо наблюдается студентами при анимации динамического деформирования балки-стенки.

Решение нелинейного матричного уравнения (3) приводит к появлению в отклике гармоник, кратных основной частоте, амплитуды которых возрастают по мере увеличения длины трещины, что подтверждает правильность высказанного выше утверждения. На рис. 6 из спектров, приведенных справа, видно, как появляются гармоники, кратные основной частоте, в момент зарождения трещины, и амплитуды этих гармоник растут с ростом длины трещины.

В средней части рис. 6 показаны фрагменты виброперемещений 21-го узла, из сравнения которых видно, как изменяется колебание рассматриваемого узла в зависимости от длины трещины. При движении КЭ-модели на закрытие трещины на полупериодах колебаний на основной частоте наблюдаются колебания на собственной частоте, возникающие в результате соударения берегов трещины, которые быстро затухают. При движении КЭ-модели на раскрытие трещины на полупериодах колебаний на основной частоте собственные колебания отсутствуют, что подтверждает правильность моделирования физического процесса. На спектрах это явление отражается в виде "всплеска" на гармониках в области собственной частоты.

На рис. 7 по результатам проведенного численного эксперимента построены графики изменения амплитуд основной и четных гармоник, а также первой собственной частоты в зависимости от длины трещины.

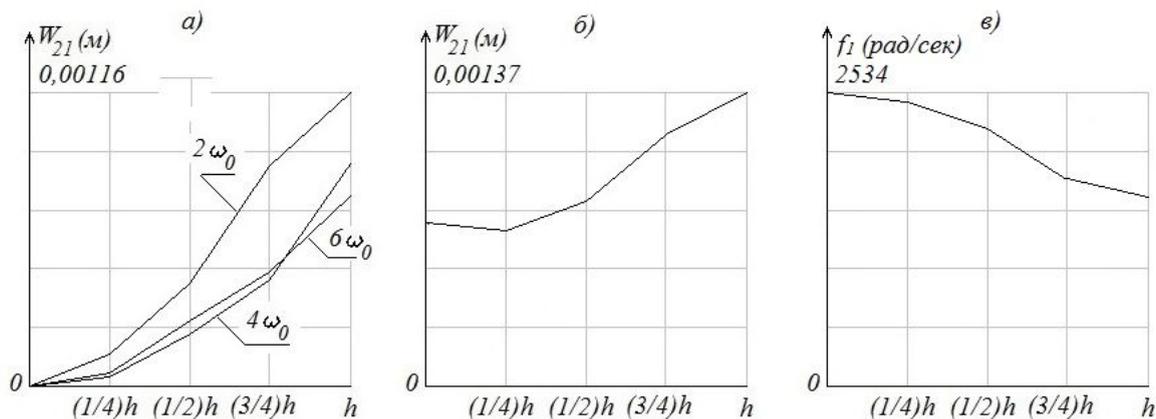


Рис. 7. Изменение основных характеристик вибрационного процесса в зависимости от глубины трещины: а – амплитуд колебаний на четных гармониках; б – амплитуд колебаний на основной частоте; в – первой собственной частоты КЭ-модели.

Особый интерес представляет бигармоническое воздействие на КЭ-модель. В работе [5] рассматривается бигармоническое воздействие на нелинейный элемент с квадратичной характеристикой, где показывается, что помимо высших гармоник возникают также

комбинационные частоты, причем порядок комбинационных частот  $N$  равен двум. В работе[1] отмечается важная закономерность: "слагаемые со степенью  $N$  в характеристике нелинейного элемента обуславливают появление комбинационных составляющих с предельным порядком, равным степени этого слагаемого".

В нашем случае таким нелинейным элементом, преобразующим спектр входного сигнала, является КЭ-модель, имеющая трещину, но степень характеристики этого нелинейного элемента неизвестна. Причем нелинейность КЭ-модели зависит от длины трещины, что является очевидным фактом. Имеется возможность построить степенную характеристику нелинейного элемента (нелинейной КЭ-модели) по результатам численного расчета.

Рис. 8 демонстрирует, как изменяется спектр при бигармоническом воздействии  $P(t) = 394\text{Sin}(314t) + 394\text{Sin}(200t)$  на нелинейную КЭ-модель в зависимости от длины трещины. Анализ этих спектров показывает, что в сложном колебательном процессе присутствуют комбинационные частоты первого порядка ( $\omega_1, \omega_2$ ), второго порядка ( $2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1+\omega_2, \omega_1-\omega_2$ ), третьего порядка ( $3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1+\omega_2, 2\omega_1-\omega_2, 2\omega_2+\omega_1, 2\omega_2-\omega_1$ ) и более высоких порядков. Наличие комбинационных компонент говорит о том, что в нелинейной КЭ-модели происходит взаимодействие колебаний, соответствующих отдельным компонентам входного воздействия. На рис. 8 также видно (в особенности при длине трещины  $l$ , близкой к высоте сечения), что наиболее представительными параметрами возникновения и развития трещины являются амплитуды на комбинационных частотах, кратных сумме основных частот.

Фрагменты колебательных процессов 21-го узла показаны на рис. 9,а в зависимости от длины трещины  $l$ . На рис. 9,б представлены графики изменения амплитуд на основных и комбинационных частотах, кратных сумме основных, также в зависимости от длины трещины.

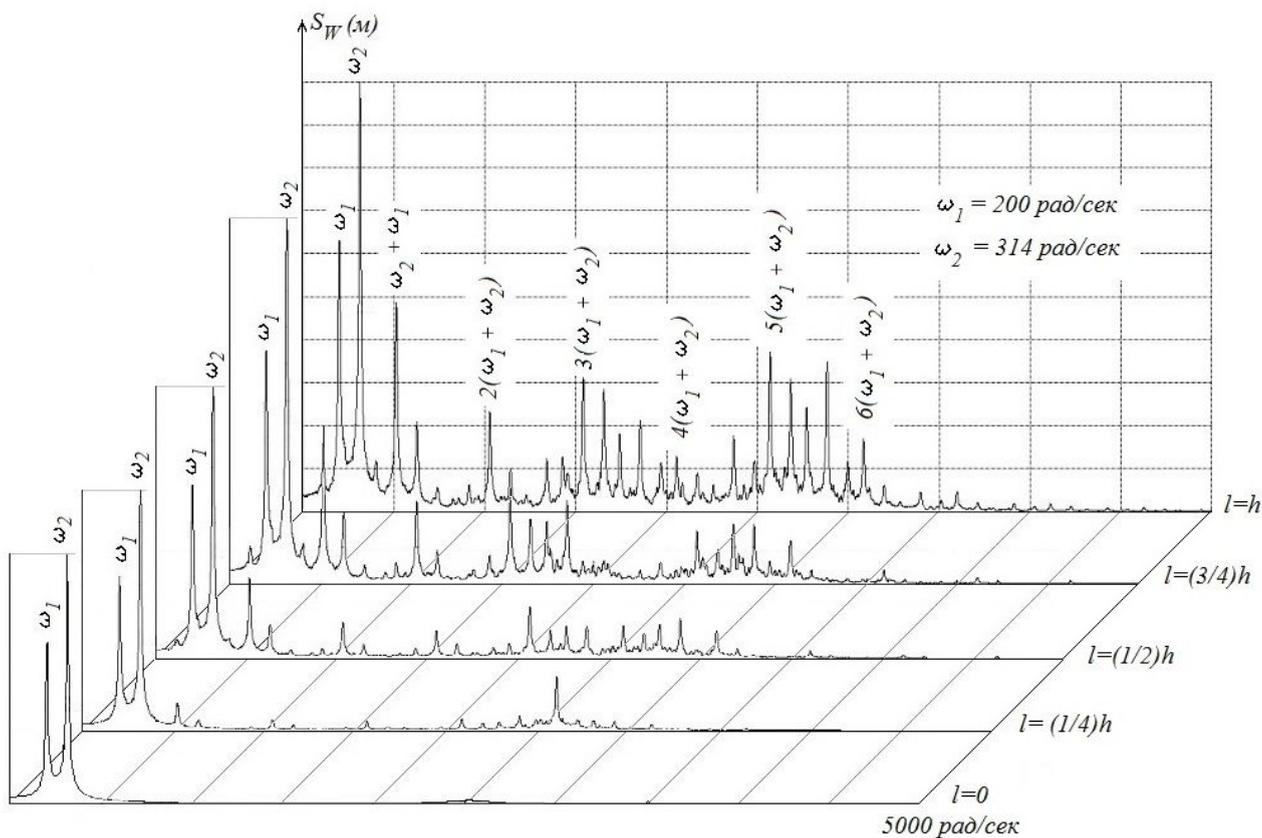


Рис. 8. Изменение спектра виброперемещений 21-го узла при увеличении длины трещины  $l$

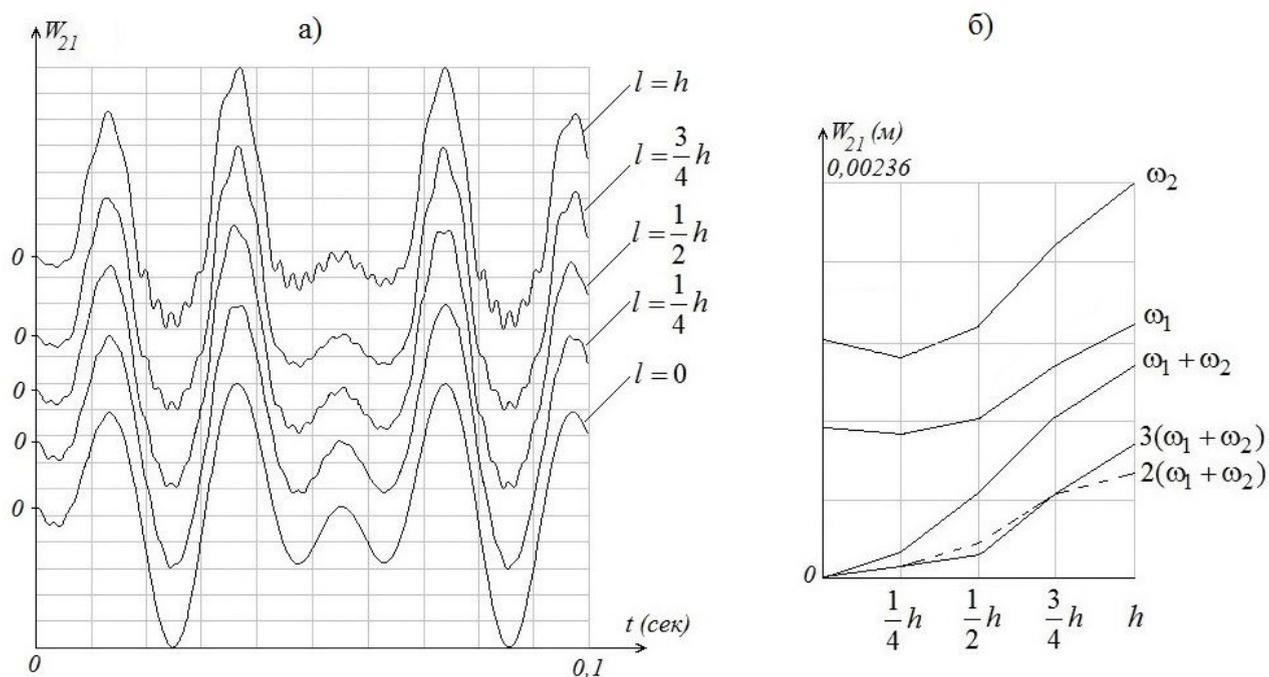


Рис. 9. Изменение в зависимости от глубины трещины: а – виброперемещений 21-го узла; б – амплитуд колебаний на основных и комбинационных частотах

Полученные в результате численного эксперимента вибропараметры позволяют судить о возникновении и глубине дефекта в виде трещины при проведении мониторинга конструкции в процессе ее эксплуатации.

Таким образом, в процессе динамического анализа студенты отрабатывают методику численного определения двух диагностических признаков:

- наличия трещины (появление в спектре комбинационных частот на частотах возмущения);
- длины трещины (по высоте пиков в спектре на комбинационных частотах).

Ценность конечно-элементного подхода в преподавании дисциплины "Основы вибродиагностики конструкций и машин" состоит в следующем:

- осуществляется адаптация студентов к профессиональным пакетам, применяемым на предприятиях;
- дорогостоящий натурный эксперимент заменяется численным (компьютерным) экспериментом;
- на экране студент в реальности видит динамический процесс деформации объекта во времени, что в традиционном изложении курса показать практически невозможно.

Основная ценность работы состоит в том, что впервые в практике вибродиагностики при формировании КЭ-модели применяется Гар-элемент для выделения диагностических признаков возникновения и развития трещин. Проведенные выше исследования в рамках учебного процесса убедительно показывают возможность такого подхода при вибродиагностике реальных инженерных сооружений.

### Список литературы

1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. М., 1983. 536 с.
2. Бересневич В. И. Сопоставительный анализ математических моделей усталостной трещины//Вестник научно-технического развития.—2009.—№12(28). — С.12-19 (дата обращения: 21.09.2014).
3. Бовсуновский О. А. Конечноэлементная модель для исследования колебаний стержня с закрывающейся трещиной // Проблемы прочности. —2008. —№5. —С.114—120 (дата обращения: 21.09.2014).
4. Дербасов А. Н. Роль конечно-элементного анализа в преподавании курса «Основы вибродиагностики конструкций и машин» // Концепт. – 2013. – № 09 (сентябрь). – ART 13173. – URL: <http://e-koncept.ru/2013/13173.htm>. – Гос. рег. Эл No ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X (дата обращения: 21.09.2014).
5. Генкин М. Д., Соколова А.Г. Виброакустическая диагностика машин и механизмов.-М.: Машиностроение, 1987.-288 с.: ил.
6. Серебряков Н. Н. Применение нелинейного Гар-элемента в решении задач конструкционного демпфирования лопаток турбин // Двигатель. –2011. —№6(78). —С.22—23 (дата обращения: 06.09.2014).

7. Харкевич А.А. Спектры и анализ. – М.: ГИТТЛ, 1953.-216 с.

**Рецензенты:**

Ерофеев В.И., д.ф.-м.н., профессор, заместитель директора по научной работе Института проблем машиностроения РАН, г. Нижний Новгород;

Орлов Л.Н., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой "Автомобили и тракторы", Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», г. Нижний Новгород.