

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ШАРНИРЕ-СУСТАВЕ ЭНДОСКЕЛЕТА

Борисов А.В., Гончарова И.А., Кончина Л.В., Лётов Л.А.

«Смоленский филиал НИУ «Московский энергетический институт (ТУ)», Смоленск, Россия (214013, г. Смоленск, Энергетический проезд, дом 1), e-mail: BorisowAndrej@yandex.ru

В статье проанализировано распространение трещины в модели сферического шарнира-сустава опорно-двигательного аппарата человека. Сделана попытка применить модель из неживой природы к описанию поведения биологического материала. Эта модель может соответствовать, например, тазобедренному суставу человека. Предполагается, что ходьба представляет собой процесс циклического нагружения шарнира-сустава, который приводит к постепенному подрастанию трещины. Рассмотрены как статические, так и динамические нагрузки, возникающие при ходьбе в опорно-двигательном аппарате человека. По результатам численных расчетов построены зависимости коэффициентов интенсивности от относительного расстояния между трещинами при постоянной нагрузке, соответствующей состоянию покоя человека и при изменяющейся с течением времени при ходьбе нагрузке. Показан циклический характер изменения коэффициентов интенсивности усилий. Данная модель применяется для создания математической модели экзоскелета, повторяющего свойства биологического прототипа – эндоскелета человека.

Ключевые слова: экзоскелет, опорно-двигательный аппарат, шарнир-сустав, распространение трещины, коэффициент интенсивности усилий, расстояние между трещинами, статические и динамические нагрузки.

THE PROPAGATION OF CRACKS IN THE HINGE-JOINT ENDOSKELETON

Borisov A.V., Goncharova I.A., Konchina L.V., Ljotov L.A.

The Smolensk branch of National Research University "MEI" (Technical University), Energeticheskiy proezd 1, 214013 Smolensk, Russia, e-mail: borisowandrej@yandex.ru

The article analyzes the propagation of cracks in the model of a spherical hinge-joint locomotor apparatus. An attempt was made to apply the model from inanimate nature to the description of the behavior of biological material. This model may correspond to, for example, the hip joint of the person. It is assumed that walking is the process of cyclic loading hinge-joint, which leads to the gradual pakastani cracks. Considered both static and dynamic loads when walking in the locomotor apparatus. The results of numerical calculations the dependences of intensity factors from the relative distance between the cracks at constant load, corresponding to the rest of a person and of a changing over time while walking load. Shows the cyclical changes of the coefficients of the intensity of effort. This model is used to create a mathematical model of the exoskeleton, replicating the properties of biological prototype - endoskeletal person.

Keywords: exoskeleton, locomotor apparatus, hinge-joint distribution of cracks, coefficient of intensity of effort, the distance between the cracks, static and dynamic loads.

Рассмотрим модель механической системы, максимально приближенную к движениям человека, в связи с чем возникает необходимость моделирования шарниров-суставов, позволяющих осуществлять движения звеньев во всех координатных плоскостях. Разработаем математическую модель шарнира для выяснения нагрузок и напряжений, возникающих в многослойной конструкции, с целью дальнейшего выяснения ресурса эксплуатации. Подобная модель может способствовать снижению энергозатрат при движениях стержневой механической системы за счет снижения сил сопротивления и рекуперации энергии.

Так как опорно-двигательный аппарат человека считается совершенным, будем в качестве основы для моделирования шарнира использовать информацию о суставе.

В экспериментальных работах в Центральном институте травматологии и ортопедии установлено, что головка тазобедренного сустава является практически идеальной сферой, за

исключением шейки бедра [2]. В работах [7-9] показано, что смазка в суставе является жидкокристаллической и обеспечивает практически нулевое трение в зоне контакта и сглаживание всех несовершенств поверхности: шероховатостей, асферичности, неровностей и других отклонений поверхности от идеальной сферы. Эта смазка обеспечивает практически равномерное гидростатическое давление в суставе.

Применим к описанию поведения биологического материала модели, предложенные в работах [3-6]. Так как экзоскелет должен повторять свойства эндоскелета человека, предложим математическую модель распространения трещин в материале шарнира-сустава, пригодную для описания процессов в биологическом материале и в искусственном материале. Рассмотрим модель роста трещины в шарнире-суставе эндо- и экзоскелета человека при следующих предположениях: ходьба представляет собой процесс циклического нагружения шарнира-сустава, который приводит к постепенному подрастанию трещины (в суставе при ходьбе в фазе опоры возникают нагрузки, которые приводят к росту трещины, и есть процессы разгрузки, которые залечивают трещину, однако в среднем наблюдается рост трещины).

Сустав является системой идеальных сферических оболочек, что хорошо соответствует модели тазобедренного сустава человека. В каждом слое свойства материала одинаковы. Данное допущение является оправданным, так как в реальном суставе наблюдается подобная слоистая структура: один слой – гиалиновый хрящ, второй слой – надкостница, третий – костная ткань и т.д. В каждом из слоев свойства в среднем одинаковы. Но сфер может быть достаточно много, количество слоев в предложенной модели не ограничено, и тем самым можно с хорошей точностью аппроксимировать свойства реального сустава.

Исследуем рост трещин в одной сферической оболочке. Рост трещин описывается одинаковыми закономерностями, различия заключаются только в значениях констант, характеризующих материал.

Рассмотрим меридиональную трещину, расположенную вдоль меридиана сферической оболочки, как показано на рис. 1. Будем считать, что при нагрузках в суставе к берегам трещины приложены равномерно распределенные усилия и моменты при симметричном распределении напряжений относительно линии трещины. То есть трещина загружена усилиями $P_y(x,0) = -p_1 = const$ и изгибающими моментами $M_y(x,0) = -p_3 = const$.

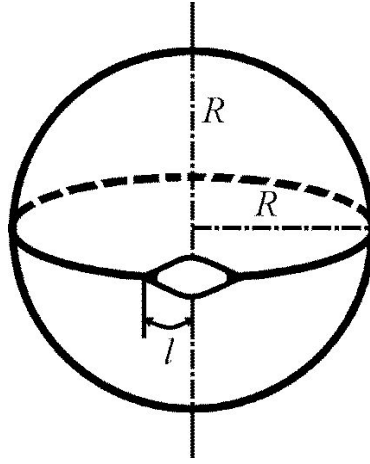


Рис. 1. Модель сферической оболочки с трещиной

Опишем процесс распространения трещины, используя коэффициенты интенсивности усилий. При таких предположениях коэффициенты интенсивности усилий и моментов около вершины меридиональной трещины в сферической оболочке в случае имеют вид [4]:

$$\begin{aligned}
 K_1 = & p_1 \sqrt{l} (1 + 3\pi\lambda^2/32 + \lambda^4/(1024(3 + \nu))[(9\pi^2 - 6)(3 + \nu) - 28\nu + 4(83 - 3\nu)\ln(\lambda\gamma_0/4) - \\
 & 48(1 + 3\nu)\ln^2(\lambda\gamma_0/4)]) + (6p_3 \sqrt{l} / h)(\sqrt{1 - \nu^2} / \sqrt{3})(\lambda^2/[32(3 + \nu)])(-7 - 12\ln(\lambda\gamma_0/4) + \\
 & (\pi\lambda^2/[32(3 + \nu)])[47 - 3\nu - 24(5 + 3\nu)]\ln(\lambda\gamma_0/4)) + O(\lambda^6 \ln \lambda), \\
 K_3 = & -(p_1 h \sqrt{l} / 2)[(3 + \nu) / \sqrt{3(1 - \nu^2)}](\lambda^2/[32(3 + \nu)])(-1 - 7\nu - 4(1 + 3\nu)\ln(\lambda\gamma_0/4) + \\
 & (\pi\lambda^2/1024)[(1 + 3\nu)/(3 + \nu)]\{9 - \nu - 8(5 + 3\nu)\ln(\lambda\gamma_0/4)\}) + p_3 \sqrt{l} (1 + [(1 + 3\nu)/(3 + \\
 & \nu)](\pi\lambda^2/32) + (\lambda^4/[512(3 + \nu)])\{-5 - 17\nu + [\pi^2(1 + 3\nu)^2/(6 + 2\nu)] - 2(1 + 3\nu)\ln(\lambda\gamma_0/4)(1 + \\
 & 12\ln(\lambda\gamma_0/4)\}) + O(\lambda^6 \ln \lambda).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Если рассматривать прямолинейную модель распространения трещины, то есть одномерный рост трещины вдоль меридиана, при нормальной нагрузке $p_1 = qR/2$, то $p_3 = 0$. При этом остается только один коэффициент интенсивности усилий и моментов K_1 . Предположение, что замкнутая оболочка нагружена равномерным внутренним давлением интенсивности q , хорошо согласуется с моделью реального сустава, в котором, как указывалось выше, имеющаяся смазка обеспечивает равномерное гидростатическое давление по всей поверхности сустава и не допускает непосредственного контакта в суставе трущихся поверхностей.

Если прорастание трещины происходит в двух направлениях, вдоль меридиана и перпендикулярно ему, то возникают сдвигающие нагрузки. При действии постоянной антисимметричной нагрузки на берегах трещины, т.е. сдвигающего усилия $S(x,0) = -p_2 = const$ и обобщенной перерезывающей силы $Q_y(x,0) = -p_4 = const$, коэффициенты интенсивности имеют вид [4]:

$$K_2 = p_2 \sqrt{l} (1 + \pi\lambda^2/32 + (\lambda^4/1024)(\pi^6 - 6 + 24\ln(\lambda\gamma_0/4)) + (p_4 l \sqrt{l} / h)[\lambda^2 \sqrt{3(1-v^2)} / 32(3 + v)](1 - \pi\lambda^2/16) + O(\lambda^6 \ln \lambda), \quad (2)$$

$$K_4 = - [p_2 h \sqrt{l} / \sqrt{3(1-v^2)}](\lambda^2/64)[(5 - v + \pi\lambda^2(9 - v)/32] + (p_4 l \sqrt{l} / 2)(1 + (\lambda^4(3 - v)/[512(3 + v)])(1 + 4\ln(\lambda\gamma_0/4))) + O(\lambda^6 \ln \lambda).$$

Перейдем к рассмотрению большого количества трещин. Трещина имеет длину $2l$, сфера радиус R , ν – коэффициент Пуассона, λ – малый параметр, характеризующий относительное расстояние между трещинами $\lambda = 2l/d = 0,5$ (чаще всего, вообще $0 \leq \lambda \leq 5,5$), d – расстояние между центрами трещинами, $\ln \gamma_0 = 0,5772$ – постоянная Эйлера, h – толщина оболочки. Проведем численные оценки для модели головки тазобедренного сустава.

Эти коэффициенты удовлетворяют определенным условиям разрушения, после чего трещина начнет развиваться по криволинейной траектории.

$$\theta = 2 \arctg[(k_1 - \sqrt{k_1^2 + 8k_2^2}) / (4k_2)]. \quad (3)$$

Уравнение предельного равновесия при этом запишется в виде:

$$\cos^3(\theta/2)(k_1 - 3k_2 \operatorname{tg}(\theta/2)) = k_1, \quad (4)$$

где: $k_1 = K_1/\sqrt{\pi}$ – связан с коэффициентом сноса, $k_2 = K_2/\sqrt{\pi}$ – связан с коэффициентом диффузии. Если $k_2 \neq 0$, то трещина флуктуирует.

При ходьбе есть сдвиговые нагрузки (рис. 2). При действии на берега трещины постоянной самоуравновешенной нагрузки

$$\sigma_y^\pm - i\tau_{xy}^\pm = -s = \text{const}. \quad (5)$$

где: $\sigma_y^\pm, \tau_{xy}^\pm$ – компоненты тензора напряжений, знаками «+» и «-» отмечены граничные значения.

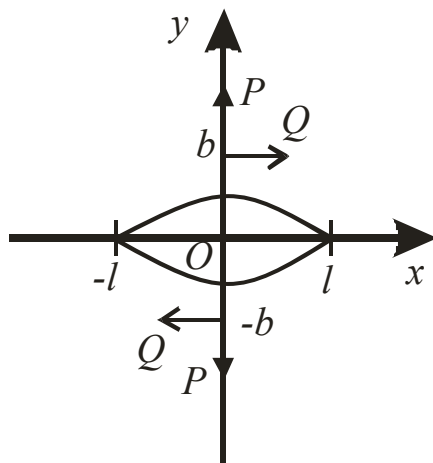


Рис. 2. Модель трещины

Коэффициенты интенсивности входят в выражение:

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = s \sqrt{l}. \quad (6)$$

Коэффициенты интенсивности в этом случае равны:

$$k_1 = \frac{P\sqrt{l}}{\pi(1+\chi)\sqrt{b^2+l^2}} (1 + \chi + 2b^2/(b^2 + l^2)), \quad (7)$$

$$k_1 = \frac{Q\sqrt{l}}{\pi(1+\chi)\sqrt{b^2+l^2}} (1 + \chi - 2b^2/(b^2 + l^2)).$$

где: P и Q – сосредоточенные нормальная и сдвигающая силы соответственно, χ – упругая постоянная $\chi = 3 - 4\nu$ – для плоской деформации, $\chi = (3 - \nu)/(1 - \nu)$ – для обобщенного плоского напряженного состояния.

Проведем численные оценки коэффициентов интенсивности усилий для модели сферического сустава-шарнира модели экзоскелета.

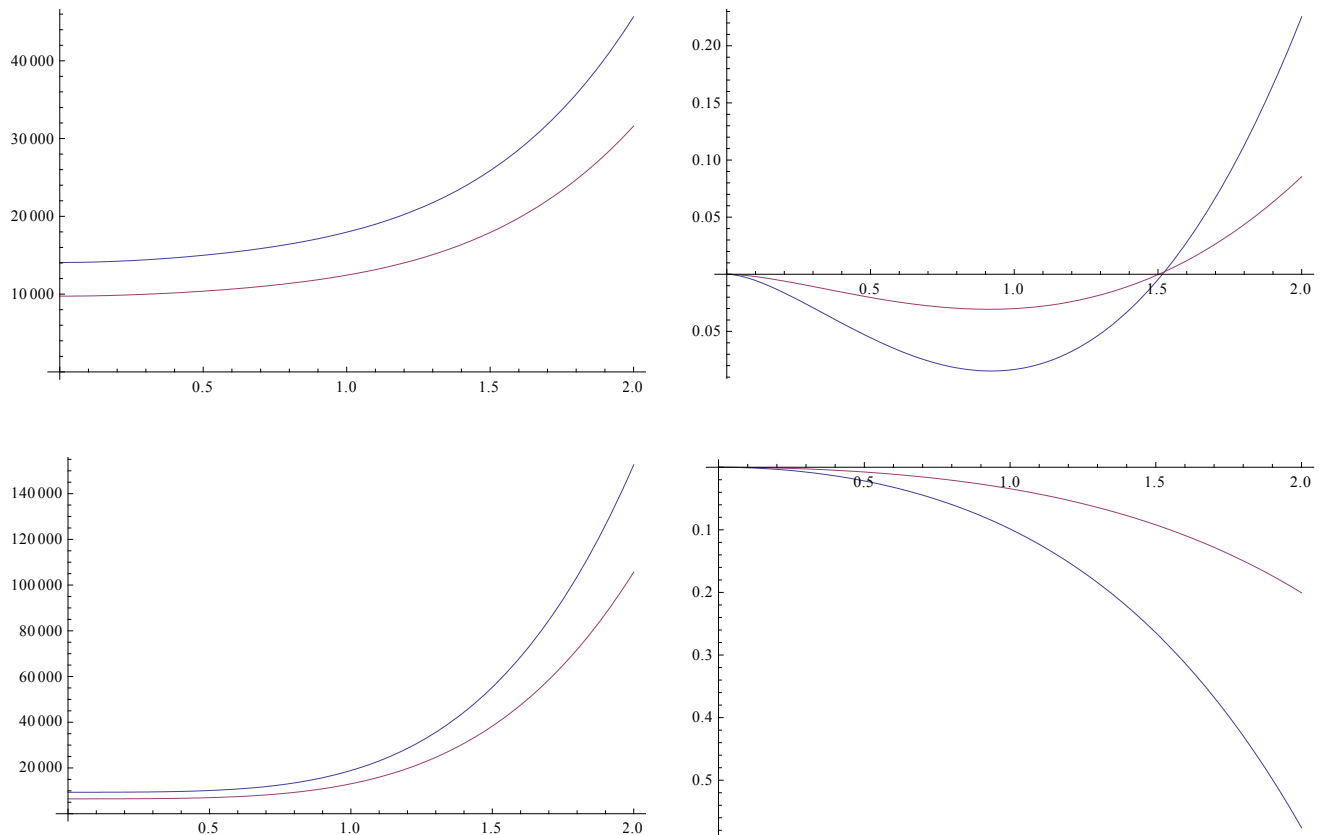
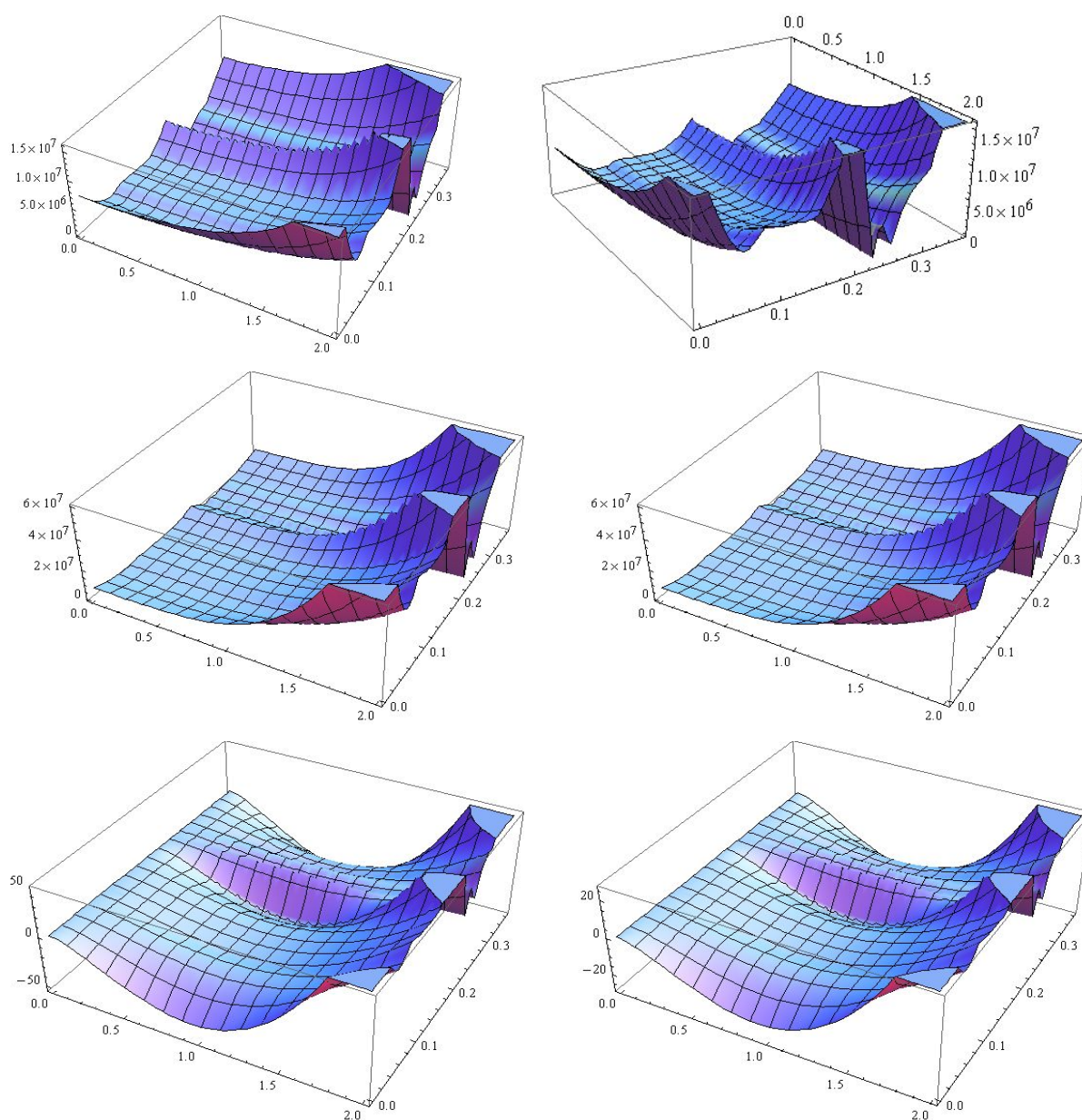


Рис. 3. Зависимость коэффициентов интенсивности усилий K_i ($i = 1, \dots, 4$) от относительного расстояния между трещинами λ

На всех рисунках синяя линия соответствует хрящевой ткани головки тазобедренного сустава, коричневая – костной ткани в модели двухкомпонентной оболочки.

Зависимости для всех коэффициентов интенсивности показывают, что больше нагружается хрящевая ткань, и она имеет больший ресурс к восстановлению, т.е. залечиванию при возникновении трещин, в отличие от костной ткани. Чем больше начальное расстояние между трещинами, тем большие значения коэффициентов интенсивности возможны.

Рассмотрим теперь поведение материала сустава и костной ткани при нагрузках, соответствующих реальным при движениях в шарнирах-суставах опорно-двигательного аппарата человека. Данные нагрузки получим из результатов численного моделирования по разработанной нами методике [1]. В этом случае имеется дополнительная зависимость коэффициентов интенсивности от времени (рис. 4).



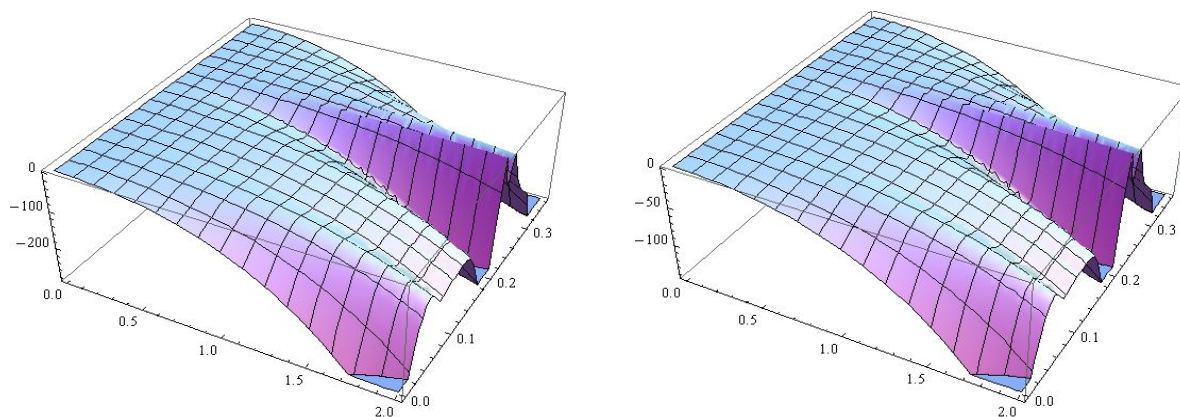


Рис. 4. Зависимость коэффициентов интенсивности усилий K_i ($i = 1, \dots, 4$) от относительного расстояния между трещинами при переменной нагрузке, изменяющейся с течением времени при ходьбе человека (слева для хрящевой ткани, справа – для кости)

По результатам расчетов видно, что зависимость от времени носит циклический характер, и сохранилось поведение в зависимости от начального расстояния в сравнении с постоянной нагрузкой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-97512 p_центр_a).

Список литературы

1. Борисов А.В. Моделирование опорно-двигательного аппарата человека и применение полученных результатов для разработки модели антропоморфного робота : моногр. – М. : Спутник +, 2009. – 212 с.
2. Гаврюшенко Н.С. Материаловедческие аспекты создания эрозионностойких узлов трения искусственных суставов человека : дис. ... докт. техн. наук. – М., 2000. – 234 с.
3. Лурье А.И. Теория упругости. - М. : Наука, 1970. – 940 с.
4. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев : Наукова думка, 1976. – 443 с.
5. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. - М. : Наука, 1972. – 400 с.
6. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. – Минск : Технопринт, 2000. – 425 с.
7. A method for defining flow and rheological constants of viscoplastic biomaterials : Part 2 / S.V. Shilko, S.L. Gavrilenko, V.F. Khizhenok, I.N. Stakan, S.P. Salivonchik // Russian Journal of Biomechanics. – 2003. – Vol. 7, № 2. – P. 11-23.
8. Chernous D.A. Modelling of contractive activity of the muscle tissue / D.A. Chernous, S.V. Shilko

// Russian Journal of Biomechanics. – 2006. – Vol. 10, № 3. – P. 53-62.

9. Gavrilenko S.L. A method for determining flow and rheological constants of viscoplastic biomaterials : Part 1 / S.L. Gavrilenko, R.A. Vasin, S.V. Shilko // Russian Journal of Biomechanics. – 2002. – Vol. 6, № 3. – P. 92-98.

Рецензенты:

Денисов В.Н., д.т.н., доцент, кафедра «Высшая математика» Смоленского филиала национального исследовательского университета «МЭИ», г. Смоленск.

Мазалов М.Я., д.ф.-м.н., доцент, кафедра «Высшая математика» Смоленского филиала национального исследовательского университета «МЭИ», г. Смоленск.