УДК 537.86

РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СИГНАЛОВ С ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Власова К.В.[1], Волхонская Е.В.[1], Коротей Е.В.[1], Пахотин В.А.[2]

[1]*ФГБОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет», Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота, Калининград, Россия (236035, Калининград, ул. Молодёжная, 6), e-mail: rector@bga.gazinter.net*
[2]*ФГОУ ВПО «Балтийский федеральный университет имени И. Канта», Калининград, Россия (236040, Калининград, ул. А. Невского, 14)*

В настоящей работе рассматривается возможность повышения разрешающей способности при обработке сигналов с линейной частотной модуляцией. Исследуются два сигнала, временной сдвиг между которыми настолько мал, что их корреляционные функции получены с наложением. В этом случае для решения задачи обнаружения и оценки параметров двух сигналов по отдельности нельзя применять корреляционный анализ. Однако метод, основанный на анализе функционала правдоподобия, позволяет получать достоверные оценки параметров сигналов даже в условиях их наложения. Коэффициент корреляции при этом может достигать значения 0,9. Динамический диапазон решения ограничен только соотношением сигнал/шум. При использовании предложенного метода возможно повышение разрешающей способности в 5 раз по сравнению с корреляционным анализом. В работе представлены аналитические выражения, а также полученные на их основе результаты модельных исследований. Результаты моделирования подтверждают основные положения теории.

Ключевые слова: сигналы с линейной частотной модуляцией, разрешающая способность, статистическая теория радиотехнических систем, корреляционная функция, функционал правдоподобия.

RESOLUTION OF SIGNALS WITH LINEAR FREQUENCY MODULATION

Vlasova K.V.[1], Volkhonskaya E.V.[1], Korotey E.V.[1], Pakhotin V.A.[2]

[1]*«Kaliningrad state technical university" Baltic state academy of fishery fleet, Kaliningrad, Russia (236035, Kaliningrad, street Molodeznaja, 6) e-mail: rector@bga.gazinter.net*
[2]*«Baltic Federal University of a name of I. Kant», Kaliningrad, Russia (236040, Kaliningrad, street Nevskogo, 14)*

In the real work possibility of increase of resolution when processing signals with linear frequency modulation is considered. Two signals time shift between which is so small are investigated that their correlation functions are received with imposing. In this case separately it is impossible to apply the correlation analysis to the solution of a problem of detection and an assessment of parameters of two signals. However the method based on the analysis of functionality of credibility, allows to receive reliable estimates of parameters of signals even in the conditions of their imposing. The correlation coefficient thus can reach value 0,9. Dynamic range of the decision is limited only by a ratio signal/noise. When using the offered method possibly resolution increase by 5 times in comparison with the correlation analysis. In work analytical expressions, and also results of model researches received on their basis are presented. Results of modeling confirm basic provisions of the theory.

Key words: signals with linear frequency modulation, resolution, the statistical theory of radio engineering systems, correlation function, functionality of credibility.

Сигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-сигналы) относятся к сигналам с большой базой. Они имеют узкую корреляционную функцию и малую мощность при значительной энергии. Эти положительные качества ЛЧМ-сигналов определяют их широкое использование в различных комплексах аппаратуры.

Теоретической основой при обработке ЛЧМ-сигналов является корреляционный анализ. Максимум корреляционной функции дает возможность оценить время приема ЛЧМ-сигнала и его амплитуду. Ширина корреляционной функции зависит от девиации частоты и обеспечивает высокое разрешение ЛЧМ-сигналов по времени приема.

Корреляционный анализ, используемый для обработки ЛЧМ-сигналов, имеет ограничение по разрешающей способности, связанное с критерием Релея. Критерий Релея разделяет совокупность ЛЧМ-сигналов на ортогональные, когда коэффициент корреляции между ними равен нулю, и неортогональные, когда коэффициент корреляции отличен от нуля. В настоящей работе представлен метод, позволяющий снять ограничение Релея по разрешающей способности. Он дает возможность обрабатывать ЛЧМ-сигналы как в области их ортогональности, так и в области их неортогональности. При этом разрешающая способность при обработке ЛЧМ-сигналов увеличивается и, в принципе, оказывается зависящей от отношения сигнал/шум.

Основой метода обработки ЛЧМ-сигналов является использование при обработке дополнительного вектора – вектора разности между вектором принятого сообщения и вектором копии сигнала с оцениваемыми параметрами (вектором$\vec{d}$). При этом появляются новые возможности при обработке ЛЧМ-сигналов. Они связаны с оценкой дисперсии шума в принятой реализации, с повышением разрешающей способности при обработке ЛЧМ-сигналов, с увеличением точности оценки параметров, с возможностью нового решения задачи обнаружения сигнала. Использование вектора разности $\vec{d}$ для обработки сигналов приводит к новой технологии, возможности которой находятся лишь в начале изучения.

В настоящей работе новая технология обработки сигналов применена для решения задачи разрешения ЛЧМ-сигналов.

Основы теории

Рассмотрим основы теории обработки ЛЧМ-сигналов, используя для простоты совокупность двух ЛЧМ-сигналов. Запишем принятое сообщение $\hat{y}(t)$в комплексном виде

$$\hat{y}(t) = \widehat{U}_1 e^{i(\omega_0 + A(t-t_1))(t-t_1)} + \widehat{U}_2 e^{i(\omega_0 + A(t-t_2))(t-t_2)} + \widehat{U}_ш(t), \quad (1)$$

где $\widehat{U}_1$, $\widehat{U}_2$– комплексные амплитуды ЛЧМ-сигналов;

ω_0 – круговая частота;

t_1, t_2 – времена приема ЛЧМ-сигналов;

$A = \frac{\omega_k - \omega_0}{T}$;

ω_k – конечная круговая частота;

T – длительность ЛЧМ-сигнала;

$\widehat{U}_ш(t)$ – аддитивный нормальный шум со средним значением, равным нулю, дисперсией σ^2и интервалом корреляции τ_k.

Запишем на основании (1) логарифм функции правдоподобия

$$\ln\left(L\left(\vec{\acute{\lambda}}\right)\right) = -\frac{1}{2\sigma^2\tau_k}\int_0^T \left|\hat{y}(t) - \widehat{U}_1 e^{i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_1))(t-\acute{t}_1)} - \widehat{U}_2 e^{i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_2))(t-\acute{t}_2)}\right|^2 dt, \quad (2)$$

где $\vec{\acute{\lambda}}$ – вектор оценочных параметров сигнала, отмеченных штрихами.
Частотуω_0и параметр A будем считать известными.

Вместе с выражением для логарифма функции правдоподобия запишем функционал правдоподобия. Он более удобен для дальнейшего анализа

$$\Delta\left(\widehat{U}_1, \widehat{U}_2, \acute{t}_1, \acute{t}_2\right) = \int_0^T \left|\hat{y}(t) - \widehat{U}_1 e^{i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_1))(t-\acute{t}_1)} - \widehat{U}_2 e^{i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_2))(t-\acute{t}_2)}\right|^2 dt. \tag{3}$$

Функционал правдоподобия представляет собой квадрат модуля вектора разности между вектором принятого сообщения и вектором – копией сигнала с оценочными параметрами (вектора $\vec{d}$).

Функция правдоподобия представляет собой условную плотность распределения параметров сигнала. Максимум функции правдоподобия определяет наиболее вероятные оценочные параметры сигнала. В связи с этим, дифференцируя (3) по амплитудам $\widehat{U}_1$ и $\widehat{U}_2$ и приравнивая дифференциалы к нулю, получим систему уравнений правдоподобия

$$\overline{\hat{y}(t) e^{i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_1))(t-\acute{t}_1)}} = \widehat{U}_1 + \widehat{U}_2 \hat{R},$$
$$\overline{\hat{y}(t) e^{i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_2))(t-\acute{t}_2)}} = \widehat{U}_1 \hat{R}^* + \widehat{U}_2, \tag{4}$$

где черта сверху означает интегрирование;

$$\hat{R} = \int_{\acute{t}_1}^{\acute{t}_2+T} e^{i\left[(\omega_0 + A(t-\acute{t}_1))(t-\acute{t}_1) - (\omega_0 + A(t-\acute{t}_2))(t-\acute{t}_2)\right]} dt$$

- нормированный коэффициент корреляции между двумя ЛЧМ-сигналами;
*- комплексное сопряжение.

Система уравнений (4) решается относительно $\widehat{U}_1$ и $\widehat{U}_2$ при произвольных значениях $\acute{t}_1$и $\acute{t}_2$

$$\widehat{U}_1(\acute{t}_1, \acute{t}_2) = \frac{\overline{\hat{y}(t) e^{-i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_1))(t-\acute{t}_1)}} - \hat{R}\,\overline{\hat{y}(t) e^{-i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_2))(t-\acute{t}_2)}}}{1 - |\hat{R}|^2},$$
$$\widehat{U}_2(\acute{t}_1, \acute{t}_2) = \frac{\overline{\hat{y}(t) e^{-i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_2))(t-\acute{t}_2)}} - \hat{R}^*\,\overline{\hat{y}(t) e^{-i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_1))(t-\acute{t}_1)}}}{1 - |\hat{R}|^2}. \tag{5}$$

При $\left|\hat{R}\right| = 0$ выражения (5) определяют классический корреляционный анализ ЛЧМ-сигналов с максимумами в точках $\acute{t}_1 = t_1$и$\acute{t}_2 = t_2$. Если $\left|\hat{R}\right| \neq 0$, то выражения (5) не имеют четко выраженных максимумов, а, следовательно, не могут быть использованы для обработки ЛЧМ-сигналов в области их неортогональности. Для решения задачи разрешения ЛЧМ-сигналов, выражения (5) необходимо подставить в функционал правдоподобия (3). В этом случае используются возможности вектора $\vec{d}$, и при этом уменьшается количество неизвестных в (3). Подставим (5) в (3) и проведем алгебраические преобразования с учетом (4). В результате получим функционал правдоподобия в виде

$$\Delta(\acute{t}_1, \acute{t}_2) - \widehat{U}_2 e^{i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_2))(t-\acute{t}_2)} =$$

$$\overline{|\hat{y}(t)|^2} - \widehat{U}_1(\acute{t}_1, \acute{t}_2)\overline{\hat{y}^*(t) e^{i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_1))(t-\acute{t}_1)}} - \widehat{U}_2(\acute{t}_1, \acute{t}_2)\overline{\hat{y}^*(t) e^{i(\omega_0 + A(t-\acute{t}_2))(t-\acute{t}_2)}}. \quad (6)$$

Данный функционал является поверхностью в двухмерном пространстве $\acute{t}_1, \acute{t}_{21}$. Перебирая все значения $\acute{t}_1$ и $\acute{t}_2$ в области их определения, можно получить полную поверхность функционала правдоподобия. Максимум поверхности функционала реализуется в точке $\acute{t}_1 = t_1$ и $\acute{t}_2 = t_2$ при $\widehat{U}_1 = \widehat{U}_1$ и $\widehat{U}_2 = \widehat{U}_2$. По своему смыслу минимум значения функционала (3) определяет дисперсию шума.

Таким образом, используя минимум функционала правдоподобия, как критерий, можно полностью решить задачу разрешения двух ЛЧМ-сигналов при значениях $|\hat{R}|$, отличающихся от нуля.

Рассмотрим вопрос о рабочей области данного метода решения задачи разрешения двух ЛЧМ-сигналов. Для этого воспользуемся выражением для дисперсии амплитуд ЛЧМ-сигналов (дисперсии Рао – Крамера). Вывод этого выражения основан на использовании информационной матрицы Фишера, элементы которой определяются выражением

$$J_{ij} = -M\left(\frac{d^2\left(\ln L\left(\vec{\lambda}\right)\right)}{d\lambda_i d\lambda_j}\right), \quad (7)$$

где M – оператор математического ожидания.

Элементы матрицы Фишера находятся в точке минимума функционала правдоподобия при $\acute{t}_1 = t_1$ и $\acute{t}_2 = t_2$, когда $\widehat{U}_1 = \widehat{U}_1$ и $\widehat{U}_2 = \widehat{U}_2$. Выполняя дифференцирование (2) согласно (7), получим информационную матрицу Фишера

$$\hat{J} = \frac{T}{\sigma^2 \tau_k}\begin{pmatrix} 1 & \hat{R} \\ \hat{R}^* & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Диагональные элементы матрицы, обратной матрице Фишера, определяют дисперсии амплитуд ЛЧМ-сигналов

$$D_{U_1} = D_{U_2} = \frac{\sigma^2 \tau_k}{T(1-|\hat{R}|^2)} = \frac{\sigma^2}{N(1-|\hat{R}|^2)}, \quad (9)$$

где N– количество некоррелированных отсчетов шума на интервале T.

Из выражения (9) следует, что в результате обработки дисперсия уменьшилась в $N\left(1 - |\hat{R}|^2\right)$ раз. Если ввести значение дисперсии$D_{U_0} = \frac{\sigma^2}{T}$, при $|\hat{R}| = 0$, то относительная дисперсия имеет простую зависимость от $|\hat{R}|$

$$\frac{D_U}{D_{U_0}} = \frac{1}{1-|\hat{R}|^2}. \quad (10)$$

При изменении $|\hat{R}|$ от 0 до 0,9, относительная дисперсия увеличивается на 7 дБ. Эта область изменений $|\hat{R}|$ может быть принята за рабочую область представляемого метода решения задачи разрешения двух ЛЧМ-сигналов.

Увеличение дисперсии на 7 дБ в точке $|\hat{R}| = 0{,}9$ это плата за высокое разрешение сигнала. Задача разрешения двух ЛЧМ-сигналов может быть решена и при $|\hat{R}| > 0{,}9$, но при этом необходимо иметь высокое (более 7 дБ) отношение сигнал/шум в принятой реализации.

Результаты модельных расчетов

Представим результаты модельных расчетов, отображающие возможность обработки принятого сообщения, содержащего два ЛЧМ-сигнала. При модельных расчетах приняты следующие параметры ЛЧМ-сигналов: амплитуды $U_1 = 2$, $U_2 = 1{,}6$; начальные фазы $\varphi_1 = 30^0$, $\varphi_2 = 120^0$; конечная частота $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 450$ кГц; длительность сигнала $T = 0{,}66$ мс; время приема первого ЛЧМ-сигнала $t_1 = 0{,}6$ мс; время приема второго ЛЧМ-сигнала может быть различным. Отношение сигнал/шум равно 0 дБ.

Пусть принята реализация, содержащая два ЛЧМ-сигнала. Различие времени приема $\tau = t_{01} - t_{02} = 0{,}3$ мс. В этом случае коэффициент корреляции близок к нулю и корреляционный анализ дает возможность оценить по наблюдаемым максимумам на рис. 1 время приема и амплитуды сигналов ЛЧМ. Поверхность обратного функционала бия $\Delta 1(\acute{t}_1, \acute{t}_2) = {}^{1}/_{\Delta(\acute{t}_1, \acute{t}_2)}$ показана на рис. 2. Единственный максимум этой поверхности определяет оценочные параметры двух ЛЧМ-сигналов: $\acute{t}_1$, $\acute{t}_2$, $\widehat{U}_1$, $\widehat{U}_2$. Значение максимума поверхности оценивает дисперсию шума.

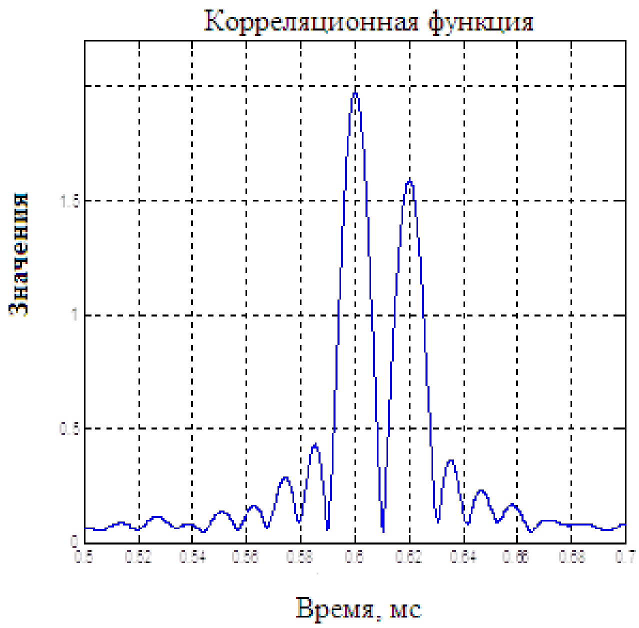

Рис.1.

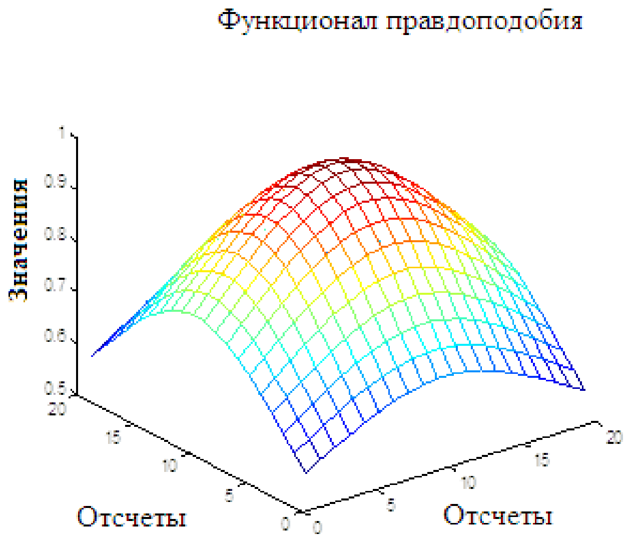

Рис.2.

При уменьшении различия во времени приема τ до значения $\tau = 4$ мкс, коэффициент корреляции между ЛЧМ-сигналами возрастает до значения $|\hat{R}| = 0{,}8$. Корреляционная функция имеет вид одного максимума, значение которого меняется в зависимости от разности фаз двух ЛЧМ-сигналов (рис.3). Поверхность обратного функционала правдоподобия (рис. 4) имеет единственный максимум, определяющий совокупность параметров: $\acute{t}_1$, $\acute{t}_2$, $\widehat{U}_1$, $\widehat{U}_2$.

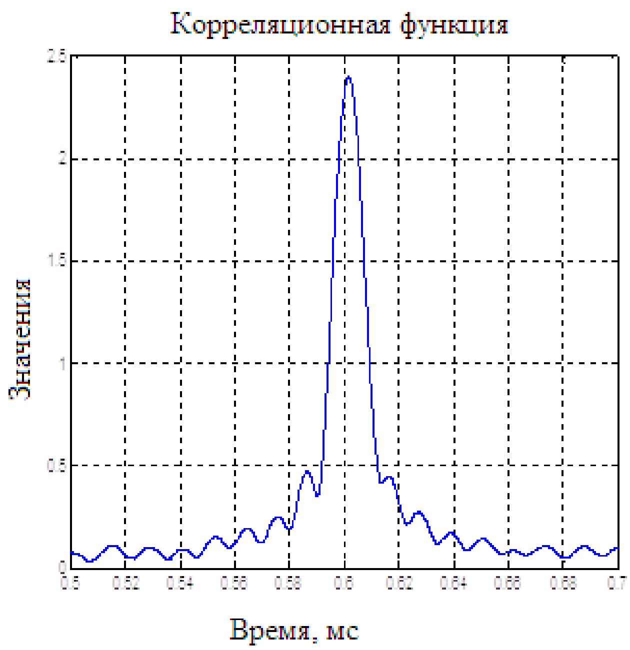

Рис.3.

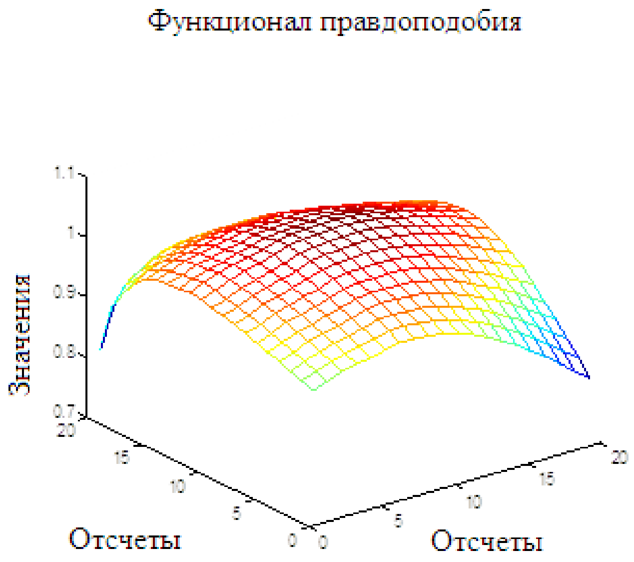

Рис.4.

На рис. 5 показаны изменения оценочных времен приема двух ЛЧМ-сигналов при следующих условиях. Значение $\acute{t}_1$ постоянно и равно $\acute{t}_1 = 0{,}6$ мс, значение $\acute{t}_2$ меняется в пределах от $\acute{t}_2 = 0{,}604$ мс до $\acute{t}_2 = 0{,}624$ мс. Этим обеспечивается изменение коэффициента корреляции между ЛЧМ-сигналами от $|\hat{R}| = 0{,}7$ и ниже.

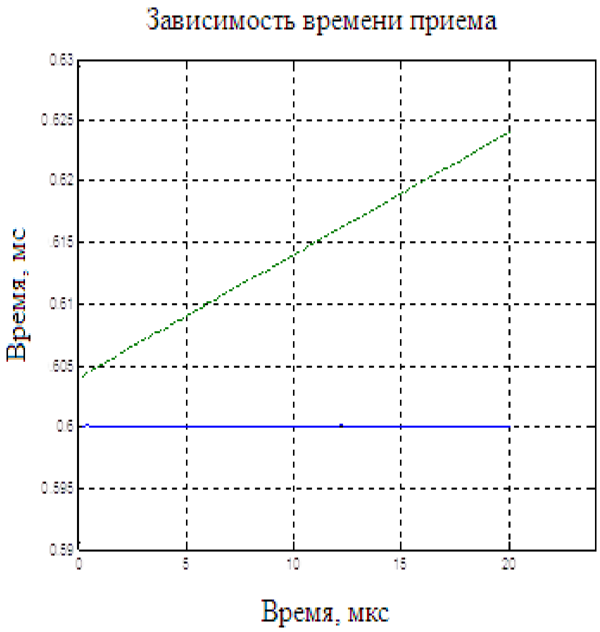

Рис.5.

Классическое разрешение ЛЧМ-сигналов при девиации частоты $f_k - f_0 = 50$ кГц определено значением $\tau = 20$ мкс. В результате модельных расчетов в соответствии с новым методом решения разрешение ЛЧМ-сигналов возможно при $\tau = 4$ мкс. Следовательно, разрешение двух ЛЧМ-сигналов может быть увеличено по сравнению с классикой в 5 раз. Это подтверждает основные теоретические положения представляемого метода Отношение сигнал/шум, в котором возможно увеличение разрешения двух ЛЧМ-сигналов, согласно модельным расчетам, может достигать -20 дБ. Динамический диапазон представляемого метода ограничен уровнем шума в принятой реализации. Даже пятикратное уменьшение амплитуды второго ЛЧМ-сигнала позволяет с удовлетворительной точностью оценить время приема слабого сигнала и его амплитуду. Влияние боковых лепестков корреляционной функции ЛЧМ-сигналов, ограничивающий динамический диапазон корреляционного анализа, не отмечается.

Заключение

В настоящей работе представлена новая методика решения задачи разрешения двух ЛЧМ-сигналов. Она основана на использовании дополнительной информации, которую позволяет получить вектор разности между вектором принятого сообщения и вектором копии сигнала с оценочными параметрами. Новая методика снимает Релеевское ограничение на разрешающую способность и дает возможность увеличить практически разрешение двух ЛЧМ-сигналов по крайней мере в 5 раз по сравнению с методом корреляционного анализа. Динамический диапазон обработки ЛЧМ-сигналов по новой методике ограничен лишь уровнем шума. Он значительно превышает динамический диапазон обработки методом корреляционного анализа.

Исследование выполнено в рамках государственного задания на проведение научно-технических работ, договор №2013-4 ГЗ от 01 января 2013 года.

Список литературы

1. Власова К.В., Никитин М.А., Чугайнов А.С., Кочмарский А.В. Оценка параметров ионосферного сигнала // Вестник БФУ им. И.Канта: 2012, Вып. 4. – С. 78-84.
2. Пахотин В.А., Бессонов В.А., Молостова С.В., Власова К.В. Теоретические основы оптимальной обработки сигналов. – Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2008. – 189 с.
3. Пахотин В.А., Бессонов В.А., Власова К.В. Разрешающая способность в радиолокации. – LAPLAMBERT Academic Pablishing, 2011. – 157 с.
4. Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем. – М.: Радиотехника, 2003.
5. Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем : учеб. пособ. для вузов. – М.: Радиотехника, 2003. – 400 с.
6. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.

Рецензенты:

Захаров В.Е., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой радиофизики и информационной безопасности Балтийского федерального университета им. И. Канта, г. Калининград;

Никитин М.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры телекоммуникаций Балтийского федерального университета им. И. Канта, г. Калининград.